Angles (3) - Exercices

Exercice 1

Construire, à la règle et au compas, les polygones réguliers convexes, inscrits dans un cercle donné, suivants :

1. Le triangle équilatéral.
2. Le carré.
3. L'hexagone régulier.
4. L'octogone régulier.
5. Le dodécagone régulier.

Exercice 2

1. Démontrer que les cercles qui ont pour diamètres deux côtés d'un triangle quelconque ont leur deuxième point d'intersection sur le troisième côté du triangle.
2. Démontrer que les bissectrices intérieures d'un quadrilatère quelconque déterminent un quadrilatère inscriptible.
3. Démontrer que dans un triangle quelconque ABC, les hauteurs sont les bissectrices intérieures des angles du triangle formé par les pieds des hauteurs de ABC.
4. Soient $\mathscr{C}$ un cercle et M un point extérieur à $\mathscr{C}$. Par M, on mène les tangentes (MA) et (MB) au cercle $\mathscr{C}$. On prolonge de segment $[MA]$ d'une longueur $CM = MA$. On trace le diamètre $[AD]$. Démontrer que les points B, C et D sont alignés.
5. Deux cercles de même rayon se coupent en A et B. Une droite passant par A recoupe le premier cercle en C et le second en D. Comparer les longueurs BD et BC.
6. A quelle condition nécessaire et suffisante un parallélogramme ou un losange est-il inscriptible dans un cercle ?

Exercice 3

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux diamètres perpendiculaires de $\mathscr{C}$. La tangente au cercle $\mathscr{C}$ en un point M de l'arc $\overset{\frown}{AC}$ coupe la droite (CD) en P.

1. Comparer les angles $\widehat{MPO}$, $\widehat{MOA}$ et $\widehat{MBA}$.
2. Démontrer $\widehat{MPO}$ est égal à la différence de $\widehat{MBD}$ et $\widehat{MBC}$.

Exercice 4

Deux cordes $[BB']$ et $[CC']$ d'un cercle $\mathscr{C}$ se coupent en point intérieur au cercle, le point A. Démontrer que l'angle $\widehat{BAC}$ est égal à la somme des angles inscrits qui interceptent les arcs $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{B'C'}$.
Indication : joindre B et C'.

Exercice 5

Un quadrilatère convexe $ABCD$ est inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$. L'angle $\widehat{ABC}$ est égal au triple de l'angle $\widehat{CDA}$ et la corde $[BD]$ est égale au rayon du cercle $\mathscr{C}$. Calculer les angles du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 6

Soient ABC un triangle, H son orthocentre, M le milieu du segment $[BC]$, D le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit au triangle ABC et E le point où la hauteur recoupe le cercle.

1. Comparer les directions des droites (BH) et (DC), ainsi que celles des droites (CH) et (DB).
2. Quelle est la nature du quadrilatère $BHCD$? Quel est son centre ?
3. Déterminer la nature du triangle HDE. Quelle est la médiatrice du segment $[HE]$?
4. En déduire que le cercle circonscrit à un triangle contient les symétriques de l'orthocentre de ce triangle par rapport à un côté ou par rapport au milieu de ce côté.

Exercice 7

Soient ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit, A' (respectivement B' et C') le symétrique de O par rapport à (BC) (respectivement (AC) et (AB)). Démontrer que l'orthocentre H du triangle ABC est le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ et que les cercles circonscrits aux triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même rayon.
Indication : utiliser l'exercice précédent.

Exercice 8

Soit ABC un triangle isocèle en A. On suppose l'angle $\widehat{BAC}$ aigu. Les hauteurs (AA'), (BB') et (CC') du triangle ABC sont concourantes en H, l'orthocentre du triangle.

1. Démontrer que les points A, B', H et C' appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre (on dit que ces points sont cocycliques).
2. Démontrer que $\widehat{AC'O} = \widehat{HC'A'}$.
3. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AC'A'}$. En déduire que la droite $(A'C')$ est tangente en C' au cercle $\mathscr{C}$. Quelle est la deuxième tangente menée de C' au cercle $\mathscr{C}$?

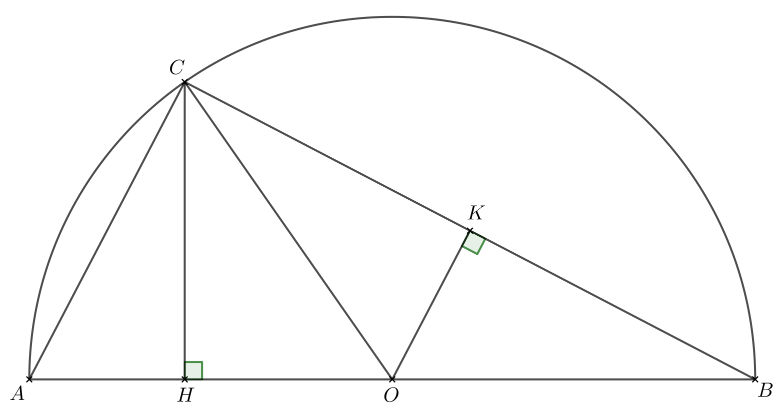
Exercice 9

Soit GTD un triangle isocèle en D inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R. L'angle $\widehat{GDT}$est aigu, on pose $a \coloneqq \widehat{GDT}$. La droite (OD) coupe le côté $[GT]$ en un point I.

1. Démontrer que I est le milieu de $[GT]$.
2. Démontrer que $\widehat{GOI} = a$.
3. Exprimer $\cos(\widehat{GOI})$ en fonction de R. En déduire que $OI = R\cos(a)$ puis que $DI = R\,(1 + \cos(a))$.
4. Exprimer $\sin(\widehat{GOI})$ en fonction de R. En déduire GT en fonction de R et $\sin(a)$.
5. Démontrer que l'aire du triangle GTD est égale à $R^2\sin(a)\,(1 + \cos(a))$.
6. Calculer l'aire du triangle ABC isocèle en A inscrit dans un cercle de centre O tel que $R = 5\,\text{cm}$ et $\widehat{BAC} = 30°$.

Exercice 10

Sur la figure ci-dessous, C appartient au demi-cercle de centre O, de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 2\,\text{cm}$. H est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle AOC. K est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle AOC. K est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC.



1. Démontrer que $BC = 2BK$ et que $BH = 1 + OH$.
2. Comparer les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{ABC}$.
3. Dans le triangle OHC, écrire $\cos(\widehat{AOC})$.
4. Dans le triangle OBK, écrire $\cos(\widehat{ABC})$.
5. Dans le triangle BCH, écrire $\cos(\widehat{ABC})$ en fonction de OH et BK.
6. On pose $a \coloneqq \widehat{ABC}$. Exprimer $\cos(2a)$ en fonction de OH puis exprimer $\cos(a)$ en fonction de BK.
7. Exprimer $\cos(2a)$ en fonction de $\cos(a)$.