Quatrième - Cours de mathématiques

Mathieu KIEFFER

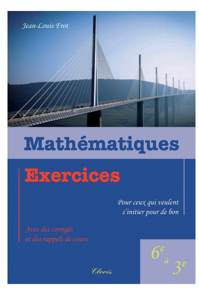
Table des matières

Introduction

Ce cours est celui dispensé sur le terrain à mes élèves de Quatrième. Il reprend les thèmes évoqués par le programme officiel avec un certain souci de rigueur tout en s'octroyant quelques libertés. Les objets mathématiques utilisés y sont toujours présentés via une définition claire et précise. Les théorèmes et autres résultats mathématiques sont démontrés dans la mesure du possible avec plus ou moins de détails. Les rares propositions laissées sans démonstration le sont car il n'existe tout simplement pas de démonstration accessible à ce niveau ; une référence aux cours des années suivantes est alors requise. Aussi, certaines démonstrations ont volontairement été rédigées de manière succincte voire très incomplète. L'objectif est clair : que l'élève prenne son stylo afin de se frotter à cette réalité mathématique et d'en délier le vrai du faux par sa propre expérience, ses propres efforts. De la même façon, vous trouverez des exemples et des exercices non traités tout au long de ce cours. En effet, lire un corrigé ou une solution n'apporte quasiment rien à la compréhension d'une notion. Apprendre, c'est avant tout faire par soi-même.

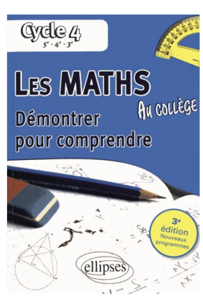
Ce cours comporte sans aucun doute des erreurs et est voué à évoluer à l'épreuve des séances. Il représente le strict minimum que tout élève de Quatrième désireux d'étudier les mathématiques doit maîtriser en fin d'année scolaire. C'est pourquoi j'invite vivement cet élève à prolonger ses études à l'aide des remarquables ouvrages suivants :

1. « Mathématiques - Exercices » de Jean-Louis Frot aux éditions Clovis :



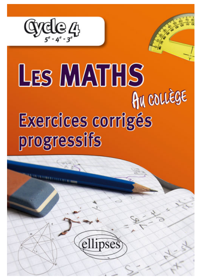
   Recueil d'environs 250 exercices donnés au collège Henri IV à Paris, il est de fait une référence. La moitié des exercices sont corrigés et aucun d'entre eux n'est trivial. Tous les exercices méritent réflexion et/ou présentent une difficulté technique à surmonter. Travailler dans cet ouvrage représente donc une excellente révision avant l'entrée en classe de Seconde.

2. « Les mathématiques au collège : démontrer pour comprendre - Cycle 4 » d'Alexandre Casamayou-Boucau aux éditions Ellipses :



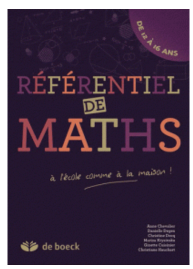
Ce livre est idéal pour asseoir les notions traitées au collège. Le cours présenté ne respecte fort heureusement plus les programmes vides actuellement en vigueur. Rigoureux et exigeant, il n'en demeure pas moins accessible. Un ouvrage à posséder absolument et à étudier des heures durant avant l'entrée en classe de Seconde.

3. « Les mathématiques au collège : exercices progressifs - Cycle 4 » d'Alexandre Casamayou-Boucau aux éditions Ellipses :



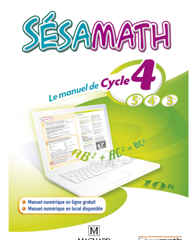
Il s'agit du petit frère du précédent. Centré sur les exercices, il permettra à tout élève de se remettre à flots avant d'entamer le cours de Seconde. Les exercices présents sont nombreux et variés et donnent la primeur à la répétition sans laquelle aucun progrès n'est envisageable.

4. « Référentiel de maths - A l'école comme à la maison - De 12 à 16 ans » d'Anne Chevalier aux éditions De Boeck :



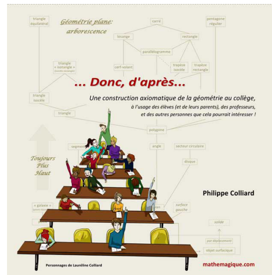
Un ouvrage d'une qualité rare brossant le programme du collège et un peu plus. Chaque définition, proposition ou théorème est amené avec soin et rigueur. Chaque résultat y est présenté à l'aide d'une démonstration clairement rédigée faisant intervenir uniquement des notions déjà rencontrées dans les pages antérieures.

5. « Manuel Sésamath Cycle 4 » du collectif Sésamath :



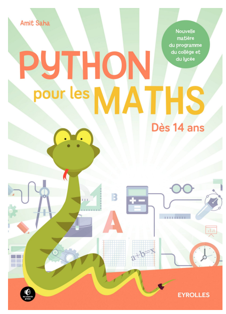
Œuvre d'un collectif de professeurs en exercice, c'est l'un des rares manuels de qualité dans le monde traditionnel de l'édition (Hachette, Nathan, Bordas, etc.). Testé et approuvé par des milliers d'élèves et de professeurs chaque année, ce dernier a clairement fait ses preuves. Deux atouts lui sont indéniables : la version numérique est gratuite (téléchargeable sur le site de Sésamath) et la quantité d'exercices.

6. « Donc, d'après. Une construction axiomatique de la géométrie au collège » de Philippe Collard aux éditions Mathémagique.com :



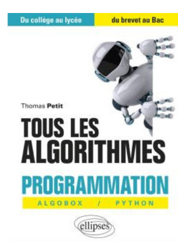
Nominé au prix Tangente en 2014, cet ouvrage est aujourd'hui une référence en terme de manuel de géométrie au collège. Partant de définitions précises, l'auteur prend le lecteur par la main, démontrant propriété après propriété avec une rare clarté pour l'amener sur les cimes, contempler les plus beaux des résultats de la géométrie euclidienne.

7. « Python pour les maths dès 14 ans » d'Amit Saha aux éditions Eyrolles :



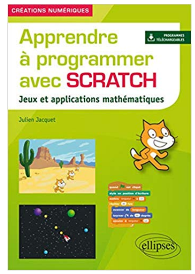
Python s'est petit à petit imposé dans le monde de l'éducation, son ergonomie et sa polyvalence n'y sont pas étrangères. Des ouvrages de qualité fluctuantes ont été alors publiés... Celui-ci est pourvu d'une double ambition : résoudre des problèmes mathématiques grâce à la programmation. Progressif et détaillé, il saura former tout collégien patient et consciencieux qui le lira devant son ordinateur.

8. « Tous les algorithmes - Programmation Algobox / Python » de Thomas Petit aux éditions Ellipses :



Simple recueil d'algorithmes rédigés en Algobox et/ou Python, cet ouvrage pourrait paraître fade puisqu'il ne propose ni cours, ni exercices permettant d'apprendre à écrire un algorithme ou un programme. Cependant, il a le mérite de rassembler les algorithmes qu'il faut avoir vu au moins une fois dans sa vie de collégien et qu'il serait bon de connaître par cœur ! C'est en ce sens qu'il est tout de même un ouvrage de référence.

9. « Apprendre à programmer avec Scratch - Jeux et applications mathématiques » de Julien Jacquet aux éditions Ellipses :



Ce livre a pour objectif d'initier de manière ludique le lecteur à la programmation informatique. Aucune connaissance préalable n'est nécessaire. Les chapitres s'enchaînent de manière progressive et permettent d'apprendre les notions de base de la programmation informatique et de créer des algorithmes simples utilisant des notions de mathématiques.

10. « Algorithmique et programmation au collège » de Xavier Chanet aux éditions Ellipses :

Ce livre s'adresse en premier lieu aux élèves des classes de collège. Il constitue un véritable outil d'accompagnement permettant à chacun, quel que soit son niveau, de maîtriser toutes les connaissances et compétences attendues.

11. « Travaux pratiques d'algorithmique et de programmation au collège » de Xavier Chanet aux éditions Ellipses :

Ce livre s'adresse en premier lieu aux élèves des classes de collège. On y trouve en premier lieu quinze travaux pratiques entièrement corrigés et dont chacun a pour objectif la résolution d'un problème, l'édition d'une application ou la création d'un jeu.

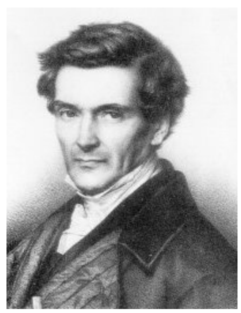
Plus généralement, je vous invite à visiter mon site internet (www.mathieu-kieffer.com) rassemblant de nombreuses ressources permettant d'apprendre les mathématiques et de se passionner pour elles. Enfin, puisque rien ne peut se substituer à la relation professeur-élève, j'invite chacun de mes élèves à me demander de l'aide, à en savoir davantage, en un mot, à être éclairé, il n'en sera que plus heureux...

« Il n'y a de progrès, pour nul écolier au monde, ni en ce qu'il entend, ni en ce qu'il voit, mais seulement en ce qu'il fait. »

Émile-Auguste Chartier dit « Alain »

Chapitre 1

A la règle et au compas



Pierre-Laurent Wantzel

(Paris 1 814 - Paris 1 848)

1.1 Médiatrice d'un segment

Problème. On souhaite tracer la médiatrice d'un segment $[AB]$.

Affirmation. On prend une ouverture de compas suffisamment grande (i.e. supérieur à la moitié de la longueur AB) et l'on trace un premier cercle de centre A et un second cercle de centre B et de même rayon. On appelle M et N les deux points d'intersection des deux cercles. $AMBN$ a ses quatre côtés égaux, par définition, c'est donc un losange. Par propriété, ses diagonales sont perpendiculaires et sécantes en leur milieu. Ainsi, (MN) est la médiatrice de $[AB]$.

Remarque. Cette construction permet aussi de construire le milieu d'un segment $[AB]$.

1.2 Perpendiculaire à une droite

Problème. On souhaite tracer la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point de cette droite.

Affirmation. Soit d une droite. Soit O un point de d. On trace un cercle de centre O et de rayon non nul. Il coupe d en deux points A et B, équidistants de O. Avec une ouverture de compas suffisante (i.e. supérieure à la moitié de la longueur AB), on trace ensuite deux arcs de cercle de même rayon centrés en A et B. Ces deux arcs se coupent en un point M, équidistant de A et B. Ainsi, (OM) est la médiatrice de $[AB]$ et en particulier : $(OM) \perp d$.

Problème. On souhaite tracer la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point extérieur à cette droite.

Affirmation. Soit d une droite. Soit O un point extérieur à d. On trace un cercle de centre O et de rayon suffisamment grand (i.e. supérieur à la distance séparant O de d). Il coupe d en deux points A et B, équidistants de O. En conservant la même ouverture de compas, on trace deux arcs de centres A et B. Ces deux arcs se coupent en M (et en O). Le quadrilatère $OAMB$ a ses quatre côtés égaux : par définition, c'est un losange. Par propriété, $(OM) \perp d$.

Remarque. Cette construction permet aussi de construire le projeté orthogonal de O sur la droite d.

1.3 Bissectrice d'un angle

Problème. On souhaite tracer la bissectrice d'un angle donné.

Affirmation. Soit $\widehat{xOy}$ un angle. On trace un arc de cercle de centre O et de rayon non nul. Il coupe les côtés $[Ox)$ et $[Oy)$ de l'angle $\widehat{xOy}$ en deux points A et B. Le triangle AOB est alors isocèle en O. On trace ensuite deux cercles de même rayon et de centres A et B. Ils se coupent en un point M, équidistant de A et B. (OM) est alors la médiatrice de $[AB]$. Le triangle AOB étant isocèle, cette médiatrice est aussi bissectrice de $\widehat{AOB}$.

1.4 Dupliquer un angle

Problème. On souhaite construire un angle égal à un angle donné.

Affirmation. Soit $\widehat{xOy}$ un angle. Soit $[O'x')$ une demi-droite. On trace un arc de cercle de centre O et de rayon non nul. Il coupe les côtés $[Ox)$ et $[Oy)$ de l'angle $\widehat{xOy}$ en deux points A et B. Le triangle AOB est alors isocèle en O. On trace ensuite un arc de cercle de centre O' et de même rayon. Il coupe $[O'x')$ en un point A'. Enfin, on reporte la longueur de la corde $[AB]$ en A : on obtient le point B'. D'après le troisième cas d'égalité de triangles, les triangles OAB et $O'A'B'$ sont égaux. En particulier, $\widehat{xOy} = \widehat{x'Oy'}$.

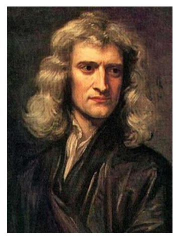
1.5 Parallèle à une droite

Problème. On souhaite tracer la parallèle à une droite donnée passant par un point donné.

Affirmation. Soit d une droite. Soit O un point extérieur à d (sinon, il n'y a rien à tracer). On choisit deux points distincts A et B de la droite d. On construit alors le parallélogramme $BAOC$. Pour cela, on trace un arc de cercle de centre O et de rayon AB et un arc de cercle de centre B et de rayon AO. Ces deux arcs de cercle se coupent en C, quatrième sommet du parallélogramme. Alors, par définition, $(OC) \sslash (AB)$.

Chapitre 2

Durées, vitesses, débits



Isaac Newton

(Woolsthorpe 1 642 - Kensington 1 727 avt J.-C.)

2.1 Durée

Définition 1. On appelle durée d'un événement l'intervalle de temps qui s'écoule entre le début et la fin de cet événement.

Remarque. La perception de la durée par un individu est subjective : suivant que l'on fait une activité qui nous intéresse ou qui nous ennuie, on a le sentiment que le temps s'écoule plus ou moins rapidement. C'est pourquoi l'homme a cherché des moyens de mesurer les laps de temps. Pour les durées « longues », on a utilisé depuis longtemps le cycle des jours et des nuits, le cycle de la lune, les mouvements des astres dans le ciel. Pour les durées « courtes », on a mis utilisé des cadrans solaires, des sabliers, puis on a mis au point des horloges, des montres, des chronomètres...

Définition 2. Un cadran solaire est un instrument immobile qui indique le temps solaire par le déplacement de l'ombre d'un objet de forme variable, le gnomon, sur un surface, la table du cadran.

1. A l'instant où l'ombre est la plus courte, on dit que le soleil passe au méridien du lieu d'observation : il est midi vrai.
2. On appelle jour solaire vrai la durée qui sépare deux midis vrais consécutifs.
3. On appelle jour solaire moyen la moyenne des durées d'un jour solaire sur une année.

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. En effet, la durée d'un jour solaire vrai varie légèrement au cours de l'année, il dépend des saisons.
2. Les horloges sont réglées sur ce jour solaire moyen.

Définition 3. Voici trois définitions :

1. On appelle heure la durée d'un jour solaire moyen divisée par 24.
2. On appelle minute la durée d'une heure divisée par 60.
3. On appelle seconde la durée d'une minute divisée par 60.

Remarque. La seconde a plus tard été redéfinie deux fois : la première en 1 956 à partir de la période de révolution de la Terre autour du Soleil, puis de nouveau en 1 967 à partir de la période de l'onde émise par un atome de césium.

Exercice. Combien y a-t-il de seconde dans un jour solaire moyen ?

2.2 Mouvement uniforme

Définition 4. On appelle mobile tout être ou tout objet qui se déplace par rapport à un objet de référence appelé référentiel.

Exemple. Sur mon vélo, je suis en mouvement par rapport à la route mais à l'arrêt par rapport au vélo. La notion de mouvement est donc relative.

Définition 5. On dit qu'on mobile est animé d'un mouvement uniforme lorsqu'il parcourt des distances égales pendant des durées égales.

Exemple. Lorsque je suis assis dans un train, si je vois défiler un pylône toutes les secondes et que les pylônes sont régulièrement espacés le long de la voie, alors le train est animé d'un mouvement uniforme.

Définition 6. On appelle vitesse d'un mobile animé d'un mouvement uniforme la distance parcourue pendant l'unité de temps. Plus formellement, si l'on note v la vitesse, d la distance et t la durée, on a :

$$v = \frac{d}{t}$$

Remarque. On peut exprimer une vitesse en mètres par seconde (m/s), en kilomètres par heure (km/h), etc.

Exercice. Considérons un mobile animé d'un mouvement uniforme. On mesure qu'il parcourt $10,8\,\text{m}$ en $3\,\text{s}$.

1. Quelle est la distance parcourue en une seconde ?
2. Compléter le tableau suivant :

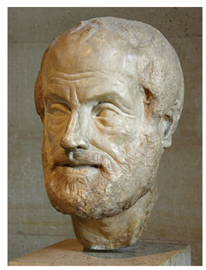
Distance (en m)			$10,8$			
Durée (en s)	1	2	3	4	$7,5$	9

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Les nombres du tableau précédent forment deux suites de nombres proportionnels.
2. La vitesse d'un piéton qui marche à allure normale est de $1\,\text{m/s}$.
3. La vitesse d'un T.G.V. qui roule sur une ligne « grande vitesse » est de $300\,\text{km/h}$.
4. La vitesse de croisière d'un Airbus A320 est de $1\,000\,\text{km/h}$.
5. La vitesse de la lumière dans l'air est de $300\,000\,\text{km/s}$ et celle du son est de $340\,\text{m/s}$.
6. Dans la vie courante, beaucoup de mobiles sont animés d'un mouvement qui n'est pas uniforme : lorsqu'on effectue un trajet entre Paris et Épinal, on parcourt moins de distance lorsqu'on circule en zones urbaines que lorsqu'on se trouve sur l'autoroute. On peut cependant définir la vitesse moyenne de la voiture sur l'ensemble du parcours.

Chapitre 3

Droite des milieux dans un triangle



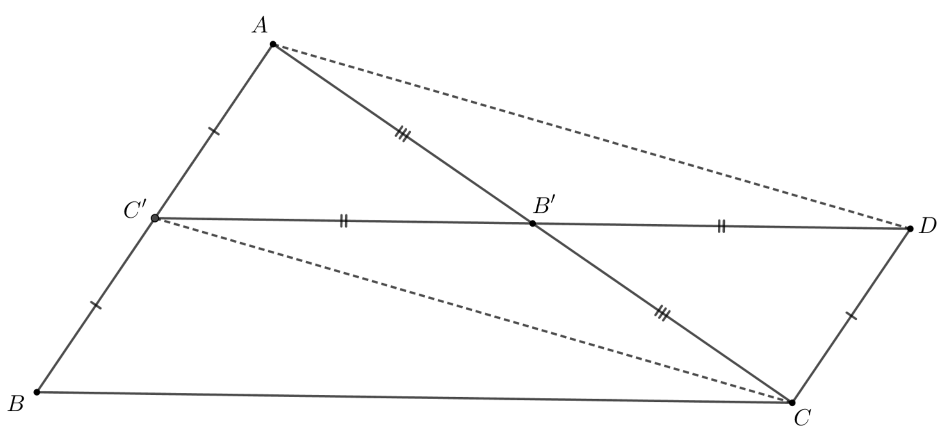
Thalès de Milet

(Milet 625 avt J.-C. - Milet 546 avt J.-C.)

3.1 Théorème

Théorème 7. *Si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle, alors il est parallèle au troisième côté et sa longueur est égale à la moitié de la longueur de ce troisième côté.*

Démonstration. Soit ABC un triangle. Soient B' et C' les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$. Démontrons que $(B'C') /\!/ (BC)$ et $B'C' = \frac{1}{2}BC$.



Pour cela, prolongeons le segment $[C'B']$ d'une longueur $C'B' = B'D$. Alors, par construction, les diagonales du quadrilatère $ADCC'$ sont sécantes en leur milieu. Par propriété, $ADCC'$ est donc un parallélogramme. Ainsi,

$CD = C'A = BC'$ et $(CD) \mathbin{/\!/} (BA)$. Le quadrilatère $BC'DC$ a donc ses côtés $[CD]$ et $[BC']$ égaux et parallèles. Donc, par propriété, c'est un parallélogramme. Par conséquent, $(C'D) \mathbin{/\!/} (BC)$, c'est-à-dire $(C'B') \mathbin{/\!/} BC)$. Par construction, B' est le milieu de $[C'D]$ donc $C'B' = \frac{1}{2}C'D$. Or $BC'DC$ est un parallélogramme. Donc $C'D = BC$. Ainsi, $C'B' = \frac{1}{2}CB$.

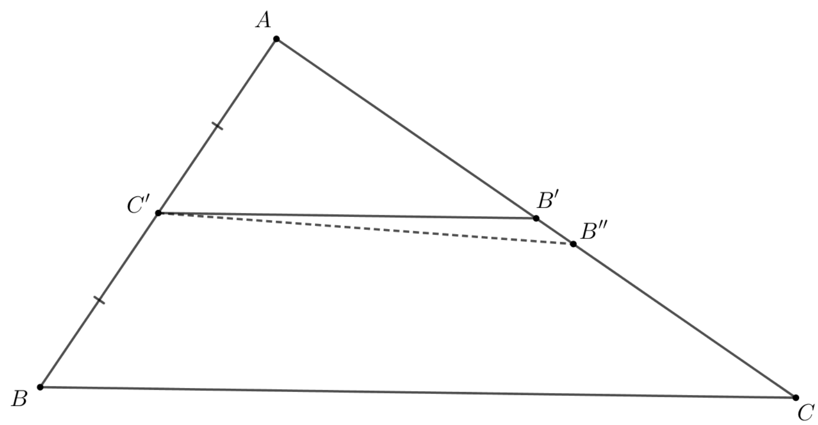
□

Remarque. Ce théorème est un cas particulier du théorème de Thalès que l'on étudiera en classe de Troisième.

3.2 Réciproque

Théorème 8. *Si, par un milieu d'un coté d'un triangle, on mène la parallèle à un deuxième côté, alors celle-ci passe aussi par le milieu du troisième côté. Aussi, en tant que droite des milieux, le segment découpé est égal à la moitié du troisième côté.*

Démonstration. Soit ABC un triangle. Soit C' le milieu du segment $[AB]$.



On mène par C' la parallèle à (BC). Elle coupe le côté $[AC]$ en B'. Soit B'' le milieu de $[AC]$. D'après le théorème précédent, $(C'B'') \mathbin{/\!/} (BC)$. Or, de C' on ne peut mener qu'une seule parallèle à (BC), donc B' et B'' sont confondus. Ainsi, B' est le milieu de $[AC]$.

□

Remarque. Le théorème 7 est à l'origine d'une technique d'arpentage :
On cherche à mesurer un segment joignant deux points A et B séparés par un obstacle du terrain (un cours d'eau par exemple). On se place en un point M situé en retrait ; on mesure les segments $[MA]$ et $[MB]$. Puis on prend les milieux A' et B' respectifs de ces segments et on mesure $[A'B']$. Alors $(A'B')$ est la droite des milieux du triangle MAB, et donc $AB = 2 \times A'B'$ d'après le théorème 7.

Chapitre 4

Cercle circonscrit à un triangle rectangle

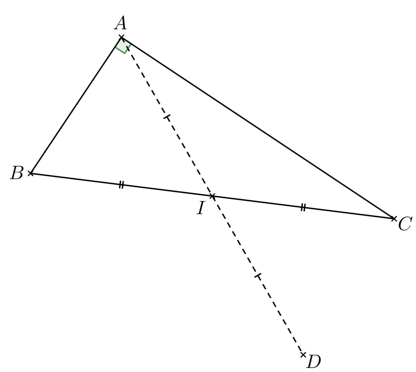
Euclide

(Grèce - 300 avt J.-C.)

4.1 Caractérisation du triangle rectangle

Proposition 9. *Si un triangle est rectangle, alors la médiane issue du sommet de l'angle droit est égale à la moitié de l'hypoténuse.*

Démonstration. Soit ABC un triangle rectangle en A. Soit I le milieu de son hypoténuse. Soit D le symétrique de A par rapport à I.



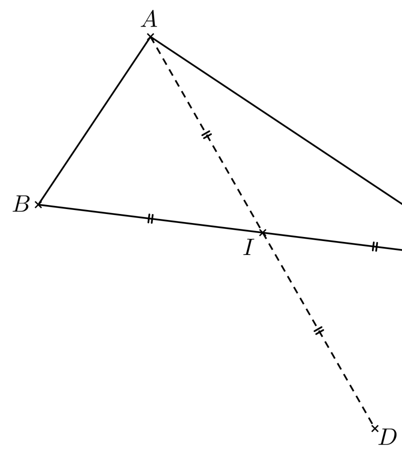
$ABDC$ est un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu donc, par propriété, c'est un parallélogramme. De plus, l'angle $\widehat{BAC}$ est droit, ainsi $ABDC$ est un rectangle. Or, dans un rectangle, les diagonales ont la même longueur. D'où : $AD = BC$ et par suite : $AI = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$.

□

Remarque. La réciproque est vraie elle aussi.

Proposition 10. *Si, dans un triangle, une médiane est égale à la moitié du côté correspondant, alors ce triangle est rectangle.*

Démonstration. Soit ABC un triangle. Soit I le milieu de $[BC]$. Supposons que $AI = \frac{1}{2}BC$. Soit D le symétrique de A par rapport à I.

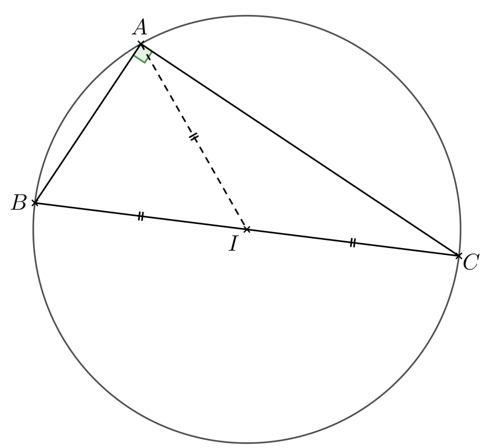


$ABCD$ est un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu donc, par propriété, c'est un parallélogramme. Or $AD = 2AI = 2 \times \frac{1}{2}BC = BC$. $ABCD$ est donc un parallélogramme dont les diagonales sont égales, et donc c'est un rectangle. Par suite, l'angle $\widehat{BAC}$ est droit et le triangle ABC est rectangle en A. □

4.2 Cercle circonscrit

Proposition 11. *Le cercle ayant pour diamètre l'hypoténuse d'un triangle rectangle passe par le sommet de l'angle droit. Ce cercle est le cercle circonscrit au triangle rectangle.*

Démonstration. Soit ABC un triangle rectangle en A. Soit I le milieu de l'hypoténuse $[BC]$.



D'après la proposition 9, on a : $IA = \frac{1}{2}BC = IB = IC$. Donc, par définition, le cercle de diamètre $[BC]$ passe par A.

□

Remarque. La réciproque est vraie elle aussi.

Proposition 12. *Lorsque l'on joint un point d'un cercle aux extrémités de l'un de ses diamètres, on obtient un angle droit.*

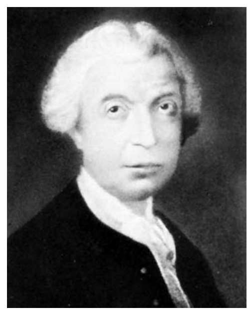
Démonstration. Soit $[BC]$ un segment. Soit I son milieu. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[BC]$. Soit A un point de $\mathscr{C}$. Alors : $IA = IB = \frac{1}{2}BC$. Donc la médiane $[AI]$ a pour la longueur la moitié de celle de $[BC]$. Donc le triangle ABC est rectangle en A d'après la proposition 10. $\square$

Corollaire 13. *Le cercle de diamètre $[BC]$ est l'ensemble des points A du plan tels que l'angle $\widehat{BAC}$ soit droit.*

Démonstration. $\subset$: soit A un point du cercle de diamètre $[BC]$. D'après la proposition 12, l'angle $\widehat{BAC}$ est droit.
$\supset$: soit A un point du plan tel que $\widehat{BAC}$ soit droit. D'après la proposition 11, A appartient au cercle de diamètre $[BC]$. $\square$

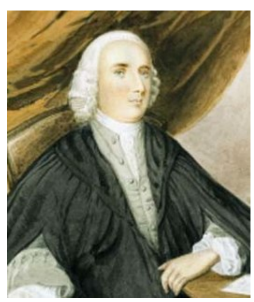
Chapitre 5

Droites concourantes dans un triangle



Giovanni Ceva

(Milan 1 647 - Mantoue 1 734)



Matthew Stewart

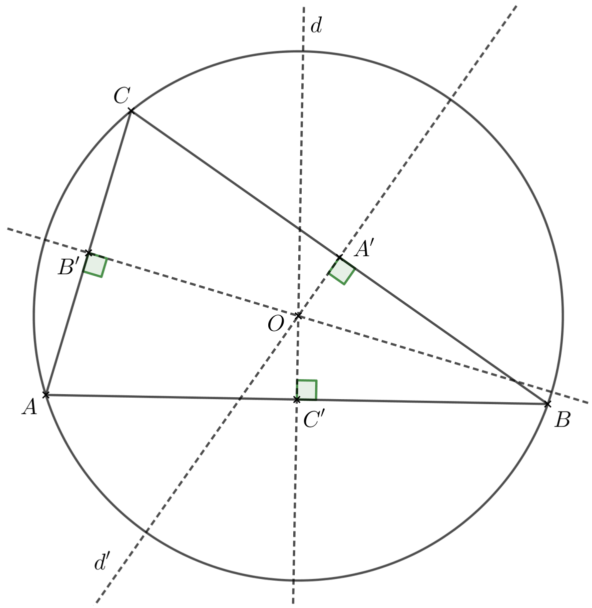
(Rothesay 1 717 - Catrine 1 785)

5.1 Médiatrices d'un triangle

Théorème 14. *Les trois médiatrices d'un triangle (non plat) sont concourantes. Le point de concours est équidistant des trois sommets et est donc le centre du cercle circonscrit au triangle.*

Démonstration. Soit ABC un triangle non plat. Soient A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et

$[AB]$. Soient d la médiatrice de $[AB]$ et d' celle de $[BC]$. Soit O le point d'intersection de d et d'.

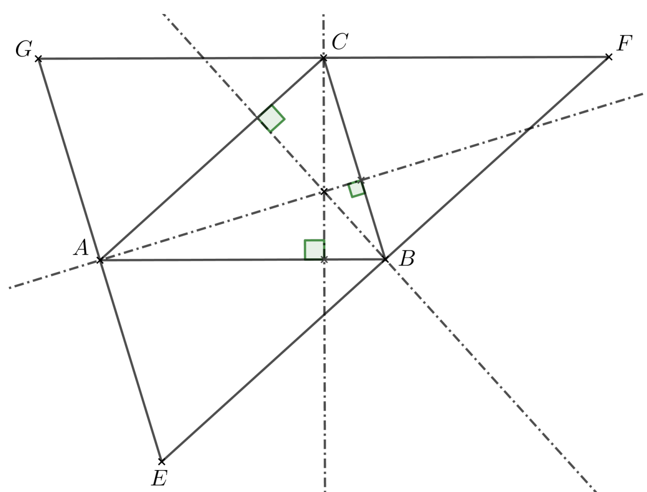


Par propriété, on a : $\begin{cases} OA = OB \\ OB = OC \end{cases}$. Donc, par transitivité de l'égalité, $OA = OC$. Ainsi, par propriété, O appartient à la médiatrice de $[AC]$. Par conséquent, les trois médiatrices sont concourantes en O. □

5.2 Hauteurs d'un triangle

Théorème 15. *Les trois hauteurs d'un triangle (non plat) sont concourantes en un point appelé l'orthocentre du triangle.*

Démonstration. Soit ABC un triangle non plat. On mène par chacun des sommets la droite parallèle au côté opposé. On construit ainsi un triangle EFG comme représenté ci-dessous :



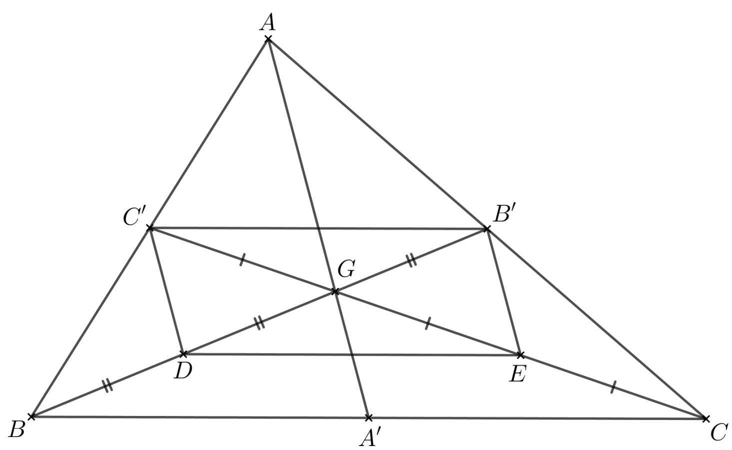
$\begin{cases} (AB) \parallel (FC) \\ (AC) \parallel (BF) \end{cases}$ donc, par définition, $ABFC$ est un parallélogramme. D'où, par propriété, $AB = FC$. De même, $ABCG$ est un parallélogramme et l'on a $AB = GC$. Ainsi, $FC = GC$. Par suite, C est le milieu de

$[GF]$. Or la hauteur issue de C dans le triangle ABC est perpendiculaire au côté $[AB]$, et $(AB) \mathbin{/\!/} (GF)$. Donc la hauteur issue de C dans le triangle ABC est perpendiculaire à (GF) en son milieu C. Autrement dit, la hauteur issue de C dans le triangle ABC n'est rien d'autre que la médiatrice de $[FG]$ dans le triangle EFG. De la même, la hauteur issue de A dans le triangle ABC est la médiatrice de $[FG]$ et la hauteur issue de B dans le triangle ABC est la médiatrice de $[FE]$. Les hauteurs du triangle ABC sont donc les médiatrices du triangle EFG. D'après le théorème 14, elles sont donc concourantes. □

5.3 Médianes d'un triangle

Théorème 16. *Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé le centre de gravité du triangle. Ce point est situé sur chaque médiane, aux deux tiers à partir du sommet.*

Démonstration. Soit ABC un triangle. Soient A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Soit G le point d'intersection des médianes $[BB']$ et $[CC']$. Soit D le milieu de $[BG]$. Soit E le milieu de $[CG]$.

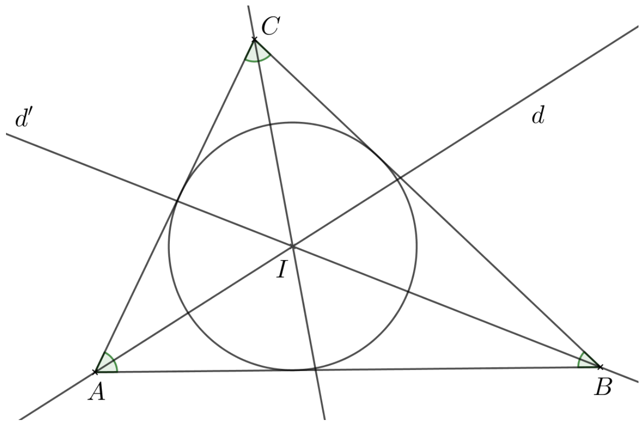


On a alors :
$(B'C')$ est une droite des milieux dans le triangle ABC, donc $(B'C') \mathbin{/\!/} (BC)$ et $B'C' = \frac{1}{2}BC$.
De même, (DE) est une droite des milieux dans le triangle GBC, donc $(DE) \mathbin{/\!/} (BC)$ et $DE = \frac{1}{2}BC$.
Ainsi, $(DE) \mathbin{/\!/} (B'C')$ et $DE = B'C'$. Par conséquent, le quadrilatère $DEB'C'$ est un parallélogramme. Par propriété, ses diagonales sont donc sécantes en leur milieu. D'où $C'G = GE$. Or $GE = EC$. Donc $C'G = GE = EC$. D'autre part, $B'G = GD$. Or $GD = DB$. Donc $B'G = GD = DB$. Ainsi, $B'G = \frac{1}{3}BB'$ et la médiane $[BB']$ est coupée par la médiane $[CC']$ au tiers de sa longueur à partir de la base. De même, en considérant les médianes $[BB']$ et $[AA']$, la médiane $[BB']$ est coupée par $[AA']$ au tiers de sa longueur à partir de la base, c'est-à-dire au même point. Les trois médianes sont donc concourantes. □

5.4 Bissectrices intérieures d'un triangle

Théorème 17. *Les trois bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes. Le point de concours est équidistant des trois côtés du triangle et est donc le centre du cercle inscrit au triangle.*

Démonstration. Soit ABC un triangle. Soit d la bissectrice intérieure relative à l'angle $\widehat{BAC}$. Soit d' la bissectrice intérieure relative à l'angle $\widehat{ABC}$. Soit I le point d'intersection de d et d' (pourquoi sommes-nous certain qu'un tel point existe ?).

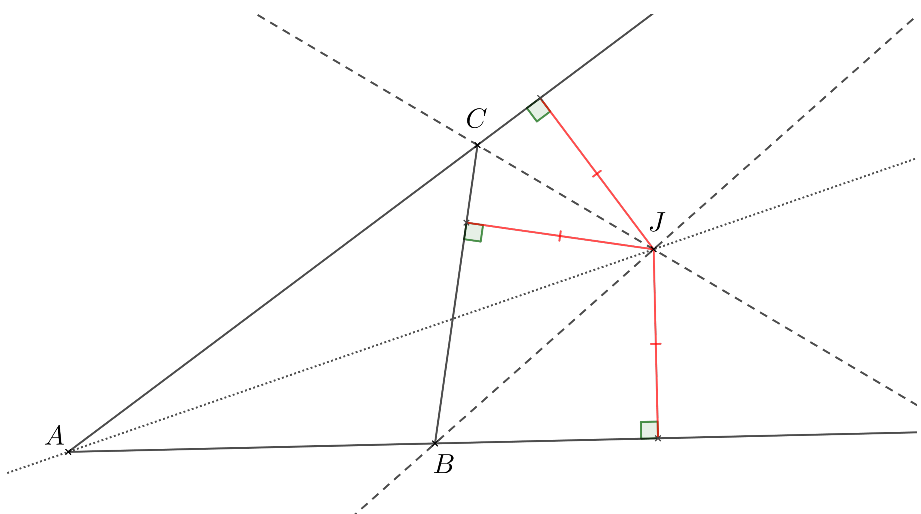


$I \in d$, donc I est équidistant de (AB) et (AC). $I \in d'$, donc I est équidistant de (BA) et (BC). Ainsi, I est équidistant de (AC) et (BC). Par propriété, I appartient donc à la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ACB}$. Finalement, les trois bissectrices intérieures sont concourantes en I. □

5.5 Bissectrices extérieures d'un triangle

Théorème 18. *Les bissectrices extérieures de deux angles d'un triangle et la bissectrice intérieure du troisième angle sont concourantes.*

Démonstration. Soit ABC un triangle. Soit J le point d'intersection des bissectrices extérieures aux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.



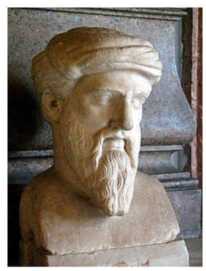
Alors J est équidistant de (AB) et (BC) et équidistant de (AC) et (BC). Par conséquent, J est équidistant de (AB) et (AC). Par propriété, J appartient donc à la bissectrice intérieure de la l'angle $\widehat{BAC}$. □

Définition 19. Avec les notation précédentes, J est appelé le centre du cercle exinscrit de l'angle $\widehat{BAC}$ du triangle ABC.

Remarque. Un triangle possède donc trois cercles exinscrits.

Chapitre 6

Théorème de Pythagore



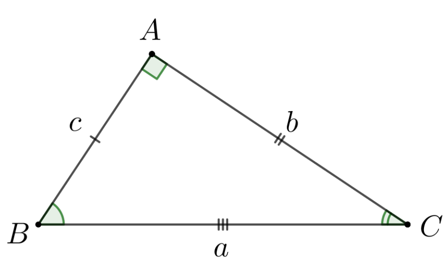
Pythagore

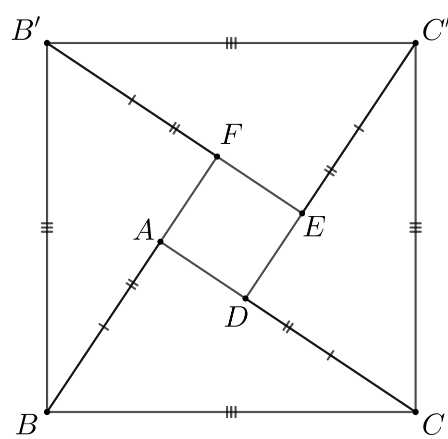
(Samos 580 avt J.-C. - Métaponte 495 avt J.-C.)

6.1 Théorème de Pythagore

Théorème 20. *(Théorème de Pythagore) Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés (appelés cathètes).*

Démonstration. (Due à Bhaskara [1]) Soit ABC un triangle rectangle en A. On pose $a \coloneqq BC$, $b \coloneqq AC$ et $c \coloneqq AB$. On place quatre triangles égaux à ABC comme indiqué sur la figure ci-dessous :





1. Bhaskara est un mathématicien indien du $XII^{ème}$ siècle après J.-C.

1. Démontrons que $BCC'B'$ est un carré.
2. Démontrons que $ADEF$ est un carré.
3. Concluons en raisonnant sur les aires.

□

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Il existe d'innombrables démonstrations différentes du théorème de Pythagore. Une est même l'œuvre de l'ancien président des États-Unis, James Abraham Garfield [2].
2. Il permet de calculer la longueur d'un des côtés si l'on connaît celle des deux autres.
3. Il permet de démontrer qu'un triangle dont on connaît les longueurs n'est pas rectangle. En effet, la contraposée du théorème de Pythagore affirme : « Si l'égalité de Pythagore est fausse, alors le triangle n'est pas rectangle. », en effet s'il l'était, alors l'égalité serait vraie.
4. Il se généralise aux triangles scalènes via le théorème d'Al-Kashi [3] que l'on rencontre au lycée.

6.2 Réciproque du théorème de Pythagore

Théorème 21. *(Réciproque du théorème de Pythagore) Si dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.*

Démonstration. Soit ABC un triangle tel que $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Construisons un triangle $A'B'C'$ rectangle en A' tel que $A'B' = AB$ et $A'C' = AC$. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} B'C'^2 &= A'B'^2 + A'C'^2 \\ &= AB^2 + AC^2 \\ &= BC^2 \end{aligned}$$

Donc, puisque BC et $B'C'$ sont des longueurs, $BC = B'C'$. D'après les cas d'égalité de triangles, on en déduit que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux. En particulier, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} = 90°$. Ainsi, par définition, ABC est rectangle en A.

□

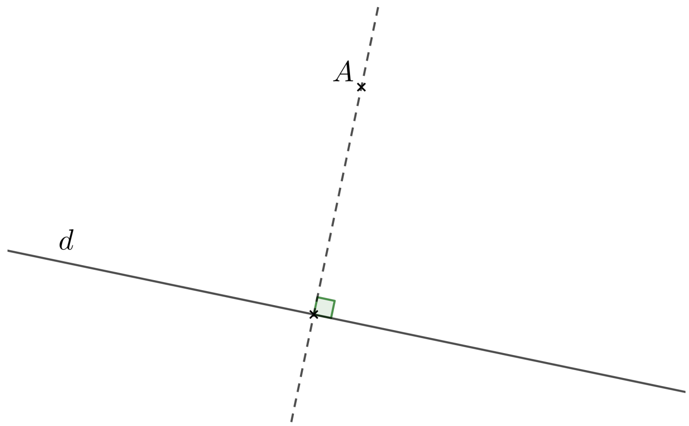
Remarque. La réciproque du théorème de Pythagore ne doit pas être confondue avec la contraposée du théorème de Pythagore. La réciproque affirme : « Si l'égalité de Pythagore est vraie, alors le triangle est rectangle. ».

6.3 Distance d'un point à une droite

Définition 22. Soient A un point et d une droite du plan. On appelle distance du point A à la droite d la plus courte distance de A à un point de d.

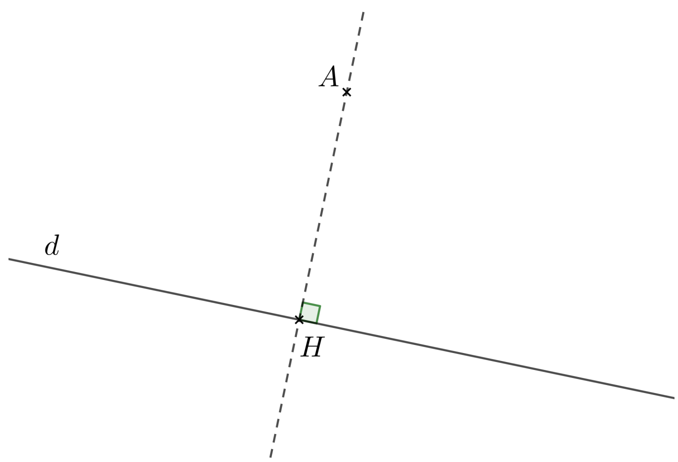
Illustration :

2. James Abraham Garfield est né en 1 831 et est assassiné en 1 881.
3. Al-Kashi est un mathématicien perse né en 1 380 à Kashan et mort en 1 429 à Samarcande.



Définition 23. Soient A un point et d une droite du plan. On appelle projeté orthogonal de A sur d le pied de la droite perpendiculaire à d passant par A.

Illustration :



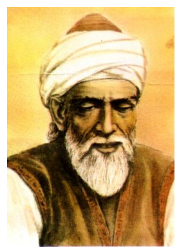
Proposition 24. *Soient A un point et d une droite du plan. La distance de A à d est la distance de A à son projeté orthogonal sur d.*

Démonstration. Soit H le projeté orthogonal de A sur d. Soit M un point de d. Le triangle AHM est rectangle en H par définition du projeté orthogonal. Alors, d'après le théorème de Pythagore, on a : $AM^2 = AH^2 + HM^2$. Or $HM^2 \geqslant 0$, donc $AM^2 \geqslant AH^2$. Et comme AM et AH sont des longueurs, $AM \geqslant AH$. Ainsi, AH minimise la distance AM lorsque M parcourt d. $\square$

Remarque. Ce résultat se généralise aisément dans l'espace avec la distance d'un point à un plan de l'espace.

Chapitre 7

Nombres relatifs - Multiplication et division



Abu Al-Wafa

(Buzjan 940 - Bagdad 988)

7.1 Produit de deux nombres relatifs

L'idée est d'étendre la multiplication aux nombres relatifs de telle façon que la multiplication des nombres relatifs conserve les mêmes propriétés que la multiplication des nombres entiers naturels. Par exemple, on voudrait, de manière naturelle, que la multiplication des nombres entiers relatifs soit également distributive par rapport à l'addition. Concrètement, comment définir le produit d'un nombre entier positif par un nombre entier négatif, par exemple $(+3) \times (-4)$? Pour que la multiplication des nombres entiers relatifs soit distributive par rapport à l'addition, il est nécessaire de pouvoir écrire l'enchaînement suivant :

$$\begin{aligned}(-4) + (+4) &= 0\\ (+3) \times ((-4) + (+4)) &= (+3) \times 0\\ (+3) \times (-4) + (+3) \times (+4) &= 0\end{aligned}$$

Donc, par définition, $(+3) \times (-4)$ doit être l'opposé de $(+3) \times (+4)$. Autrement dit, $(+3) \times (-4) = -12$.

A présent, cherchons à définir le produit de deux entiers négatifs, par exemple $(-3) \times (-4)$. On a :

$$\begin{aligned}(-4) + (+4) &= 0\\ (-3) \times ((-4) + (+4)) &= (-3) \times 0\\ (+3) \times (-4) + (-3) \times (+4) &= 0\end{aligned}$$

Donc, par définition, $(-3) \times (-4)$ doit être l'opposé de $(-3) \times (+4)$. Autrement dit, $(-3) \times (-4) = 12$.

Remarque. On peut alors étendre ces remarques aux nombres relatifs non entiers et obtenir la proposition suivante :

Proposition 25. *Le produit de deux nombres relatifs est un nombre relatif dont la valeur absolue est le produit des valeurs absolues des deux facteurs. Son signe est positif si les deux nombres sont de même signe, et négatif si les deux nombres sont de signes opposés.*

Remarque. On pourra retenir la règle des signes suivante :

1. $+$ par $+$ donne $+$.
2. $-$ par $-$ donne $-$.
3. $+$ par $-$ donne $-$.
4. $-$ par $+$ donne $-$.

Proposition 26. *Soient a, b et c trois nombres relatifs. On a :*

1. $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ *(associativité de $\times$)*
2. $a \times b = b \times a$ *(commutativité de $\times$)*
3. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ *(distributivité de $\times$ par rapport à $+$)*
4. $1 \times a = a$ *(1 est élément neutre pour $\times$)*
5. $0 \times a = 0$ *(0 est absorbant)*

Démonstration. Admise. □

Remarque. Il existe une convention : dans une somme de produits, la multiplication est toujours prioritaire par rapport à l'addition.

Exemple. Calculons $(-3) \times (-4) + (+2) \times (-5) + (-1) \times (+3)$.

7.2 Quotient de deux nombres relatifs

Définition 27. Soient a et b deux nombres relatifs avec $b \neq 0$. On appelle quotient de a par b, noté $\frac{a}{b}$, le nombre x dont le produit par b est égal à a. Autrement, $\frac{a}{b}$ est l'unique solution de l'équation $x \times b = a$.

Exemple. $\frac{(+35)}{(+5)}$, $\frac{(-35)}{(+5)}$, $\frac{(-35)}{(-5)}$ et $\frac{(+35)}{(-5)}$.

Proposition 28. *Le quotient de deux nombres relatifs est un nombre relatif :*

1. *dont la valeur absolue est le quotient des valeurs absolues du dividende et du diviseur ;*
2. *dont le signe est $+$ si le dividende est le diviseur sont de même signe, $-$ s'ils sont de signe contraire.*

Démonstration. Découle de la proposition 25. □

Remarque. La division d'un nombre par 0 n'est pas définie. En effet, si l'on avait $\frac{a}{0} = x$, alors on aurait $0 \times x = a$ et donc $a = 0$. D'où une contradiction puisque a n'est pas nécessairement nul.

Proposition 29. *Soient a, b, c, d, e et f des nombres relatifs. On a :*

1. $\frac{a}{(+1)} = a$ *et* $\frac{a}{(-1)} = -a$
2. $a \div b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ *si* $b \neq 0$
3. $\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a \div c}{b \div c}$ *si b et c non nuls*
4. $\frac{a+b-c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d}$ *si* $d \neq 0$
5. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{a \times c \times e}{b \times d \times f}$ *si b, d et f non nuls*

Démonstration. Découle des résultats précédents. □

Exemple. Calculons $\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{5}{4}}$.

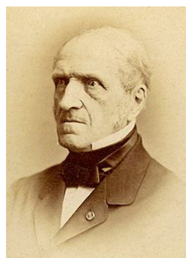
Remarque. Pour ajouter deux quotients, on les réduit au même dénominateur :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Exemple. Calculons $-\frac{3}{5} + \frac{7}{9}$.

Chapitre 8

Translation



Michel Chasles

(Epernon 1793 - Paris 1880)

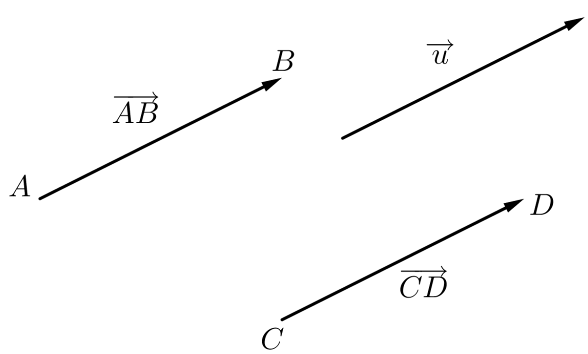
8.1 Vecteurs

Définition 30. Un couple de deux points distincts du plan est appelé bipoint. La donnée d'un bipoint $(A; B)$ détermine :

1. Une DIRECTION : la direction de la droite (AB) ;
2. Un SENS : de A vers B ;
3. Une LONGUEUR : la longueur du segment $[AB]$.

Lorsque les bipoints $(A; B)$, $(C; D)$, etc. ont même sens, même direction et même longueur, on dit que ces bipoints représentent le même vecteur. Le vecteur associé au bipoint $(A; B)$ est alors noté $\overrightarrow{AB}$.

Illustration :



Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ décrit la variation de position qui permet de passer de A à B. Il est caractérisé par la direction de la droite (AB), le sens de A vers B et la longueur du segment $[AB]$.
2. La longueur commune à tous les bipoints représentant un vecteur est appelé la norme de ce vecteur. La norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ se note $\|\overrightarrow{u}\|$ et celle du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

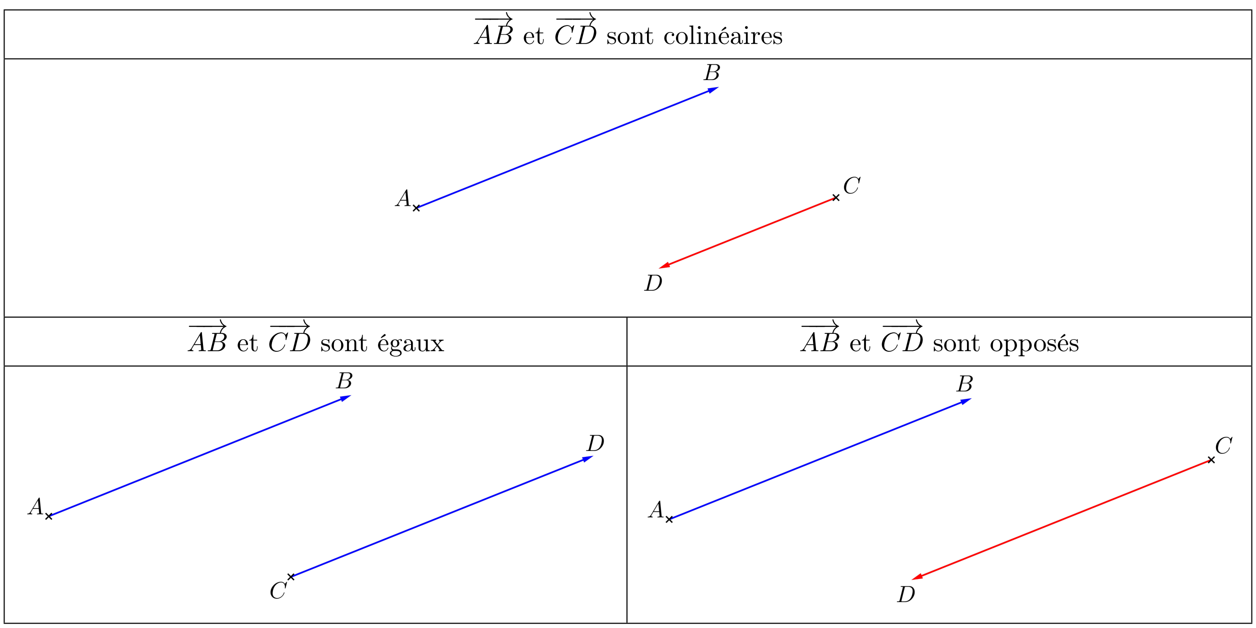
Définition 31. Soit $(A;B)$ un bipoint du plan représentant le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1. A est appelé l'origine du vecteur.
2. B est appelé l'extrémité du vecteur.
3. Si A et B sont confondus, alors le vecteur est dit nul et est noté $\overrightarrow{0}$. Sa norme vaut alors 0 et il n'a ni direction, ni sens.

Définition 32. Soient $(A;B)$ et $(C;D)$ deux bipoints du plan représentant respectivement les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme. On écrit alors : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits opposés s'ils ont même direction, sens contraires et même norme. On écrit alors : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$.
3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits colinéaires s'ils ont la même direction.

Illustration :



Remarque. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés. On a : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Proposition 33. *Soient A, B, C et D quatre points du plan non alignés trois à trois. $ABDC$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.*

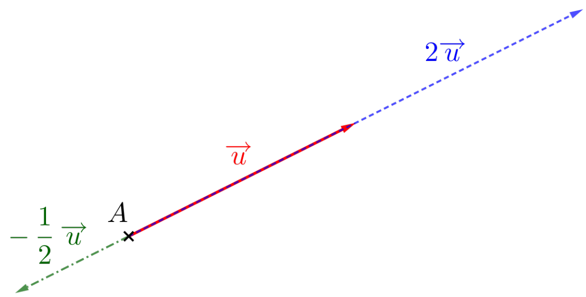
Démonstration. $\Rightarrow$: supposons que $ABDC$ soit un parallélogramme. Alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles par définition. De plus, par propriété, $AB = CD$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction, même sens et même norme. Par conséquent, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

$\Leftarrow$: supposons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles et $AB = CD$. Ainsi, par propriété, $ABDC$ est un parallélogramme. $\square$

Définition 34. Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur et k un nombre réel.

1. Si $k \neq 0$, alors on appelle produit du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le réel k le vecteur, noté $k\overrightarrow{u}$, de même direction que $\overrightarrow{u}$, de norme $|k| \times \|\overrightarrow{u}\|$, de même sens que $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$ et de sens contraire si $k < 0$.
2. Si $k = 0$, alors on définit le produit du vecteur $\overrightarrow{u}$ par zéro comme étant le vecteur nul : $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Illustration :

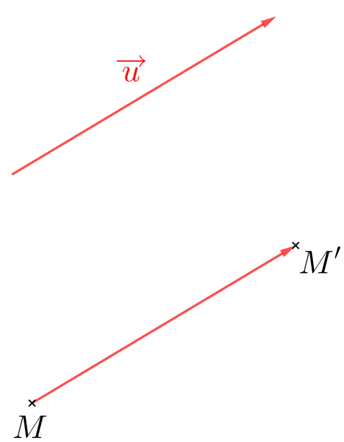


Remarque. Le vecteur $(-1)\overrightarrow{u}$ est l'opposé de $\overrightarrow{u}$: $(-1)\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$.

8.2 Translation

Définition 35. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. On appelle translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ la transformation du plan qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$. On dit alors que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. On écrit alors : $M' = t_{\overrightarrow{u}}(M)$.

Illustration :



Remarque. Pour construire l'image M' d'un point M par une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, on construire le quatrième sommet d'un parallélogramme ayant pour sommets M et les extrémités du bipoint $(A;B)$ représentant $\overrightarrow{u}$.

Chapitre 9

Expressions algébriques

Al-Khwarizmi

(Khiva 780 - Bagdad 850)

9.1 Réduction d'une expression algébrique

Définition 36. On appelle expression algébrique toute expression dans laquelle plusieurs nombres sont représentés par des lettres.

Exemple. $3 \times (x+2)$, $ab+5$ et $u(v+3)$ sont des expressions algébriques.

Définition 37. Réduire une expression algébrique consiste à effectuer toutes les additions et soustractions possibles présentes afin d'obtenir une expression plus « simple ».

Exemple. $5x - 2x = 3x$, $7 - 4x + 11 - x = 18 - 5x$ ou encore $5x^2 - 7x - 12x^2 + 9 = -7x^2 - 7x + 9$.

Proposition 38. *On a les règles de signes suivantes :*

1. *$+$ devant $+$ se remplace par $+$.*
2. *$-$ devant $-$ se remplace par $+$.*
3. *$+$ devant $-$ se remplace par $-$.*
4. *$-$ devant $+$ se remplace par $-$.*

Démonstration. Cela découle de la règle des signes démontrée en classe de Quatrième. □

Exemple. Réduisons l'expression algébrique : $(x+5) - (x-13)$.

9.2 Développement d'une expression algébrique

Définition 39. Il existe deux distributivités de la multiplication par rapport à l'addition : la simple et la double. Soient a, b, c et d quatre nombres réels. On a :

1. *Simple distributivité* : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c = ab + ac$
2. *Double distributivité* : $(a+b) \times (c+d) = (a+b)(c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d = ac + ad + bc + bd$

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. Ces deux distributivités de $\times$ par rapport à $+$ peuvent se représenter géométriquement.
2. Elles se généralisent aisément :
   (a) $a \times (b + c + d) = ab + ac + ad$. Démonstration.
   (b) $(a + b) \times (c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$. Démonstration.

Définition 40. Développer un produit consiste à transformer ce produit en une (ou plusieurs) somme(s) à l'aide de la distributivité de $\times$ par rapport à $+$.

Exemple. En voici deux :

1. $7(a + 3) = 7 \times a + 7 \times 3 = 7a + 21$.
2. $4(z + 3 - x) = 4 \times z + 4 \times 3 - 4 \times x = 4z - 4x + 12$.

9.3 Factorisation d'une expression algébrique

Définition 41. Factoriser une expression algébrique consiste à transformer cette expression en un produit d'un (ou plusieurs) facteur(s) à l'aide de la distributivité de $\times$ par rapport à $+$.

Exemple. En voici deux :

1. $3x + 6 + 21y = 3 \times x + 3 \times 2 + 3 \times 7y = 3 \times (x + 2 + 7y) = 3(x + 7y + 2)$.
2. $4a - 10 = 2 \times 2a - 2 \times 5 = 2 \times (2a - 5) = 2(2a - 5)$.

Remarque. On peut effecteur deux remarques :

1. La factorisation est la démarche inverse du développement. On ne s'étonnera donc pas que ces deux démarches utilisent la distributivité dans un sens contraire l'une de l'autre.
2. Lorsqu'on factorise une expression algébrique, on factorise toujours par « le plus grand diviseur commun » à tous les termes de la somme. Par exemple, $8x + 64 = 2(4x + 32)$ est une factorisation non terminée.

Chapitre 10

Puissance d'un nombre

Pierre de Fermat

(Beaumont-de-Lomagne 1 605 - Castres 1 665)

10.1 Présentation

Définition 42. On appelle puissance d'un nombre le produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre. Plus formellement, soient a un nombre réel et n un nombre entier naturel, on appelle a à la puissance n le nombre noté a^n défini par :

$$a^n := \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\,\text{facteurs}}$$

L'entier naturel n est appelé l'exposant si bien que a^n se lit parfois « a exposant n ».

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Par convention, $a^0 = 1$.
2. $a^1 = a$
3. $a^2 = a \times a$ se lit « a au carré » et l'on comprend bien pourquoi...
4. $a^3 = a \times a \times a$ se lit « a au cube » et l'on comprend bien pourquoi...

Exemple. $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

Proposition 43. *On a les deux résultats suivants :*

1. *Toute puissance d'un nombre réel positif est un nombre positif.*
2. *Toute puissance d'un nombre réel négatif est :*
   (a) *un nombre réel positif si l'exposant est pair :*
   (b) *un nombre réel négatif si l'exposant est impair.*

Démonstration. Découle directement de la proposition 12. □

Exemple. Calculons $(-5)^3$ et $(-5)^4$.

Proposition 44. *Soit a un nombre réel. Soit n un nombre entier naturel. On a :*

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -a^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Démonstration. Découle de l'associativité de la multiplication et de l'égalité $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ elle-même conséquente à la proposition 25. □

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. Le carré d'un nombre réel est toujours positif. Exemple : $(-5)^2 = 25 > 0$.
2. Le cube d'un nombre réel est toujours du même signe que ce nombre. Exemple : $(-5)^3 = -125$.

10.2 Opérations sur les puissances

Proposition 45. *Soient a et b deux nombres réels. Soient n et m deux nombres entiers naturels.*

1. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
2. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ *si* $b \neq 0$
3. $a^n \times a^m = a^{n+m}$
4. $(a^n)^m = a^{n \times m}$
5. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ *si* $a \neq 0$ *et* $n \geqslant m$

Démonstration. Il suffit de l'écrire. □

Exemple. Calculons $[(-2) \times (+3)]^2$, $\left(\frac{(-2)}{(+3)}\right)^3$, $2^3 \times 2^2$, $(3^2)^3$ et $\frac{2^7}{2^3}$.

10.3 Puissances négatives

On cherche désormais à donner un sens à une expression du type a^{-n}où n désigne un nombre entier relatif et où a est un nombre réel non nul. Afin de conserver les propriétés précédentes, on doit avoir :

$$a^n \times a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

Autrement dit, a^{-n} doit nécessairement désigner l'inverse de a^n. D'où la définition d'une puissance négative suivante :

Définition 46. Soit n un nombre entier naturel. Soit a un nombre réel non nul. On pose :

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

Exemple. Calculons $\frac{(-3)^4}{(-3)^7}$.

Remarque. $a^{-1} = \frac{1}{a}$ donc $\frac{b}{a} = ba^{-1}$. C'est pour cette raison qu'une unité de vitesse, comme le km/h, se note parfois km.h^{-1}.

Chapitre 11

PGCD et PPCM

Euclide

(Grèce - 300 avt J.-C.)

Dans ce chapitre, nous ne considérerons que des nombres entiers naturels. Aussi, nous noterons $\min(a;b)$ le plus petit des entiers a et b ; et $\max(a;b)$ le plus grand des entiers a et b. Par exemple, $\min(17;21) = 17$ et $\max(3;54) = 54$.

11.1 Plus grand commun diviseur

Remarque. Pour déterminer l'ensemble des diviseurs d'un entier naturel n, on commence par le diviser par 1, puis par 2, etc. jusqu'à $\sqrt{n}$ et l'on obtient ainsi les diviseurs de n par paire. Cet ensemble est généralement noté $\mathscr{D}(n)$.

Exemple. $\mathscr{D}(45) = \{1;3;5;9;15;45\}$

Définition 47. On appelle diviseur commun à deux ou plusieurs entiers naturels tout nombre qui divise chacun d'eux.

Remarque. Pour déterminer l'ensemble des diviseurs qui sont communs à plusieurs nombres, on prend l'intersection de l'ensemble des diviseurs de chaque nombre.

Exemple. On a : $\mathscr{D}(30) = \{1;2;3;5;6;10;15;30\}$, $\mathscr{D}(45) = \{1;3;5;15;25;75\}$ et $\mathscr{D}(75) = \{1;3;5;15;25;75\}$. D'où l'ensemble des diviseurs communs à 30, 45 et 75 : $\mathscr{D}_{30;45;75} = \{1;3;5;15\}$.

Définition 48. Le plus grand des diviseurs communes à plusieurs nombres est appelé le plus grand commun diviseur et est abrégé PGCD.

Exemple. Le PGCD de 30, 45 et 75 est 15. On note : $\mathrm{PGCD}(30;45;75) = 15$.

Définition 49. Deux nombres entiers naturels non nuls sont dits premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

Exemple. Démontrons que 36 et 125 sont premiers entre eux.

11.2 Plus petit commun multiple

Remarque. On note $\mathscr{M}(n)$ l'ensemble des multiples de l'entier naturel n. Ainsi, $\mathscr{M}(n) = \{n; 2n; 3n; 4n; \ldots\}$. Cet ensemble est évidemment infini contrairement à $\mathscr{D}(n)$ qui est nécessairement fini (pourquoi ?).

Exemple. $\mathscr{M}(7) = \{7; 14; 21; 28; 35; \ldots\}$

Définition 50. On appelle multiple commun à deux ou plusieurs entiers naturels tout nombre multiple de chacun d'eux.

Exemple. 180 et 300 sont des multiples communs à 6, 10 et 15.

Définition 51. Le plus petit des multiples communs à plusieurs nombres s'appelle leur plus petit commun multiple et est abrégé PPCM.

Exemple. Le PPCM de 6, 10 et 15 est égal à 30.

Chapitre 12

Application aux fractions

Héron d'Alexandrie

(Alexandrie I^{er} siècle)

12.1 Simplification de fractions

Remarque. Pour simplifier une fraction, il suffit de diviser numérateur et dénominateur par un de leurs diviseurs communs.

Exemple. Simplifions $\frac{126}{189}$. On remarque, grâce aux critères de divisibilité, que le numérateur et le dénominateur sont divisibles par 9. D'où :

$$\frac{126}{189} = \frac{14 \times 9}{21 \times 9} = \frac{14}{21}$$

Puis :

$$\frac{14}{21} = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{2}{3}$$

Ainsi :

$$\frac{126}{189} = \frac{2}{3}$$

Définition 52. Une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Proposition 53. *Toute fraction admet une forme irréductible. De plus, cette forme irréductible est unique.*

Démonstration. Admise. □

Proposition 54. *Pour obtenir une fraction irréductible, il suffit de diviser numérateur et dénominateur par leur PGCD.*

Démonstration. Découle directement de la définition du PGCD. □

Remarque. Cela étant, il n'est pas nécessaire de calculer le PGCD. On peut aussi repérer des facteurs communs au numérateur et au dénominateur et simplifier petit à petit comme dans l'exemple précédent.

12.2 Réduction au plus petit dénominateur commun

Exemple. Réduisons au même dénominateur les fractions : $\frac{10}{96}$, $\frac{21}{120}$ et $\frac{33}{270}$.

1. On commence par déterminer la forme irréductible de chaque fraction :
   $\frac{10}{96} = \frac{5}{48}$, $\frac{21}{120} = \frac{7}{40}$ et $\frac{33}{270} = \frac{11}{90}$.
2. Le dénominateur cherché est un multiple commun à 48, 40 et 90. Choisissons le plus simple, leur PPCM.
   $\mathrm{PPCM}(48, 40, 90) = 720$.
3. Ainsi :
$$\begin{cases} \frac{5}{48} = \frac{75}{720} \\ \frac{7}{20} = \frac{126}{720} \\ \frac{11}{90} = \frac{88}{720} \end{cases}$$

Remarque. Plus généralement, pour réduire plusieurs fractions au plus petit dénominateur commun possible, il faut :

1. Réduire ces fractions sous forme irréductible ;
2. Déterminer leur PPCM ;
3. Multiplier les termes de chaque fraction par le quotient de ce PPCM par son dénominateur.

Chapitre 13

Nombres rationnels - Multiplication et division

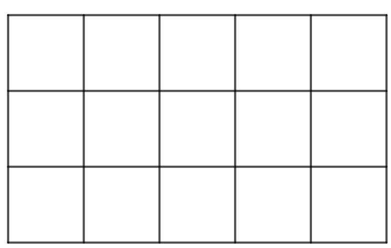
Héron d'Alexandrie

(Alexandrie I^{er} siècle)

Dans ce chapitre, nous ne considérerons que les nombres rationnels (fractions), c'est-à-dire les nombres pouvant s'écrire comme un quotient de deux entiers relatifs a et b avec b non nul.

13.1 Multiplication de deux nombres rationnels

Exemple. Calculons le produit de $\frac{2}{5}$ par 2.
Illustration :



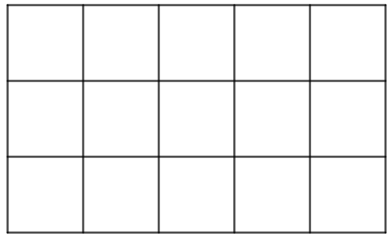
Remarque. Ce résultat se généralise aisément :

Proposition 55. *Soient a et b deux nombres réels avec b non nul. Soit n un nombre entier relatif. On a :*

$$\frac{a}{b} \times n = \frac{a \times n}{b}$$

Démonstration. Admise. □

Exemple. Calculons à présent le produit de $\frac{3}{5}$ par $\frac{2}{3}$.
Illustration :



Remarque. Ce résultat se généralise aisément :

Proposition 56. *Soient a, b, c et d quatre nombres réels avec b et d non nuls. On a :*

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Démonstration. Admise. □

Proposition 57. *Soient a, b, c, d, e et f six entiers relatifs. On a :*

1. $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$ *(associativité de $\times$)*
2. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$ *(commutativité de $\times$)*
3. $\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$ *(distributivité de $\times$ par rapport à $+$)*

Démonstration. Découle de la proposition 25. □

Remarque. Pour multiplier par 5, on peut multiplier par 10 puis diviser par 2.

Exemple. $248 \times 5 = 248 \times \frac{10}{2} = \frac{248 \times 10}{2} = \frac{2\,480}{2} = 1\,240$.

Définition 58. On dit que deux nombres sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Exemple. $\frac{1}{5}$ est l'inverse de 5 car $5 \times \frac{1}{5} = \frac{5 \times 1}{5} = \frac{5}{5} = 1$.

Remarque. Il faut veiller à ne pas confondre l'inverse et l'opposé d'un nombre. Exemple : l'opposé de -5 est 5 et l'inverse de -5 est $-\frac{1}{5}$. Cela étant, les deux son involutifs : l'opposé de l'opposé d'un nombre est ce nombre et l'inverse de l'inverse d'un nombre est ce nombre.

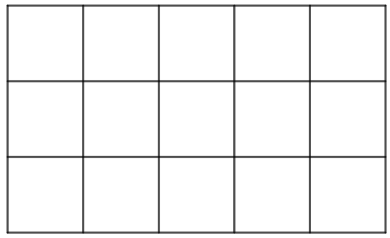
Proposition 59. *Soient a et b deux nombres entiers relatifs non nuls.*

1. *L'inverse de a est $\frac{1}{a}$.*
2. *L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.*

Démonstration. 1. $a \times \frac{1}{a} = \frac{a \times 1}{a} = \frac{a}{a} = 1$.
2. $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = 1$. □

13.2 Division de deux nombres rationnels

Exemple. Calculons le quotient de $\frac{2}{5}$ par 3.
Illustration :



Remarque. Ce résultat se généralise aisément :

Proposition 60. *Soient a et b deux nombres réels avec b non nul. Soit n un nombre entier relatif non nul. On a :*

$$\frac{a}{b} \div n = \frac{a}{b \div n}$$

Démonstration. Admise. □

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. On peut alors définir le quotient de deux nombre entiers relatifs de la manière suivante :

$$a \div b = \frac{a}{1} \div b = \frac{a}{1 \times b} = \frac{a}{b}$$

2. On définit la division entre fractions comme étant l'opération inverse de la multiplication.

Proposition 61. *Soient a, b, c et d quatre nombres réels avec b, c et d non nuls. On a :*

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Démonstration. Admise. □

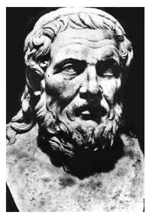
Exemple. $\frac{3}{5} \div \frac{1}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{1} = \frac{3 \times 4}{5 \times 1} = \frac{12}{5}$

Remarque. On parle parfois de rapport au lieu de fraction ou de quotient.

Exemple. $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{4 \times 3}{5 \times 2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

Chapitre 14

Pyramides et cônes



Appolonius de Perge

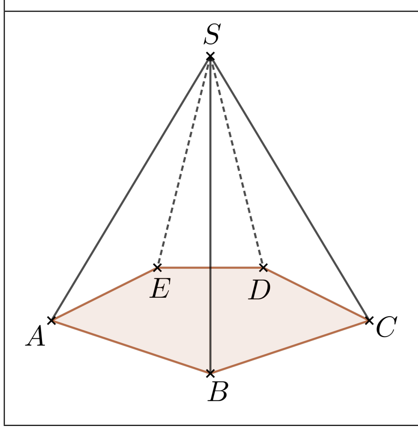
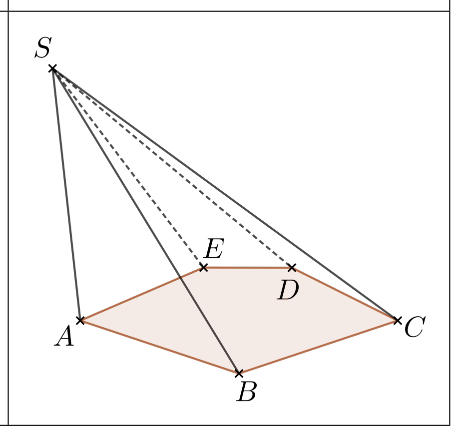
(Perge $III^{ème}$ siècle avt J.-C. - Perge $III^{ème}$ avt J.-C.)

14.1 Pyramides

Remarque. Dans un plan $\mathscr{P}$ de l'espace, considérons un polygone $ABCDE$. Soit S un point n'appartenant pas au plan $\mathscr{P}$. Lorsqu'un point M se déplace sur la ligne polygonale $ABCDE$, la demi-droite $[SM)$ engendre une surface pyramidale.

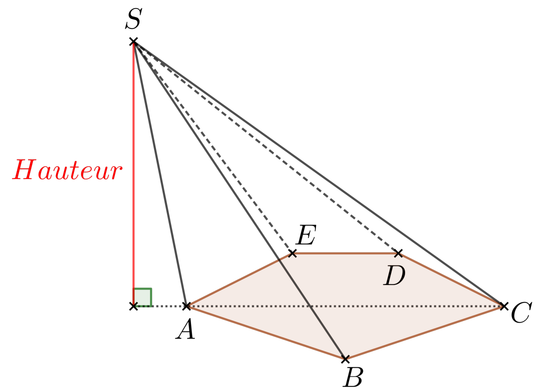
Définition 62. On appelle pyramide de sommet S et de base $ABCDE$ le solide délimité par la surface pyramidale et par la surface plane $ABCDE$. Les surfaces délimitées par les triangles SAB, SBC, SCD, SDE et SEA sont appelées les faces latérales de la pyramide $SABCDE$.

Illustration :

Pyramide droite	Pyramide non droite
	

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Évidemment, une pyramide compte autant de faces latérales que sa base compte de côtés.
2. On admet qu'il existe une unique droite passant le sommet S et perpendiculaire à $\mathscr{P}$. Cette droite coupe le plan $\mathscr{P}$ en un point H. La longueur h du segment $[SH]$ est appelée la hauteur de la pyramide.
   Illustration :



3. Lorsque la base est un triangle, la pyramide est aussi appelée un tétraèdre[1]. Lorsque les arêtes d'un tétraèdre ont toutes la même longueur, ce tétraèdre est dit régulier.

Proposition 63. *Le volume d'une pyramide s'exprime selon la formule :* $\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_b \times h$*, où* $\mathscr{A}_b$ *est l'aire de sa base et* h *sa hauteur.*

Démonstration. Principe de Cavalieri. On peut cependant constater cette formule en versant trois fois le contenant (eau, sable, etc.) d'une pyramide dans un prisme droit de même base et de même hauteur. □

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Si l'on déplace « horizontalement » (i.e. parallèlement au plan de la base) le sommet S d'une pyramide, alors son volume ne change pas.
2. La hauteurs h étant donnée, le volume d'une pyramide est proportionnel à l'aire de sa base.
3. L'aire de la base étant donnée, le volume d'une pyramide est proportionnel à sa hauteur h.

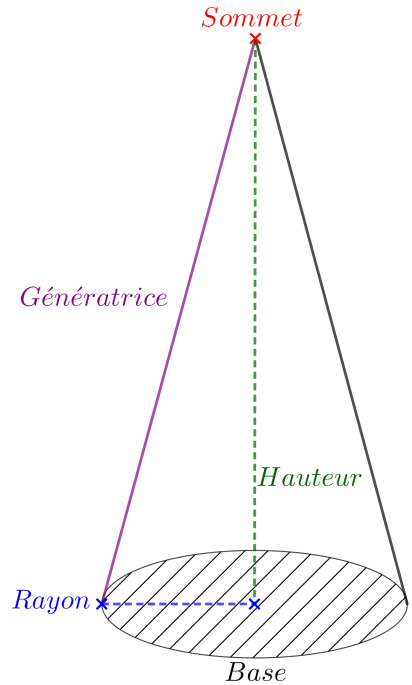
14.2 Cônes

Remarque. Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon r inclus dans le plan $\mathscr{P}$. Soit S un point n'appartenant pas à $\mathscr{P}$. Lorsque M se déplace le long du cercle $\mathscr{C}$, la demi-droite $[SM)$ engendre un surface conique de révolution notée $\mathscr{S}$.

Définition 64. On appelle cône de révolution de sommet S et de base $\mathscr{C}$, le solide délimité par la surface conique $\mathscr{S}$ et par le disque $\mathscr{D}$ associée au cercle $\mathscr{C}$.

1. Le préfixe grec « tétra » signifiant « quatre ».

Illustration :



Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. On admet qu'il existe une unique droite passant le sommet S et perpendiculaire à $\mathscr{P}$. Cette droite coupe le plan $\mathscr{P}$ en un point H. La longueur h du segment $[SH]$ est appelée la hauteur du cône.
2. Lorsque le pied de la hauteur est le centre du disque de base, on peut voir le cône de révolution comme le volume engendré par la révolution d'un triangle rectangle autour d'une de ses cathètes.
3. Une pyramide est un cône mais n'est pas un cône de révolution.

Proposition 65. *Le volume d'un cône de révolution s'exprime selon la formule :* $\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_b \times h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$*, où* $\mathscr{A}_b$ *est l'aire de sa base,* r *le rayon de sa base et* h *sa hauteur.*

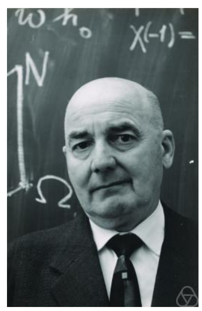
Démonstration. Principe de Cavalieri. On peut cependant constater cette formule en versant trois fois le contenant (eau, sable, etc.) d'un cône de révolution dans un cylindre de révolution droit de même base et de même hauteur. □

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Si l'on déplace « horizontalement » (i.e. parallèlement au plan de la base) le sommet S d'un cône de révolution, alors son volume ne change pas.
2. La hauteurs h étant donnée, le volume d'un cône de révolution est proportionnel à l'aire de sa base.
3. L'aire de la base étant donnée, le volume d'un cône de révolution est proportionnel à sa hauteur h.

Chapitre 15

Inégalités



Helmut Hasse

(Cassel 1 898 - Ahrensburg 1 979)

Nous noterons :

1. $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs.
2. $\mathbb{Z}_+$ (ou $\mathbb{N}$) l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls.
3. $\mathbb{Z}_-$ l'ensemble des nombres entiers négatifs ou nuls.
4. $\mathbb{Z}_+^*$ (ou $\mathbb{N}^*$) l'ensemble des nombres entiers positifs non nuls.
5. $\mathbb{Z}_-^*$ l'ensemble des nombres entiers négatifs non nuls.
6. $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.
7. $\mathbb{D}_+$ l'ensemble des nombres décimaux positifs ou nuls.
8. $\mathbb{D}_-$ l'ensemble des nombres décimaux négatifs ou nuls.
9. $\mathbb{D}_+^*$ l'ensemble des nombres décimaux positifs non nuls.
10. $\mathbb{D}_-^*$ l'ensemble des nombres décimaux négatifs non nuls.

15.1 Ordre sur les nombres décimaux

Définition 66. Soient a et b deux nombres décimaux relatifs. On dit que a est inférieur à b, et l'on note $a \leqslant b$, si la différence $b - a$ est positive ou nulle. On dit que a est supérieur à b, et l'on note $a \geqslant b$, si la différence $b - a$ est négative ou nulle.

Remarque. Pour comparer deux nombres, on étudie le signe de leur différence.

Définition 67. Soient a et b deux nombres décimaux relatifs. On dit que a est strictement inférieur à b, et l'on note $a < b$, si la différence $b - a$ est positive. On dit que a est strictement supérieur à b, et l'on note $a > b$, si la différence $b - a$ est négative.

Proposition 68. *La relation « $\leqslant$ » est une relation d'ordre, c'est-à-dire qu'elle est :*

1. *Réflexive : pour tout nombre décimal a, on a : $a \leqslant a$.*
2. *Antisymétrique : pour tous nombres décimaux relatifs a et b, on a : $\begin{cases} a \leqslant b \\ b \leqslant a \end{cases} \Rightarrow a = b$.*
3. *Transitive : pour tous nombres décimaux relatifs a, b et c, on a : $\begin{cases} a \leqslant b \\ b \leqslant c \end{cases} \Rightarrow a \leqslant c$.*

Démonstration. 1. $a - a = 0$ et 0 est positif. Donc $a \leqslant a$.
2. $\begin{cases} a \leqslant b \\ b \leqslant a \end{cases}$ donc $a - b$ est positif et négatif. Ceci n'est possible que si $a - b = 0$, autrement dit si $a = b$.
3. $\begin{cases} a \leqslant b \\ b \leqslant c \end{cases}$ donc $b - a$ est positif et $c - b$ est positif. Ainsi, $(c - b) + (b - a)$ est positif, ce qui entraîne que $c - a$ est positif. Autrement dit, $a \leqslant c$. □

Proposition 69. *Pour tous nombres décimaux relatifs a, b et c, $a \leqslant b$ si, et seulement si $a + c \leqslant b + c$.*

Démonstration. $\Rightarrow$: soient a, b et c trois nombres décimaux relatifs. Supposons $a \leqslant b$. On a :

$$(b + c) - (a + c) = b + c - a - c = b - a$$

Or $b - a$ est positif. Donc $(b + c) - (a + c)$ est positif. Autrement dit, $a + c \leqslant b + c$.
$\Leftarrow$: soient a, b et c trois nombres décimaux relatifs. Supposons $a + c \leqslant b + c$. Alors, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} a + c + (-c) &\leqslant b + c + (-c) \\ a &\leqslant b \end{aligned}$$

□

Remarque. Dans une inégalité, on peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre à condition de changer son signe. Plus formellement, on a :

$$\begin{aligned} a + c &\leqslant b \\ a + c + (-c) &\leqslant b + (-c) \\ a &\leqslant b - c \end{aligned}$$

Proposition 70. *Pour tous nombres décimaux relatifs a, b, c et d, si $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases}$ alors $a + c \leqslant b + d$.*

Démonstration. Soient a, b, c et d quatre nombres décimaux relatifs. Supposons $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases}$. Alors $b - a$ et $d - c$ sont positifs. Donc $(b - a) + (d - c)$ est positif. Autrement dit, $(b + d) - (a + c)$ est positif. C'est-à-dire : $a + c \leqslant b + d$. □

Proposition 71. *Pour tous nombres décimaux relatifs a et b :*

1. *Si* $\begin{cases} a \geqslant 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases}$ *, alors* $ab \geqslant 0$.
2. *Si* $\begin{cases} a \geqslant 0 \\ b \leqslant 0 \end{cases}$ *, alors* $ab \leqslant 0$.
3. *Si* $\begin{cases} a \leqslant 0 \\ b \leqslant 0 \end{cases}$ *, alors* $ab \geqslant 0$.

Démonstration. C'est la règle des signes. □

Proposition 72. *Pour tous nombres décimaux relatifs a, b et c :*

1. *Si $c \geqslant 0$, alors $a \leqslant b$ équivaut à $ac \leqslant bc$.*
2. *Si $c \leqslant 0$, alors $a \leqslant b$ équivaut à $ac \geqslant bc$.*

Démonstration. Démontrons le point 2. Soit $c < 0$.
$\Rightarrow$: supposons $a \leqslant b$. On a : $ac - bc = (a - b)c$. Or $a - b \leqslant 0$ et $c < 0$. Donc, d'après la règle des signes, $(a - b)c \geqslant 0$. Autrement dit, $ac \geqslant bc$.
$\Leftarrow$: supposons $ac \geqslant bc$. Raisonnons par l'absurde et supposons $a > b$. Alors $a - b > 0$. Or $c < 0$. Donc, d'après la règle des signes, $ac - bc = (a - b)c < 0$. Autrement dit, $ac < bc$. Ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de départ. Donc $a \leqslant b$. □

Remarque. On peut effectuer trois remarques :

1. On ne change pas le sens d'une inégalité en multipliant (en divisant) par un nombre positif (strictement positif).
2. On change le sens d'une inégalité en en multipliant (en divisant) par un nombre négatif (strictement négatif).
3. Les propositions précédentes demeurent vraies si l'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes.

15.2 Inégalité triangulaire

Définition 73. Soit x un nombre relatif. On appelle valeur absolue de x, notée $|x|$, le nombre :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. La valeur absolue d'un nombre est toujours positive.
2. La valeur absolue d'un nombre x est le plus grand des deux nombres x et $-x$.

Proposition 74. *(Inégalité triangulaire) Pour tous les nombres relatifs x et y, on a : $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.*

Démonstration. Soient x et y deux nombres relatifs. On a : $x \leqslant |x|$ et $y \leqslant |y|$ donc $x + y \leqslant |x| + |y|$. Aussi, on a : $-x \leqslant |x|$ et $-y \leqslant |y|$ donc $-x - y \leqslant |x| + |y|$. Par conséquent, $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. □

Chapitre 16

Rotation

Sophus Lie

(Nodfjordeid 1 842 - Oslo 1 899)

16.1 Définitions

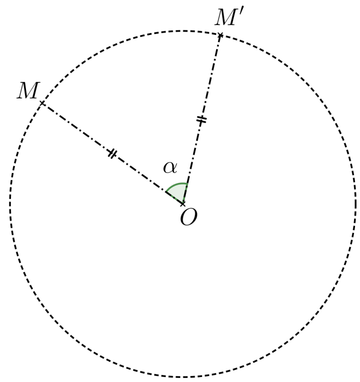
Remarque. Appliquer une rotation à une figure, c'est la faire tourner d'un certain angle α autour d'un point de référence O. Cela étant, il existe deux façons de tourner autour du point O : dans le sens des aiguilles d'une montre ou bien dans le sens inverse. En mathématiques, le sens de référence choisi comme étant le sens de rotation par défaut est le sens inverse des aiguilles d'une montre. Il est appelé le sens direct (ou trigonométrique, ou positif) et le sens des aiguilles d'une montre est donc appelé le sens négatif.

Définition 75. Soit O un point. Soit α un nombre réel. On dit qu'un point M' est l'image d'un point M par la rotation de centre O et d'angle α, et l'on note $M' = r_{O;\alpha}(M)$, lorsque l'on a :

$$\begin{cases} OM = OM' \\ \widehat{MOM'} = \alpha \end{cases}$$

Notation : Cette transformation du plan se note en général : $r_{O;\alpha}\ :\ M \longmapsto M'$.

Illustration :

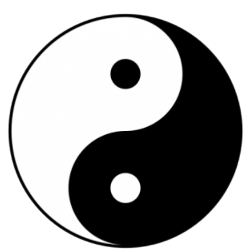
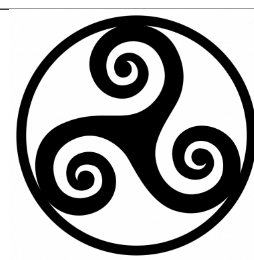


Remarque. On peut d'ores et déjà effectuer quelques remarques (à démontrer) :

1. Si $\alpha > 0$, alors on tourne dans le sens direct. Si $\alpha < 0$, alors on tourne dans le sens indirect.
2. Si $M' = r_{O;\alpha}(M)$, alors $M = r_{O;-\alpha}(M')$.

3. S'il existe un entier relatif impair k tel que $\alpha = 180k$, alors $r_{O;\alpha}$ est la symétrie centrale de centre O.
4. Si $\alpha = 0$, alors tout point du plan est envoyé sur lui-même. $r_{O;\alpha}$ est alors l'application identité.
5. Une figure donnée admet pour symétrie la rotation $r_{O;\alpha}$ si elle est « globalement invariante » par cette rotation. Autrement dit, $r_{O;\alpha}$ est une symétrie d'une figure si l'image de cette dernière par cette rotation est confondue avec elle-même.

Exemple. Les symboles du Yin du yang et le triskell sont invariants par certaines rotations. Lesquelles ?

Yin et yang	Triskell
	

16.2 Propriétés

Proposition 76. *Soit $r_{O;\alpha}$ une rotation.*

1. *Si trois points sont alignés, alors leurs images respectives par $r_{O;\alpha}$ sont alignés.*
2. *L'image d'un segment par $r_{O;\alpha}$ est un segment de même longueur.*
3. *L'image d'un angle par $r_{O;\alpha}$ est un angle de même mesure.*
4. *Si une figure est l'image d'une autre par $r_{O;\alpha}$ alors elles sont égales (i.e. sont superposables, c'est-à-dire qu'elles ont les mêmes longueurs et les mêmes angles).*

Démonstration. 1. Admise.
2. L'image d'un segment est un segment d'après 1. Le reste est admis.
3. Admise.
4. Découle de 2. et 3. □

Chapitre 17

Statistiques

Antoine Deparcieux

(Mas du Clotet 1703 - Paris 1768)

La statistique descriptive désigne une sous-discipline des mathématiques visant à produit, étudier et présenter des données.

17.1 Généralités

Remarque. Lorsque l'on étudie un certain caractère sur une population donnée, on relève une valeur du caractère par individu. L'ensemble des données obtenues (ou toutes les valeurs prises par le caractère) constitue les données brutes. Le caractère peut être qualitatif (couleur d'une voiture) ou quantitatif (taille d'un individu). Les données brutes comportent souvent des valeurs qui se répètent.

Définition 77. Lors d'un relevé de mesures effectué sur les individus d'une population, l'ensemble des données collectées constitue une série statistique. Une série statistique à caractère quantitatif est dite ordonnée après que les valeurs collectées ont été rangées dans l'ordre croissant (ou décroissant). Les différentes valeurs possibles pour un caractère s'appellent les modalités du caractère.

Exemple. Imaginons l'étude des masses (exprimées en kilogrammes) des potirons ramassés dans un champ. Dans le cadre de cette étude, chaque potiron est un individu, l'ensemble des potirons ramassés est la population étudiée et la masse en kilogrammes est le caractère étudié. L'ensemble des valeurs relevées est la série statistique.

17.2 Diagrammes

17.2.1 Diagramme à points

Exemple. Relevons la pointure de chacun des élèves de cette classe : *série brute*. Le diagramme à point est une première représentation simple à réaliser : *diagramme à points*.

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. Le diagramme à points permet de visualiser rapidement quelques informations importantes comme la plus grande, la plus petite, ainsi que les valeurs les plus fréquentes et les moins fréquentes. On a ainsi une vue d'ensemble de la répartition des réponses. Sa faiblesse se révèle lorsque l'effectif de la population est très élevée : il y aura alors trop de réponses dans chaque colonne.
2. Ce diagramme à points suggère de faite subir aux données un premier traitement. Celui-ci consiste à compter le nombres d'individus qui chaussent chaque pointure présente. On obtient ainsi la table des effectifs :

Pointure				
Effectif				

17.2.2 Diagrammes à barres

Remarque. A partir de la table des effectifs, il est possible de présenter les valeurs sous la forme d'un diagramme à barres. Ce type de diagramme ressemble au diagramme à points, mais, au lieu d'empiler des points, on dessin un rectangle, une barre, dont la longueur représenter l'effectif.

Exemple. Pointures des élèves de la classe.

Remarque. Dans un diagramme à barres, toutes les barres doivent avoir la même largeur et être séparés par le même écartement.

Définition 78. On considère une série statistique comportant p modalités (ou p classes) d'effectifs respectifs $n_1, ..., n_p$ et d'effectif total N. La fréquence d'apparition de la modalité (ou de la classe) correspond à la proportion d'individus dont le caractère est égal à cette modalité (ou appartenant à cette classe). Ainsi :

$$\forall\, i \in \{1; ...; p\},\ f_i = \frac{n_i}{N}$$

Exemple. Fréquence de la pointure 36.

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. On a toujours : $0 \leqslant f_i \leqslant 1$.
2. On a toujours : $\sum\limits_{i=1}^{i=p} f_i = f_1 + ... + f_p = 1$.
3. On peut créer la table des fréquences :

Pointure				
Fréquence				

puis tracer un diagramme à barres à partir de cette table.

17.2.3 Diagrammes circulaires

Remarque. Le regroupement par classes permet de présenter les données sous la forme d'un diagramme circulaire (aussi appelé « diagramme en camembert ») ou semi-circulaire. On peut utiliser la table des effectifs ou celle des fréquences. On utiliser la proportionnalité entre les angles et les effectifs (ou les fréquences) pour calculer l'angle correspondant à chaque classe.

Exemple. Pointures des élèves de la classe.

17.2.4 Histogramme

Remarque. Le caractère étudié précédemment (la pointure des chaussures) ne pouvait prendre qu'un nombre fini de valeurs. Ce n'est pas toujours le cas. Souvent, en particulier quand le caractère étudié est le résultat d'une mesure, celui-ci peut prendre a priori toutes les valeurs réelles comprises entre deux bornes.

Exemple. Pour chaque jour du mois d'août 2 018, on mesure le nombre d'heures d'ensoleillement tel qu'il a été mesuré à la station météorologique de Limoges :

$14,1$	$14,2$	$13,4$	$12,9$	$11,9$	3	$0,8$	$5,2$	$3,2$	$8,9$
$13,8$	$6,5$	$2,2$	$11,7$	$9,9$	$0,2$	$3,1$	$2,1$	$1,4$	$0,1$
$1,3$	$3,5$	$4,6$	5	0	$4,3$	$2,9$	$7,5$	$11,2$	$7,3$
$12,4$									

On regroupe les individus dont les valeurs sont proches par intervalles (ou classes) :

$0 \leqslant e < 3$	$3 \leqslant e < 6$	$6 \leqslant e < 9$	$9 \leqslant e < 12$	$12 \leqslant e < 15$
9	8	4	4	6

Le choix du nombre d'intervalles est libre. Il ne faut pas qu'ils soient trop nombreux sous peine de perdre l'intérêt du regroupement, ni trop peu sous peine de ne plus avoir d'informations intéressantes. En général, on prend un nombre de classes dont le carré est proche de l'effectif total.

Remarque. Une représentation habituelle pour ces données est l'histogramme. Un histogramme ressemble à un diagramme à barres dans lequel les barres sont « collées » les unes aux autres, indiquant là le regroupement par intervalles. Néanmoins, dans un histogramme, ce sont les surfaces des rectangles qui doivent être proportionnelles aux effectifs, et non les hauteurs des barres comme dans le cas du diagramme à barres. Si les intervalles sont de même largeur, les hauteurs sont proportionnelles aux effectifs et l'histogramme fonctionne comme un diagramme à barres. Si les données sont très étalées par endroits, il peut être préférable de considérer des intervalles de longueurs différentes.

Exemple. Pour chaque jour du mois d'août 2 018, on mesure le nombre d'heures d'ensoleillement tel qu'il a été mesuré à la station météorologique d'Ajaccio :

$13,5$	$12,7$	$4,3$	$12,3$	$13,4$	$13,2$	$12,7$	$13,3$	$13,1$	$13,3$
$13,2$	$13,2$	$8,3$	$10,1$	$13,1$	13	13	$12,8$	$12,8$	$12,9$
$12,6$	$12,6$	$12,7$	$12,6$	$12,2$	$11,6$	$12,2$	$12,5$	$12,2$	$11,4$
$13,2$									

Il y a peu de valeurs en dessous de 6 heures. Pour garder une vision d'ensemble, on a donc intérêt à regrouper ces données isolées. Cela donne un intervalle plus grand que les autres. Il faut alors calculer la hauteur de chaque rectangle en divisant l'effectif correspondant par la longueur de l'intervalle correspondant. Cela permet d'avoir la garantie que les aires des rectangles seront bien proportionnelles aux effectifs.

Intervalle	$4 \leqslant e < 10$	$10 \leqslant e < 12$	$12 \leqslant e < 14$
Effectif	2	3	26
Longueur de l'intervalle	6	2	2
Hauteur $= \frac{\text{Effectif}}{\text{Longueur}}$	$\frac{1}{3}$	$1,5$	13

On peut enfin construire l'histogramme associé.

17.3 Moyenne et médiane

Définition 79. La moyenne arithmétique d'une série statistique se note $\overline{x}$. On a :

$$\overline{x} = \frac{\text{somme totale des valeurs prises par le caractère}}{\text{nombre de valeurs}}$$

Si $x_1, ..., x_p$ désignent les p modalités du caractère d'une série statistique et $n_1, ..., n_p$ désignent les effectifs correspondants, alors :

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=p} n_i} = \frac{n_1 x_1 + ... + n_p x_p}{n_1 + ... + n_p}$$

Exemple. (Classe - Pointure)

Proposition 80. *Si $x_1, ..., x_p$ désignent les p modalités du caractère d'une série statistique et $f_1, ..., f_p$ désignent les fréquences correspondants, alors :*

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{i=p} f_i x_i = f_1 x_1 + ... + f_p x_p$$

Démonstration. Découle directement de la définition précédente. □

Remarque. On peut effectuer trois remarques :

1. La moyenne arithmétique est un paramètre de position.
2. Si l'on ajoute un même réel à chaque modalité, alors la moyenne arithmétique augmente de ce réel.
3. Si l'on multiplie par un même réel chaque modalité, alors la moyenne arithmétique est multipliée par ce réel.

Définition 81. Dans une série statistique ordonnée, on appelle médiane toute valeur qui partage les valeurs prises par le caractère en deux groupes de même effectif.

Vocabulaire : la médiane est un paramètre dit de « position » car elle permet de positionner la population sur un axe gradué.

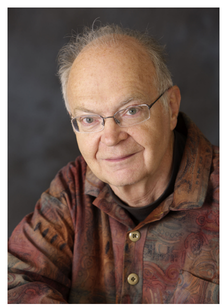
Exemple. (Classe - Pointure)

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Si l'effectif total de la série est impair, alors la médiane est unique et atteinte.
2. Si l'effectif total de la série est pair, alors il est dans les habitudes de prendre la moyenne arithmétique des deux valeurs centrales.
3. Au moins 50 % des valeurs sont inférieures ou égales à la médiane.
4. Au moins 50 % des valeurs sont supérieures ou égales à la médiane.

Chapitre 18

Algorithmique



Donald Knuth

(Milwaukee 1938)

18.1 Notion d'algorithme

Définition 82. On appelle algorithme toute méthode systématique qui permet, à coup sûr, de résoudre un problème donné.

Remarque. Les ordinateurs ainsi que certaines calculatrices peuvent mettre en œuvre ces algorithmes, pour peu que l'on connaisse la syntaxe des instructions que l'on doit rentrer dans la machine. Cette syntaxe constitue ce que l'on appelle le langage de programmation. Nous utiliserons cette année un langage adapté aux collégiens : Scratch.

Définition 83. On appelle variable toute boîte située dans la mémoire de l'ordinateur pouvant contenir, soit rien, soit un objet (typiquement un nombre). Le contenu de cette boîte peut évoluer au cours du temps.

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Le nom des variables peut le plus souvent être choisi arbitrairement par l'utilisateur : a, x, k, $compteur$, $résultat$, etc.
2. Pour mettre un objet dans une variable, on utilise une instruction appelée affectation. La syntaxe pour cette affectation dépend du langage de programmation utilisé. Dans la description française d'un algorithme, on utilise souvent : $a \leftarrow 5$, pour dire que l'on affecte 5 à la variable a.

Exemple. Imaginons que l'on veuille échanger le contenu de deux variables nommées a et b. Pour cela, on ne peut prendre le contenu de la variable a pour le mettre dans la variable b (avec $b \leftarrow a$). En effet, en faisant cela, on perdrait définitivement le contenu de b. On doit donc stocker au préalable le contenu de b dans une troisième variable (dite auxiliaire) que l'on peut nommer x :

$$x \leftarrow b$$
$$b \leftarrow a$$
$$a \leftarrow x$$

On peut représenter les différents états de la mémoire de l'ordinateur à l'aide d'un tableau :

a	b	x	Instruction
21	17		
21	17	17	$x \leftarrow b$
21	21	17	$b \leftarrow a$
17	21	17	$a \leftarrow x$

18.2 Instruction conditionnelle

Définition 84. On a souvent besoin de demander à l'ordinateur d'effectuer une action ou bien une autre suivant le résultat d'un calcul. Pour cela, on doit utiliser ce que l'on appelle une instruction conditionnelle. Une instruction conditionnelle représente une alternative, ce qui signifie qu'il n'y a que deux possibilités en réponse à la question posée : VRAI ou FAUX (OUI ou NON).

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Il est possible de représenter une telle instruction conditionnelle à l'aide du schéma suivant : (organigramme)
2. Dans la plupart des langages, la syntaxe exacte à utiliser pour une instruction conditionnelle utilise les mots anglais $if \dots then \dots else$.
3. Une instruction conditionnelle peut être imbriquée dans la clause *then* ou bien dans la clause *else* d'une autre instruction conditionnelle.

Exemple. On dit souvent que les années bissextiles sont les années multiples de 4. Il existe néanmoins une exception : les années multiples de 100, ce que l'on appelle aussi les années séculaires, ne sont pas bissextiles (par exemple 1 900). Cette exception possède elle-même une exception : les années multiples de 400 sont bissextiles (par 2 000). On souhaite écrire un algorithme qui, à parti d'un entier naturel n indique si oui ou non l'année correspondantes est bissextile. Pour cela, on imbrique trois instructions conditionnelles comme sur l'arbre décisionnel ci-dessous :

n est-il multiple de 4 ?

NON $\swarrow$ $\searrow$ OUI

Non bissextile n est-il multiple de 100 ?

NON $\swarrow$ $\searrow$ OUI

Bissextile n est-il multiple de 400 ?

NON $\swarrow$ $\searrow$ OUI

Non bissextile Bissextile

Cet arbre décisionnel se traduit par le programme ci-dessous. L'imbrication des instructions conditionnelles est marquée par l'indentation (i.e. la distance à la marge de gauche) :

Si n est multiple de 4 alors

  Si n est multiple de 100 alors

    Si n est multiple de 400 alors

    Année bissextile

    Sinon Année non bissextile

  Sinon Année bissextile

Sinon Année non bissextile

Chapitre 19

Racines carrées

Hippase de Métaponte

(Grèce $VI^{ème}$ siècle avt J.-C.)

19.1 Définition et premières propriétés

Remarque. Soit ABC un triangle rectangle en A. Si l'on connaît la longueur des deux cathètes, on peut, grâce au théorème de Pythagore, déterminer la longueur de l'hypoténuse. En effet, on a l'égalité : $BC^2 = AB^2 + AC^2$. On est donc amené à trouver un réel positif $x = BC$ vérifiant une équation de la forme $x^2 = a$, où $a = AB^2 + AC^2$ est un réel positif. On admet qu'une telle équation possède toujours une unique solution positive.

Définition 85. Soit a un nombre réel positif ou nul. Alors il existe un unique nombre réel, positif ou nul, x tel que $x^2 = a$. Ce nombre est appelé la racine carrée de a et est notée $\sqrt{a}$. Plus formellement, pour tout nombre réel $a \geqslant 0$, on a :

$$\left(x = \sqrt{a}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x^2 = a \\ x \geqslant 0 \end{cases}\right)$$

Exemple. $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$.

Proposition 86. *Les carrés de deux nombres réels sont égaux si, et seulement si, ces deux réels sont égaux ou opposés. Plus formellement, on a :*

$$\left(x^2 = x'^2\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = x' \\ ou \\ x = -x' \end{cases}\right)$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} x^2 &= x'^2 \\ x^2 - x'^2 &= 0 \\ (x - x')(x + x') &= 0 \\ x - x' = 0 &\text{ ou } x + x' = 0 \\ x = x' &\text{ ou } x = -x' \end{aligned}$$

□

Exemple. $\sqrt{16} = 4$ mais il existe deux nombres réels dont le carré est égal à 16 : 4 (la racine carrée de 16) et -4 (son opposé).

Proposition 87. *Soit a un nombre réel. Soit (E) l'équation $x^2 = a$.*

1. *Si $a < 0$, alors (E) n'admet pas de solution réelle.*
2. *Si $a = 0$, alors (E) admet une unique solution réelle : 0.*
3. *Si $a > 0$, alors (E) admet deux solutions réelles distinctes : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.*

Démonstration. Découle directement de la proposition précédente. □

Proposition 88. *Soit x un nombre réel. On a : $\sqrt{x^2} = |x|$.*

Démonstration. $|x| \geqslant 0$ et $|x|^2 = x^2$ donc $|x|$ est la racine carrée de x^2. □

Exemple. $\sqrt{3^2} = 3$ et $\sqrt{(-5)^2} = 5$.

19.2 Propriétés algébriques

Proposition 89. *La racine carrée d'un produit de facteurs positifs est égale au produit des racines carrées de chaque facteur. Plus formellement, pour tous nombres réels positifs ou nuls a et b, on a :*

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Démonstration. On a : $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right) \times \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right) = \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{b} = ab$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \geqslant 0$. Donc, par définition, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. □

Exemple. $\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

Proposition 90. *La racine carrée d'un quotient de nombres positifs est égale au quotient des racines carrées de chaque nombre. Plus formellement, pour tous nombres réels positifs a et b avec $b \neq 0$, on a :*

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Démonstration. Laissée en exercice. On pourra s'inspirer de la démonstration de la proposition précédente. □

Exemple. $\sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Remarque. Attention, la racine carrée n'est pas compatible avec l'addition et la soustraction. En général, $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a - b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Définition 91. On appelle expression conjuguée de la somme $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ la différence $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, et réciproquement.

Remarque. L'expression conjuguée permet de simplifier les expressions comportant des racines carrées au dénominateur.

Exemple. $\frac{1}{3-\sqrt{5}} = \frac{1\times(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{3+\sqrt{5}}{9-5} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$

19.3 Racines carrées et inégalités

Proposition 92. *Soient x et x' deux nombres réels positifs. On a l'équivalence :*

$$\left(x^2 < x'^2\right) \Leftrightarrow (x < x')$$

Démonstration. Soient x et x' deux nombres réels positifs. On a : $x'^2 - x^2 = (x'-x)(x'+x)$. Or $x+x'$ est positif, donc, d'après la règle des signes, les nombres $x'^2 - x^2$ et $x'-x$ sont de même signe. □

Proposition 93. *Soient x et x' deux nombres réels positifs. On a l'équivalence :*

$$(x < x') \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} < \sqrt{x'}\right)$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 90 à $\sqrt{x}$ et $\sqrt{x'}$. □

Exemple. On peut ainsi encadrer $\sqrt{17}$ par deux entiers consécutifs. En effet, on a : $16 < 17 < 25$. Donc : $\sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25}$ soit : $4 < \sqrt{17} < 5$.

19.4 Valeur approchée d'une racine carrée

Définition 94. On appelle racine carrée à unité près par défaut d'un nombre réel positif le plus grand entier naturel dont le carré est inférieur ou égal à ce nombre.

Exemple. 4 est la racine carrée à unité près de 17.

Remarque. Pour calculer la racine carrée à une unité près, on utilise un algorithme d'extraction de la racine carré que l'on va présenter sur un exemple.

Exemple. Extrayons la racine carrée à une unité près de 35 129 :

1. On pose l'extraction ainsi :

$$\begin{array}{r|l} 3\,51\,29 & \ldots \\ & \\ & \end{array}$$

2. On cherche le plus grand nombre dont le carré soit plus petit que 3. C'est 1. On le soustrait à 3 pour obtenir :

$$\begin{array}{r|l} 3\,51\,29 & 1\ldots \\ -1 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

3. On abaisse la tranche suivante, on double la racine (2), et l'on cherche le plus grand entier ? tel que : $2?\times? \leqslant 251$:

$$\begin{array}{r|l}
3\,51\,29 & 1\ldots \\
-1 & \\
\cline{1-1}
251 & 2?\times ?
\end{array}$$

4. ? = 8 et l'on écrit :

$$\begin{array}{r|l}
3\,51\,29 & 18\ldots \\
-1 & \\
\cline{1-1}
251 & 28\times 8 \\
-224 & \\
\cline{1-1}
27 &
\end{array}$$

5. On continue en doublant la racine 18, donc 36 :

$$\begin{array}{r|l}
3\,51\,29 & 18\ldots \\
-1 & \\
\cline{1-1}
251 & 28\times 8 \\
-224 & \\
\cline{1-1}
2\,729 & 36?\times ?
\end{array}$$

6. On obtient ? = 7. D'où :

$$\begin{array}{r|l}
3\,51\,29 & 187 \\
-1 & \\
\cline{1-1}
251 & 28\times 8 \\
-224 & \\
\cline{1-1}
2\,729 & 367\times 7 \\
-2\,569 & \\
\cline{1-1}
160 &
\end{array}$$

7. On trouve finalement que 187 est la racine carrée de 35 129 à une unité près. Plus précisément, on a : $35\,129 = 187^2 + 160$.

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. Le reste obtenu à chaque étape doit être inférieur à deux fois la racine plus un.

   Démonstration. Soit n^2 un nombre entier carré. L'écart avec le carré suivant $(n+1)^2$est : □

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2$$
$$2n + 1$$

2. Si $10r$ est la racine à une étape donnée et $10r + a$ celle à l'étape suivante. Alors :

$$\begin{aligned}(10r+a)^2 - (10r)^2 &= 100r^2 + 20ar + a^2 - 100r^2 \\ &= a(20r+a)\end{aligned}$$

   $20r + a$ est le nombre obtenu en doublant la racine et en l'accolant au chiffre cherché, ce qui explique le calcul à partir de la deuxième tranche.

Définition 95. On appelle racine carrée à $0,1$ (ou $0,01$, $0,001$, etc.) près par défaut d'un nombre réel positif donné, le plus grand nombre multiple entier de $0,1$ (ou $0,01$, $0,001$, etc.) dont le carré soit inférieur ou égal au nombre réel donné.

Exercice. Extraire la racine carrée à $0,001$ près par défaut de 2.

Index