Académie de Versailles

Olympiades académiques de mathématiques de quatrième

Concours 2006

***

Mardi 28 mars 2006

Durée de l'épreuve : 2 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

***

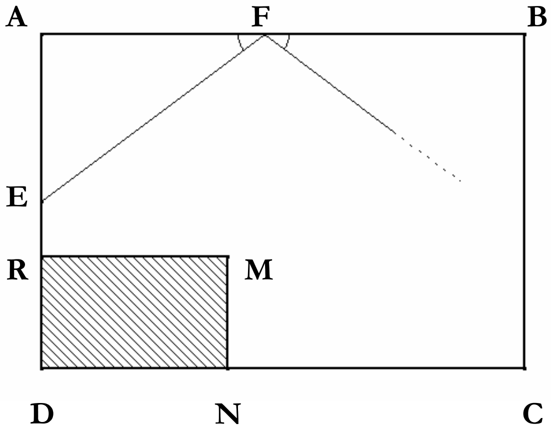
Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE
INRIA ROCQUENCOURT
partenaire de l'académie de Versailles

Exercice numéro 1

1. Quel est le nombre de chiffres du nombre $N = 10^{2006} - 2006$?
2. Quelle est la somme des chiffres de N ?

Exercice numéro 2



Un escargot se promène dans un jardin de forme rectangulaire entouré d'un mur. Une maisonnette en occupe un coin. Sur le schéma ci-contre, le rectangle **ABCD** représente le jardin, le rectangle **RMND** la maisonnette.

L'unité de longueur est le mètre. On donne :
AB = 13, **BC** = 9, **MN =** 3, **DN** = 5.
Soit **E** le point de [**AD**] tel que **AE** = 4,5.

L'escargot part du point **E** et se déplace en ligne droite. Il atteint le mur en **F**, point de [**AB**] tel que **EF** = 7,5. Il poursuit son chemin comme si sa trajectoire se réfléchissait sur l'obstacle (les angles de même mesure sont indiqués sur la figure). Il rebondit de même sur [**BC**] en un point **G** puis sur [**NC**] en un point **H** avant d'atteindre [**MN**] en un point **P**.

1. Compléter la figure et coder les angles de même mesure.

2. Déterminer la distance **PN**.

3. Les points **H**, **P** et **E** sont-ils alignés ?

Exercice numéro 3

On s'intéresse aux diverses façons d'écrire un nombre entier naturel comme somme d'autres nombres entiers naturels (pour éviter les répétitions, ils sont écrits dans l'ordre croissant). Par exemple :

$5=1+1+1+1+1$, $5=1+1+1+2$, $5=1+1+3$, $5=1+2+2$, $5=1+4$, $5=2+3$ sont les six décompositions possibles du nombre 5.

À chacune des sommes ainsi écrites, on associe le produit de ses termes. Les résultats obtenus pour 5 sont 1, 2, 3, 4 et 6.

1. Quelles sont les décompositions possibles du nombre 7 ? Quels sont les produits correspondants ? Lequel est le plus grand ?

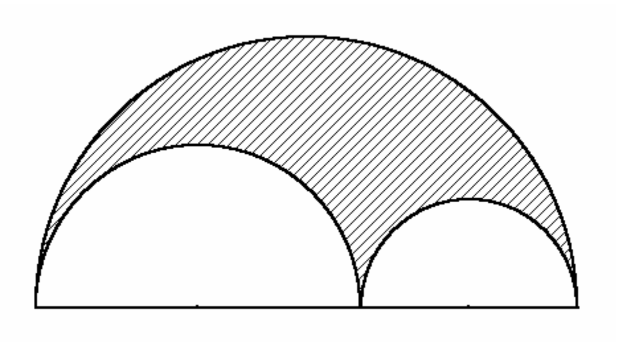
2. On s'intéresse à présent aux décompositions du nombre 28, qu'on ne cherchera pas à écrire, et aux produits correspondants.

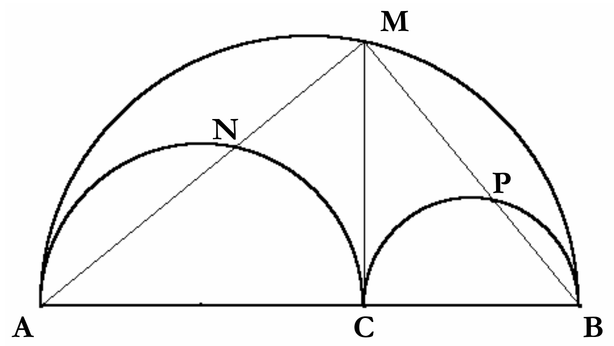
a. On considère une décomposition quelconque du nombre 28 où apparaît le nombre 1. On appelle P le produit associé. Trouver une décomposition dont le produit associé est supérieur à P.

b. On considère une décomposition quelconque du nombre 28 où apparaît le nombre 5. On appelle R le produit associé. Trouver une décomposition dont le produit associé est supérieur à R.

c. Quelles décompositions de 28 donnent le plus grand produit associé ?

Exercice numéro 4





La forme hachurée ci-dessus (figure de gauche) est appelée *arbelos*. Sur la figure de droite, on peut voir qu'elle est construite à l'aide de trois demi-cercles dont les diamètres [**AB**], [**BC**] et [**AC**] sont tels que **C** est un point de [**AB**].

On considère le point **M**, point d'intersection de la perpendiculaire en **C** à (**AB**) avec le demi-cercle de diamètre [**AB**]. Les droites (**AM**) et (**BM**) coupent les demi-cercles de diamètres [**AC**] et [**BC**] respectivement en **N** et **P**.

1. Montrer que l'aire de la figure hachurée est égale à l'aire du disque de diamètre [**CM**].
2. Montrer que la droite (**NP**) est tangente aux cercles de diamètres [**AC**] et [**BC**].

Académie de Versailles

Olympiades académiques de mathématiques de quatrième

Concours 2007

***

Mardi 24 avril 2007

Durée de l'épreuve : 2 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

***

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE
INRIA
partenaire de l'académie de Versailles

Exercice numéro 1

Deux mille sept 2 007

On considère le nombre

$$N = 200\ 720\ 072\ 007\ 2\ldots\ldots 720\ 072\ 007$$

écrit en copiant 2 007 fois les chiffres 2, 0, 0, 7 (N est un nombre de 8 028 chiffres).

1. N est-il divisible par 9 ?

2. N est-il divisible par 81 ?

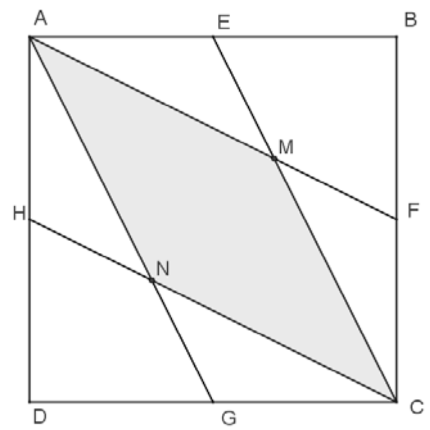
Exercice numéro 2

Losange médian

On considère un carré ABCD de côté 1 et les milieux E, F, G et H de ses côtés. Les droites (AF) et (EC) se coupent en M, les droites (AG) et (CH) se coupent en N.

1. Montrer que AMCN est un losange.

2. Déterminer l'aire du losange AMCN.



Exercice numéro 3

Fractions égyptiennes

1. On sait que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

Est-il possible de trouver des entiers naturels **distincts** a et b tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$?

2. Trouver deux entiers naturels distincts a et b tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$.

3. Trouver trois entiers naturels distincts a , b et c tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

4. Même question pour quatre entiers naturels distincts tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$.

5. Comment peut-on choisir 10 entiers naturels tous distincts tels que la somme de leurs inverses soit 1 ?
   Même question si on veut choisir 2 007 entiers naturels distincts.

Exercice numéro 4

La machine à rectangles pythagoriciens

Une unité de longueur est donnée dans le plan. Un rectangle est dit *pythagoricien* lorsque les longueurs de ses côtés et de sa diagonale sont des nombres entiers.

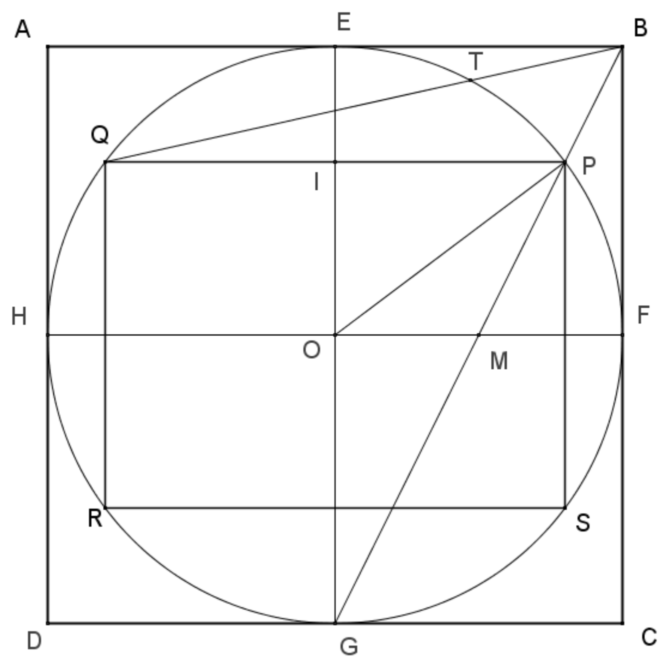
1. Les côtés d'un rectangle ont pour longueurs 3 et 4. Est-il pythagoricien ?

2. Les côtés d'un rectangle ont pour longueurs 65 et 72 est-il pythagoricien ?

3. Étant donné deux entiers naturels p et q tels que $p > q$, on considère un rectangle dont les côtés ont pour longueurs $p^2 - q^2$ et $2pq$. Est-il pythagoricien ?

4. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon 1, inscrit dans un carré ABCD. On désigne par E, F, G et H les milieux de [AB], [BC], [CD] et [DA] respectivement. Le segment [BG] recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en P. On s'intéresse au rectangle PQRS, inscrit dans le cercle, dont les côtés sont parallèles à ceux du carré. On note I le milieu de [PQ].

   a. Calculer les longueurs IP et IO des côtés de l'angle droit du triangle rectangle IOP.
   b. En déduire les longueurs des côtés du rectangle PQRS.

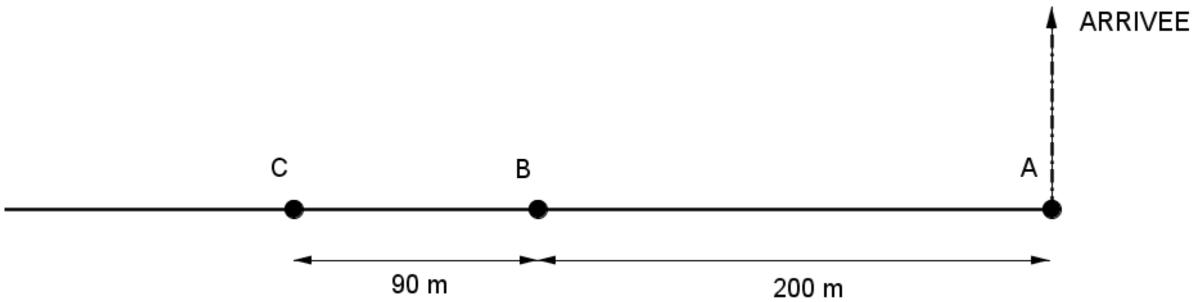


On peut également dire qu'un rectangle, comme PQRS, dont les côtés et la diagonale ont pour mesures des quotients d'entiers est *pythagoricien.* Le point T, second point d'intersection de [BQ] avec $\mathcal{C}$, est un sommet d'un nouveau rectangle pythagoricien inscrit dans le cercle et dont les côtés sont parallèles à ceux du carré.

Exercice numéro 1

Ils courent, ils courent...

Dans une course de 2 000 m, A finit 200 m avant B et 290 m avant C. Si B et C continuent à la même vitesse, où sera C quand B passera la ligne d'arrivée ?



Exercice numéro 2

La bonne mesure

Soit ABC un triangle rectangle en A. Les bissectrices de ce triangle issues de B et C coupent respectivement $[AC]$ en P et $[AB]$ en Q. Les perpendiculaires abaissées de P et Q sur $[BC]$ coupent $[BC]$ respectivement en M et N. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{MAN}$?

Exercice numéro 3

Le bon motif

Si on effectue le quotient de 1 par certains entiers, on fait apparaître des suites de décimales dans lesquels des motifs se répètent. Par exemple :

$\frac{1}{3} = 0{,}3333...$ (le motif 3 se répète),

$\frac{1}{7} = 0{,}142857\ 142857\ 142857...$ (le motif 142857 se répète)

$\frac{1}{37} = 0{,}027\ 027\ 027...$ (le motif 027 se répète)

1. Ces motifs sont plus ou moins longs. Quel motif obtient-on pour $\frac{1}{41}$? pour $\frac{1}{13}$?
2. Le motif obtenu pour le nombre $\frac{1}{97}$ possède 96 chiffres ; on ne demande pas de le calculer. Ce motif commence par $01030927...$. Quels sont ses trois derniers chiffres ?

Exercice numéro 4

Et à la fin, que reste-t-il ?

On écrit la liste des cent nombres : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ ... \ , \frac{1}{98}, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$, à laquelle on applique le procédé suivant : on choisit des nombres *a* et *b* dans la liste et on les remplace par le seul $a + b + ab$, puis on continue de même. À chaque étape, l'effectif perd une unité. À la fin, on ne peut plus continuer, il n'y a qu'un nombre.

1. Si on procède systématiquement et en commençant par la gauche :
   a. Quelle liste obtient-on après la première étape ? Après la deuxième ?
   b. Quel nombre obtient-on après les 99 étapes ?

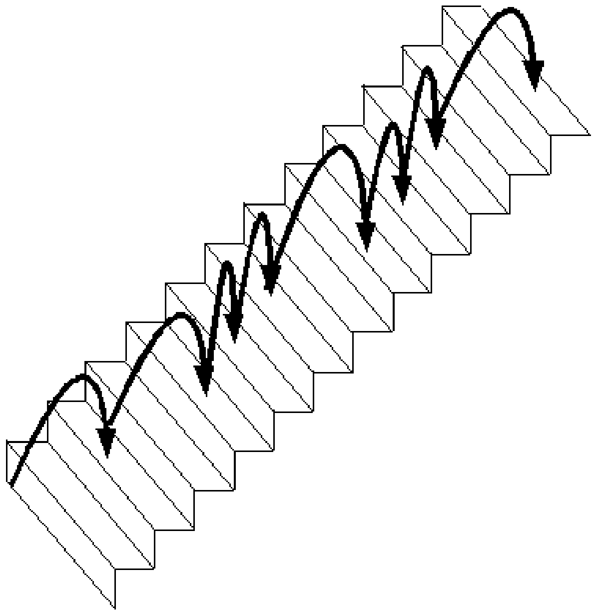
2. Et si on commence par la droite ?

3. Si on procède au hasard, quels résultats peut-on obtenir ?

Exercice numéro 1

L’escalier

On peut monter un escalier une ou deux marches à la fois. La figure de droite montre un exemple.



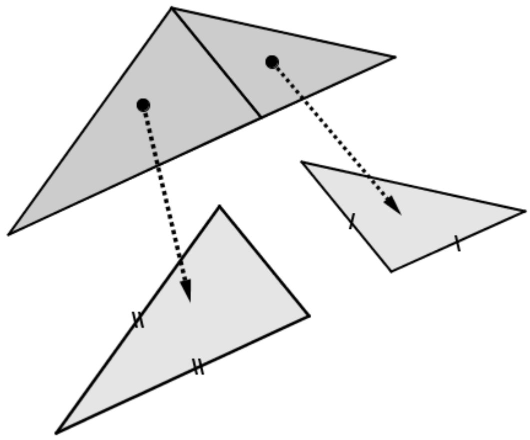
1. De combien de façons différentes peut-on monter un escalier de une marche ? de deux marches ? de trois marches ? de quatre marches ? de cinq marches ?

2. De combien de façons différentes peut-on monter un escalier de 20 marches ?

Exercice numéro 2

Découpages et assemblage

Le but du problème est la décomposition de certains triangles en deux triangles isocèles.
L’usage des instruments traditionnels (équerre, règle graduée, compas, rapporteur) est autorisé et sans doute nécessaire. Il est rappelé que les problèmes de construction appellent une argumentation rédigée.



Un découpage possible

(la figure n’est pas juste)

1. On considère un triangle rectangle ABC. Décomposer ce triangle en deux triangles isocèles.

2. *a.* On considère un triangle DEF. L’angle de sommet E mesure 35 degrés et l’angle de sommet F mesure 70 degrés.
Décomposer ce triangle en deux triangles isocèles.

b. Construire un triangle GHI différent des deux précédents tel que l'on puisse le décomposer en deux triangles isocèles.

3. On considère un triangle KLM isocèle et d’angle à la base de mesure *x*. Comment lui accoler un autre triangle isocèle afin d’obtenir un nouveau triangle isocèle ?

Exercice numéro 3

Des un avec des neuf

1. Calculer les sommes : $a = 99 + 999$ et $b = 99 + 999 + 9999$.

2. On considère le nombre N défini comme la somme :

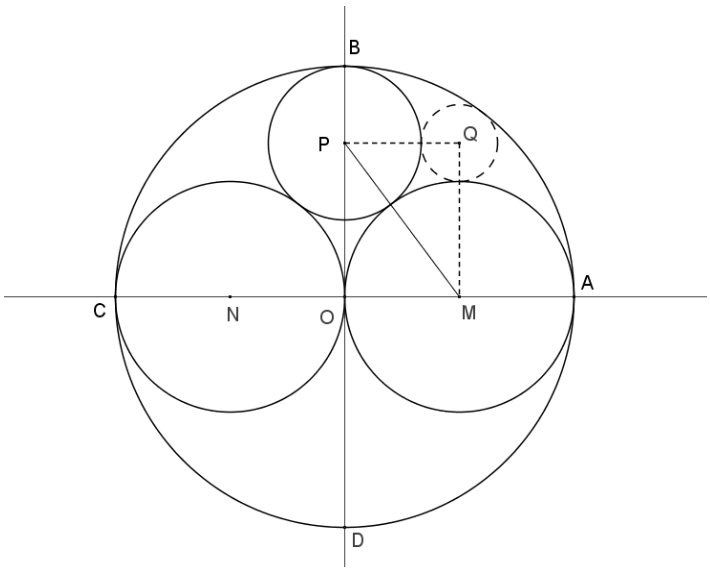
$$N = 99 + 999 + 9999 + ... + 9999999 \cdots 999$$

Le premier terme de cette somme s'écrit avec deux chiffres 9 ; on ajoute les nombres s'écrivant avec trois puis quatre chiffres 9, etc. Le dernier terme de la somme s'écrit avec cent chiffres 9.

On effectue la somme et on écrit N en écriture décimale ordinaire. Combien de fois le chiffre 1 apparaît-il dans cette écriture ?

Exercice numéro 4

Faites-moi une petite place



On considère un cercle $\mathbf{C}_0$, de centre O et de rayon 6, et deux diamètres perpendiculaires $[AC]$ et $[BD]$ de ce cercle. On désigne par M et N les milieux de $[AO]$ et $[OC]$. On note $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$ les cercles de rayon 3 et de centres respectifs M et N.

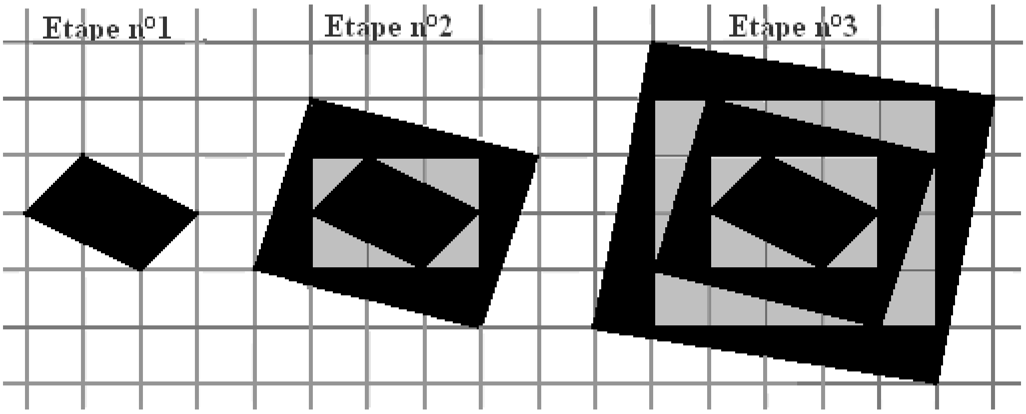
1. Déterminer la position du centre P et le rayon du cercle $\mathbf{C}_3$ tangent aux cercles $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$ (on rappelle que les centres de deux cercles tangents et leur point de contact sont alignés).

2. Montrer que, si on appelle Q le centre du cercle $\mathbf{C}_4$ tangent aux cercles $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_3$, le quadrilatère MOPQ est un rectangle. Quel est le rayon du cercle $\mathbf{C}_4$?

Exercice 1

Noir et Blanc

On construit une suite de motifs selon un procédé dont les trois premières étapes sont représentées ci-dessous.



L'unité d'aire est le carreau de quadrillage.

1. Pour chacune des étapes 2 et 3 :
   a. Déterminer l'aire totale des parties intérieures claires ;
   b. Déterminer l'aire totale des parties noires.

2. On poursuit le processus.
   a. Quelle est, à l'étape 4, l'aire totale des parties intérieures claires ? Et celle des parties noires ?
   b. Et à l'étape 20 ?

Exercice 2

Nombres à la chaîne

1	→	**2**		**9**	→	**10**		**25**	→
		↓		↑		↓		↑	
4	←	**3**		**8**		**11**		**24**	
↓				↑		↓		↑	
5	→	**6**	→	**7**		**12**		**23**	
						↓		↑	
16	←	**15**	←	**14**	←	**13**		**22**	
↓								↑	
17	→	**18**	→	**19**	→	**20**	→	**21**	

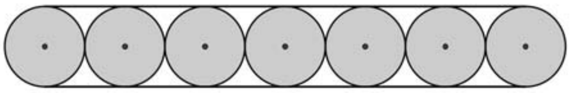
Les entiers consécutifs 1, 2, 3, 4, etc. sont disposés dans les cases d'un tableau selon le schéma ci-contre. Le nombre 8 se trouve à l'intersection de la deuxième ligne et de la troisième colonne. Le nombre 13 se trouve à l'intersection de la quatrième ligne et de la quatrième colonne.

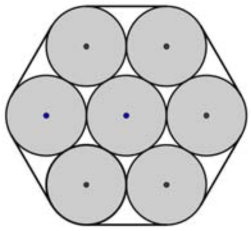
Quel nombre se trouve à l'intersection de la vingt-cinquième ligne et de la vingt-cinquième colonne ?

Exercice 3

Le meilleur emballage

On emballe sept tuyaux cylindriques de diamètre 20 cm en les entourant de ruban adhésif. On peut les disposer à plat ou en fagot comme le montrent les figures ci-dessous.





Quelle est dans chacun des cas la longueur d'un tour de ruban adhésif ?

Exercice 4

Découpage(s) gagnant(s)

Sur une feuille de papier, on a dessiné des triangles équilatéraux de dimensions identiques juxtaposés, dont un seul est noir, de sorte qu'en suivant le support d'un des côtés de ces triangles on puisse couper la feuille en deux en un seul coup de ciseaux. Voici trois exemples de telles figures.

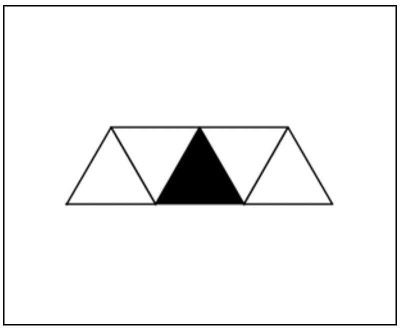


Figure 1

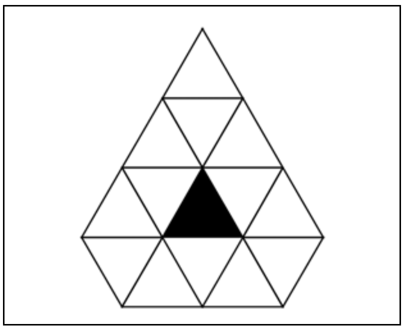


Figure 2

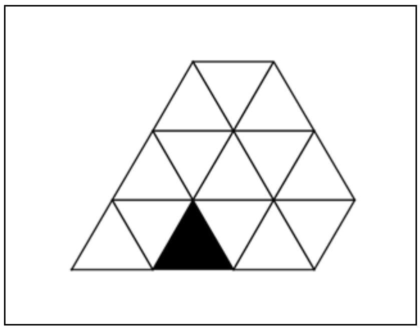


Figure 3

1. Amandine et Benjamin jouent à un jeu, avec la figure 1 ci-dessus. Amandine commence par faire un découpage suivant un des segments. Elle donne la partie contenant le triangle noir à Benjamin, et jette la partie restante. A son tour, Benjamin fait un découpage suivant un des segments, donne la partie contenant le triangle noir à Amandine, et jette la partie restante. Le jeu se poursuit ainsi, et le gagnant est celui qui reçoit au début de son tour uniquement le triangle noir.
   Démontrer, en l'expliquant, que si Benjamin joue bien, il est sûr de toujours gagner.

2. Amandine et Benjamin jouent désormais au même jeu, mais avec la figure 2 ci-dessus. Comme dans le jeu précédent, ils doivent couper la figure en deux en suivant le support d'un segment.
   Amandine joue la première. Que peut-elle faire pour gagner à coup sûr ?

Exercice 1 : Des heures carrées

Pierre est un passionné des nombres. Il a dans sa voiture une horloge digitale à quatre chiffres qui indique l'heure de 00 : 00 à 23 : 59.
Au moment de partir pour un long déplacement, Pierre observe son horloge et constate que les deux nombres indiqués, celui des minutes et celui des heures, sont des carrés de nombres entiers (qui, sur une horloge digitale, s'écrivent sous la forme : 00, 01, 04, 09, 16, 25,…)
Au retour de son voyage, Pierre constate que son horloge affiche de nouveau des carrés de deux nombres entiers. Son ordinateur de bord lui indique qu'il a parcouru 352 km en 4 heures et 20 minutes.
Quand Pierre peut-il être rentré de son voyage ?

Exercice 2 : Barrières puzzle

On dispose, pour clôturer un terrain rectangulaire, de sept barrières rectilignes de longueurs 11m, 10m, 9m, 7m, 4m, 3m et 2m. On se propose de rechercher les aires des terrains qu'il est possible d'entourer ainsi.

1. Sachant que toutes les barrières sont utilisées à chaque fois, calculer le périmètre des terrains possibles.
2. Compléter le schéma commencé par Adèle afin qu'il réponde au problème posé.

3. Marc prétend qu'il est impossible de trouver un terrain de largeur 7 m. A-t-il raison ?
4. Trouver toutes les aires des terrains qu'il est possible d'entourer.

Exercice 3 : Partie de fléchettes

On joue aux fléchettes sur une cible comportant trois zones : une à 5 points, une à 7 points et une à 11 points. On s'intéresse aux différents scores possibles, le nombre de fléchettes n'étant pas limité.

Par exemple 30 est un score possible puisque 30 = 11+7+7+5 ou 30 = 5 +5 +5 +5 +5 +5.

1. Vérifier que 26, 43, 220 012 sont des scores possibles.

2. On dit que deux jeux sont identiques si, pour chacun d'entre eux, chaque zone de la cible comporte le même nombre de fléchettes. Par exemple les jeux correspondant aux scores : 7 + 5 + 5 + 11 et 5 + 7 + 11 + 5 sont identiques.
   a. Trouver quatre jeux différents donnant le score 40.
   b. Démontrer qu'il existe deux jeux différents et deux seulement correspondant au score 34.

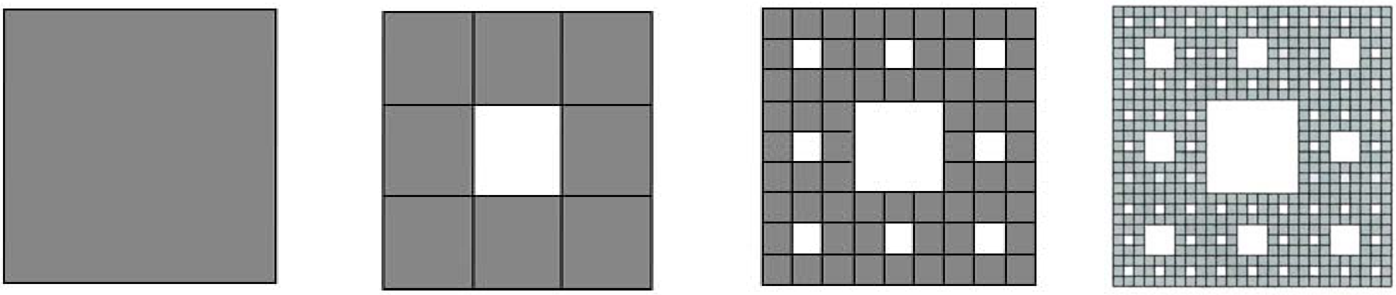
3. Trouver tous les scores que l'on peut obtenir avec un lancer de trois fléchettes ayant toutes atteint la cible. Présenter les résultats de manière organisée.

4. *a*. Démontrer que 14 et les quatre entiers suivants sont des scores possibles.
   b. Déterminer la liste des entiers positifs non nuls qui ne correspondent à aucun score.

Exercice 4 : Creusez de plus en plus mais de moins en moins

1. la carpette de Sierpinski

On considère un carré de côté 27.
A chaque étape, on enlève le carré central de chaque carré gris.

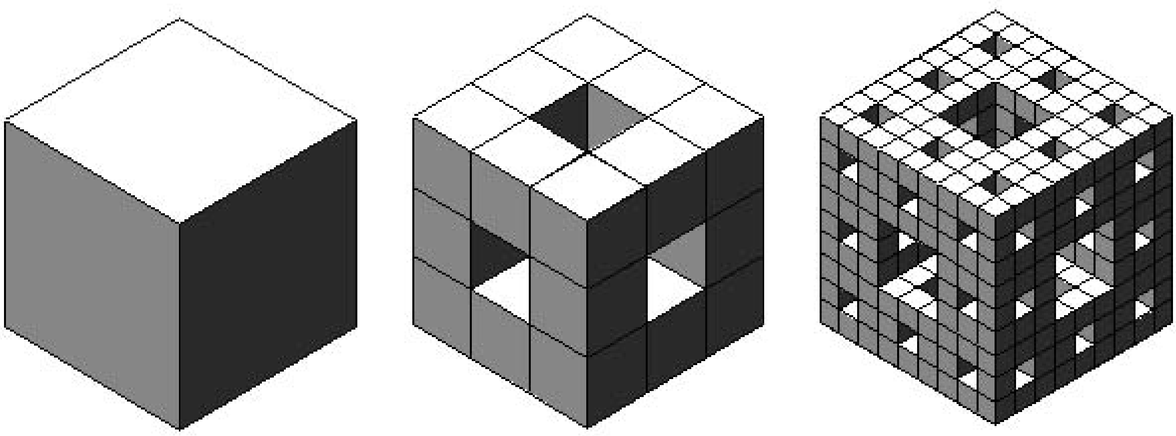


étape 0 étape 1 étape 2 étape 3

A quelle étape l'aire de la carpette devient-elle inférieure à la moitié de l'aire initiale ?

2. L'éponge de Sierpinski

On considère à présent un cube d'arête *a*.
A chaque étape, on évide chaque cube de sept petits cubes à l'intérieur comme ci-dessous.



étape 0 étape 1 étape 2

A quelle étape le volume de l'éponge devient-il inférieur à la moitié du volume initial ?

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DE LA VIE ASSOCIATIVE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Olympiades académiques de mathématiques

Mardi 3 avril 2012

Classes de quatrième

Durée de l'épreuve : 2 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

Les quatre exercices sont à traiter. Toute trace de recherche sera prise en compte dans l'évaluation des copies ; toute argumentation correcte, qu'elle soit de nature géométrique, calculatoire, dichotomique ou autre sera valorisée.

partenaire de l'académie de Versailles

Exercice 1 : la grille infernale

On place des nombres dans des grilles 3 sur 3 selon le principe suivant :
Trois nombres placés sur une même ligne horizontale, sur une même colonne verticale ou sur une même diagonale sont tels que celui du milieu est la demi-somme des deux autres.

1. En appliquant ce principe, déterminer les nombres manquant dans la grille suivante :

3		19
8		

2. Déterminer la somme des neuf nombres de la grille suivante (dans laquelle *a* désigne un nombre donné) si on la remplit suivant le même principe :

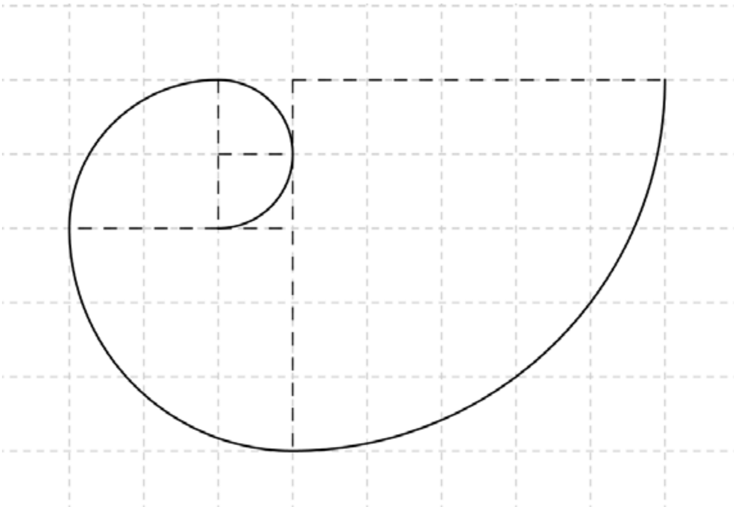
a		
5		23

3. Déterminer les nombres x et y si la grille est complétée en appliquant toujours le même principe :

x	7	
9		y
		20

Exercice 2 : une spirale

Une telle spirale est obtenue en traçant successivement des quarts de cercle de rayon de plus en plus grand.
Le premier quart de cercle a un rayon de 1, comme le deuxième. Le troisième quart de cercle a un rayon de 2, le quatrième de 3, le suivant de 5.



1. Quel est le rayon du sixième quart de cercle ? du septième ? du dixième ?

2. Le rayon du quinzième quart de cercle est 610 et celui du seizième est 987. Quel est le rayon du dix-septième ?

3. Quel est le rayon du vingtième quart de cercle ?

partenaire de l'académie de Versailles

Exercice 3 : billes en sacs

1. On place 25 billes dans un sac, 16 billes dans un autre. On dispose par ailleurs d’un nombre suffisant de billes pour réaliser les opérations suivantes, seules autorisées :

- Ôter le même nombre de billes de chaque sac ;
- Doubler le nombre des billes se trouvant dans un des deux sacs.

Avec une succession de telles opérations, est-il possible de vider simultanément les deux sacs ?

2. On place deux billes dans un sac et une bille dans l’autre. Les opérations suivantes sont les seules autorisées :

- Ôter le même nombre de billes de chaque sac ;
- Tripler le nombre des billes se trouvant dans un des deux sacs.

Avec une succession de telles opérations, est-il possible de vider simultanément les deux sacs ?

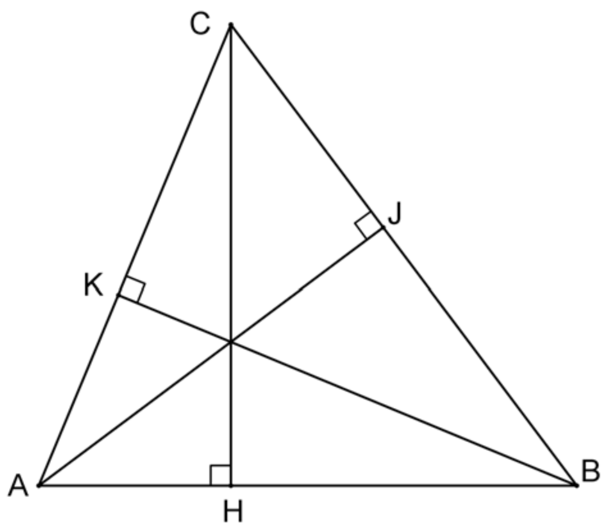
Exercice 4 : des triangles et des nombres

Le triangle ABC ci-contre est tel que
AC = 13, AB = 14 et BC = 15.
Soit H, J, K les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets C, A, B.

1. Montrer que CH est un nombre entier.

2. Montrer que AJ est un nombre décimal et que BK est un quotient d’entiers.

3. Proposer un triangle dont les trois côtés et les trois hauteurs aient pour longueurs des nombres entiers.



MINISTÈRE DE
L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE
L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Olympiades académiques de mathématiques

Classes de quatrième

Concours René Merckhoffer

Jeudi 4 avril 2013

Durée de l'épreuve : 2 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE
partenaire de l'académie de Versailles

Exercice 1 : des tables égyptiennes

Les Égyptiens n'utilisaient que des fractions de numérateur 1, à l'exception de la fraction $\frac{2}{3}$.

Pour trouver le double de leurs fractions de numérateur 1, on disposait de tables dont l'utilisation est décrite ci-dessous:

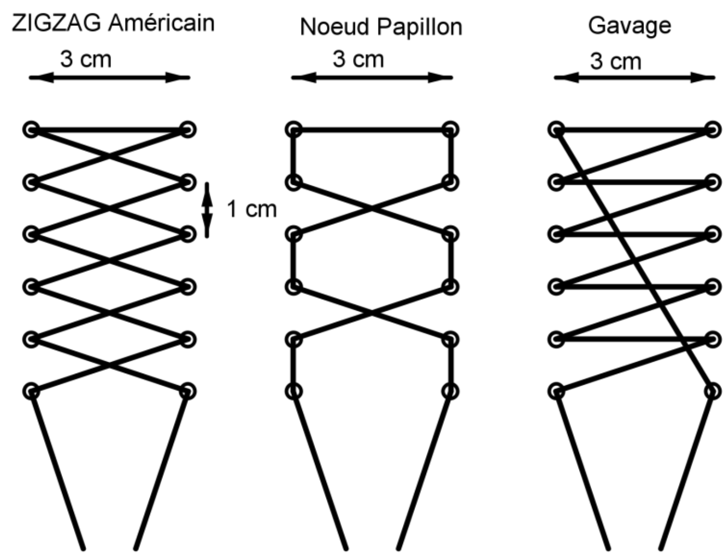
Par exemple, le double de $\frac{1}{5}$ est $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$.

5	3	15	
7	4	28	
9	6	18	
11	6	66	
13	8	52	104
15	10		
17		51	68

1. Interpréter la troisième ligne de la table.
2. Il manque un nombre dans la ligne du 15 et un dans la ligne du 17. Retrouver ces deux nombres.
3. Pourquoi n'y a-t-il que des nombres impairs dans la première colonne?

Exercice 2 : les lacets

Il existe plusieurs façons de lacer des chaussures. En voici trois :



Quel est le laçage le plus long ?

(On ne tient pas compte de la longueur des brins qui servent à faire un nœud).

Exercice 3 : Vrai – Faux

Ludovic doit répondre à un test de 25 questions. Les réponses sont « Vrai » ou « Faux ». Son professeur de mathématiques donne l'indication suivante : dans toute série de 5 réponses consécutives il y a exactement trois réponses « Vrai ».

1. Pourquoi la liste suivante ne convient-elle pas ?

Question 1	V
Question 2	F
Question 3	V
Question 4	V
Question 5	F
Question 6	F
…..	….

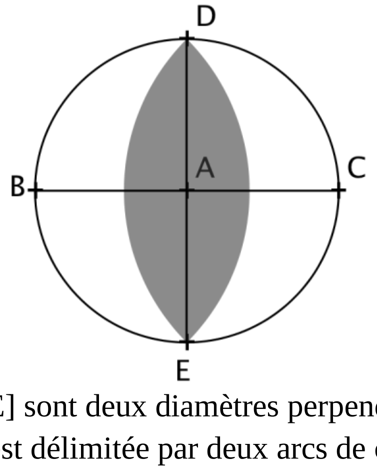
2. Combien y a-t-il de réponses « Vrai » dans la liste des 25 réponses ?

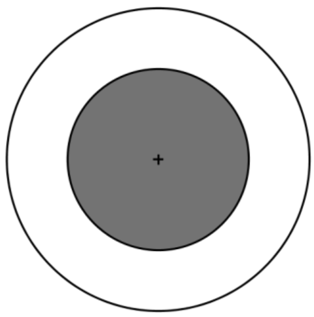
3. Le professeur indique que la réponse à la première question est « Faux ».
   Ludovic affirme qu'il connait la réponse à la sixième sans avoir lu les questions. Comment a-t-il fait ?

4. Le professeur souffle à Ludovic que la réponse à la dernière question est également « Faux ».
   Ludovic affirme qu'il peut maintenant trouver toutes les réponses sans lire les questions.
   A-t-il raison ?

Exercice 4 : dans les yeux

On schématise les yeux par des disques de rayon 5 mm.

<table>
<tr><td>œil de chat


</td><td>œil de lapin
</td></tr>
<tr><td>[BC] et [DE] sont deux diamètres perpendiculaires. La pupille est délimitée par deux arcs de cercles de centres respectifs B et C, passant par D.</td><td>La pupille est délimitée par un cercle de même centre que l'œil et de rayon 3 mm.</td></tr>
</table>

Lequel de ces deux yeux a la plus grande pupille ?

MINISTÈRE DE
L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE
L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académies d'Amiens, de Caen, de la Corse,

de Grenoble, de Rouen et de Versailles

Classes de quatrième

Concours René Merckhoffer

Jeudi 3 avril 2014

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Les calculatrices sont autorisées.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

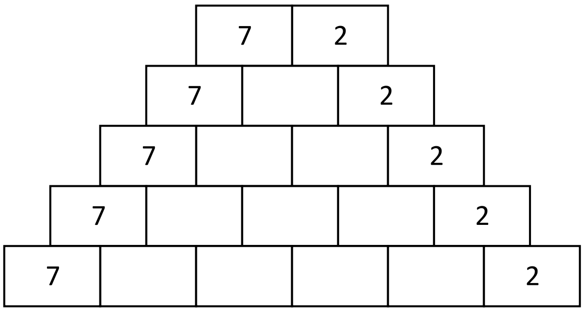
Partenaire de l'académie de Versailles

Exercice 1

Des pyramides de Pascale

On appelle pyramide de Pascale un empilement de cases complétées de la manière suivante :

- on choisit deux nombres entiers positifs m et n ;
- le premier nombre de chaque ligne est égal à m (dans l'exemple ci-dessous $m = 7$) ;
- le dernier nombre de chaque ligne est égal à n (dans l'exemple ci-dessous $n = 2$) ;
- un nombre inscrit dans une case est égal à la somme des nombres inscrits dans les deux cases situées juste au-dessus.



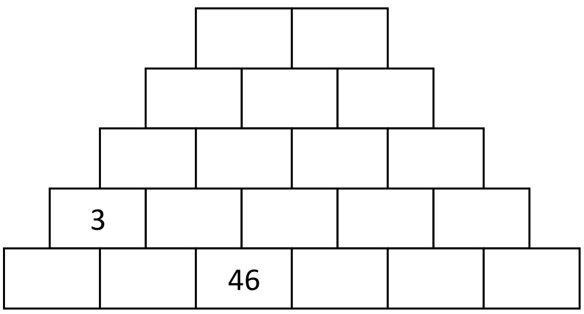
Exemple de pyramide de Pascale avec $m = 7$ et $n = 2$.
On n'a représenté ici que les cinq premières lignes.

1. a. Reproduire et compléter l'exemple de pyramide de Pascale ci-dessus.
   b. Pour chaque ligne, calculer la somme des nombres figurant sur celle-ci.
   Que remarque-t-on ?

2. Si l'on considère la pyramide de Pascale associée aux nombres entiers $m = 1$ et $n = 1$, sur quelle ligne la somme des nombres sera-t-elle égale à 1024 ?

3. Prouver que, pour des nombres entiers m et n quelconques, la somme des nombres de la quatrième ligne est égale au double de la somme des nombres de la troisième ligne.

4. Compléter la pyramide de Pascale ci-dessous.



Partenaire de l'académie de Versailles

Exercice 2

La frise

Christophe a découpé quarante formes identiques à celle représentée ci-dessous (*figure 1*).
Il a commencé à les assembler en une frise régulière (*figure 2*).
Lorsqu'il aura fini de poser la quarantième forme, quel sera le périmètre de la frise ainsi créée ?

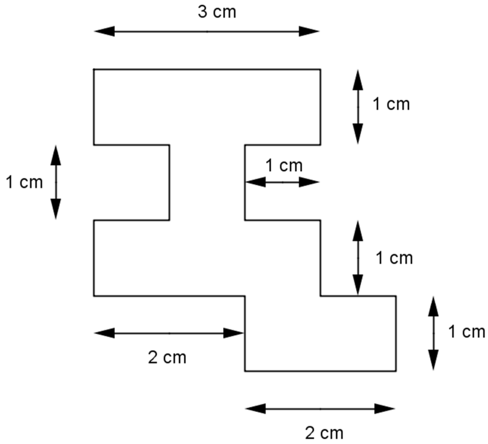


Figure 1

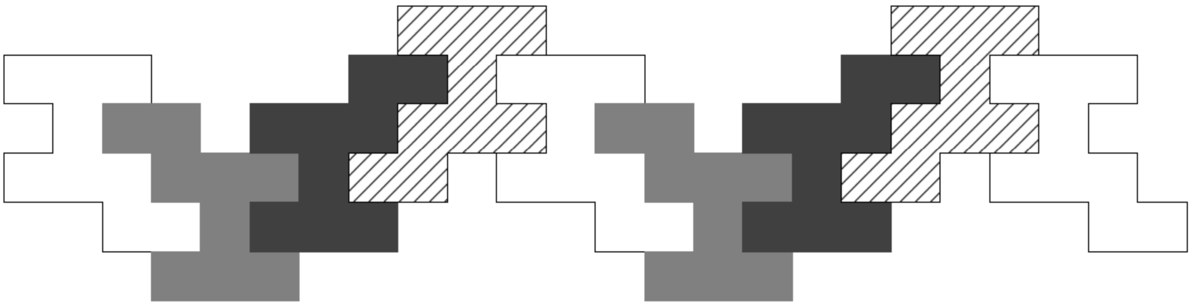


Figure 2

Exercice 3

Le tableau

On considère le tableau ci-dessous dont seulement quelques lignes – les premières – sont ici présentées, et certaines remplies.

A	B	C	D	E
	1	4	7	
22	19	16	13	10
	25	28	31	
46	43	40	37	34
	49	…	…	
…	…	…	…	…

Expliquer pourquoi le nombre 2 014 figure dans ce tableau.
Déterminer la ligne et la colonne du tableau correspondant.

Exercice 4

D’une distance à l’autre

On considère deux points A et B tels que : AB = 10.
Sur le segment [AB], on place le point C tel que : AC = 6 (et par conséquent : CB = 4).
D’un même côté de la droite (AB), on place les points D et E tels que : DC = DB = 3, EA = 8 et EC = 6.
Calculer la distance DE.

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Classes de quatrième

Concours René Merckhoffer

Jeudi 2 avril 2015

Durée de l'épreuve : 2 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

Partenaire de l'académie de Versailles

Exercice 1 : Course poursuite

Une course à pied d'un type nouveau a été créée récemment.

Les coureurs partent tous en même temps et n'ont pas de ligne d'arrivée à franchir. Une voiture part à leur poursuite une demi-heure plus tard. Tout coureur dépassé par la voiture est éliminé. Le dernier coureur dépassé est alors déclaré vainqueur de la course.

L'objectif de chaque coureur est donc de parcourir la plus grande distance possible, avant d'être rattrapé par la voiture.

Voici l'organisation de la course :

- Les coureurs s'élancent à 10 heures du matin.
- La voiture qui les poursuit démarre 30 minutes plus tard. Elle accroît sa vitesse progressivement :

  Pendant la première heure, elle roule à 15 km.h^{-1}.
  L'heure suivante, elle roule à 16 km.h^{-1}.
  L'heure suivante, elle roule à 17 km.h^{-1}.
  Les deux heures suivantes, elle roule à 20 km.h^{-1}.
  Elle stabilise ensuite sa vitesse à 35 km.h^{-1}.

1. Robert s'est fait rattraper par la voiture une heure après son départ. Quelle distance a-t-il parcourue ?
2. Michèle s'est fait rattraper par la voiture deux heures après son départ. À quelle vitesse moyenne a-t-elle couru ?
3. Philippe a parcouru 30 km avant d'être rattrapé. À quelle heure a-t-il été repris par la voiture ?
4. Le vainqueur de la course de l'an passé a parcouru 78 km.
   Combien de temps a-t-il couru, et à quelle vitesse moyenne ?
5. Victoire pense cette année pouvoir courir pendant des heures à 14 km.h^{-1}.
   Si elle y parvient, quelle distance parcourra-t-elle ?

Exercice 2 : Coupe du monde

Camille et Dominique ont trouvé une façon originale de disposer dans un album les 250 photographies constituant leur collection de portraits de champions :

« Nous avons mis sur la première page la photo de notre champion préféré. Ensuite, chaque page contient soit le même nombre de photos que la précédente, soit le double »

Combien l'album comporte-t-il de pages au minimum ?

Exercice 3 : Un programme de calcul

Voici un programme de calcul :
Soit N un nombre entier naturel écrit dans le système décimal

Étape n°1 : Repérer le chiffre X des unités de N.

Étape n°2 : Calculer $N - X$. Soit M le nombre obtenu.

Étape n°3 : Diviser M par 10. Soit D le nombre obtenu.

Étape n°4 : Calculer $D + 2X$. Soit R le nombre obtenu.

Étape n°5 : Si R est différent de N, alors passer à l'étape n° 6. Sinon, arrêter et afficher R.

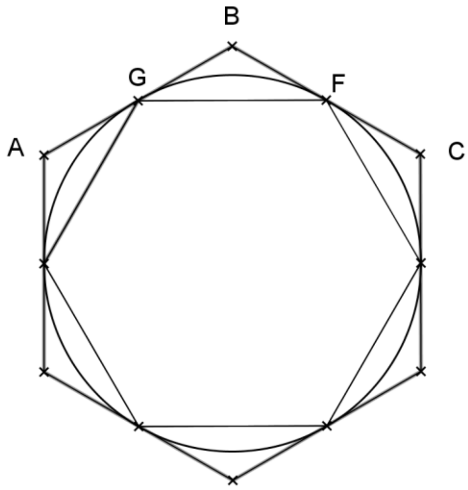
Étape n°6 : Si R s'écrit avec un seul chiffre, alors arrêter et afficher R. Sinon, donner à N la valeur R et reprendre le programme de calcul à l'étape n°1.

1. Quel résultat affiche-t-on lorsqu'on introduit $N = 15$ dans le programme de calcul ?
2. Que se passe-t-il lorsqu'on introduit $N = 2\,015$ dans le programme de calcul ?
3. Quels sont les nombres susceptibles de figurer à l'affichage final ?

Exercice 4 : Hexagones gigognes

Soit H_1 un hexagone régulier inscrit dans un cercle et H_2 un hexagone régulier circonscrit au même cercle.
Sur la figure ci-dessous (qui n'est pas en vraie grandeur), les points A, B et C désignent trois sommets consécutifs de l'hexagone H_2 et les points G et F sont, d'une part les milieux respectifs des segments [AB] et [BC], d'autre part deux sommets consécutifs de l'hexagone H_1.
L'hexagone H_2 a une aire de 340 cm².

Quelle est celle de l'hexagone H_1 ?



académie Versailles

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Olympiades académiques de mathématiques

Classes de quatrième

Concours René Merckhoffer

Mardi 29 mars 2016

Durée de l'épreuve : 2 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE
Partenaire de l'académie de Versailles

Exercice 1
Décathlon

Le décathlon est une compétition d'athlétisme qui se déroule sur dix épreuves. Les performances réalisées sur chacune de ces épreuves sont converties en points. C'est le total des points sur les 10 épreuves qui détermine le vainqueur de la compétition.
Le tableau ci-dessous donne le nombre de points obtenus selon la performance réalisée sur chaque épreuve.

Discipline	**1 000 pts**	**950 pts**	**900 pts**	**850 pts**	**800 pts**	**750 pts**	**700 pts**
Course 100 m (temps en secondes)	10,39	10,6	10,82	11,05	11,27	11,51	11,75
Saut en longueur (en mètres)	7,76	7,56	7,36	7,15	6,95	6,73	6,51
Lancer du poids (en mètres)	18,4	17,59	16,79	15,98	15,16	14,35	13,53
Saut en hauteur (en mètres)	2,21	2,16	2,11	2,05	2	1,94	1,89
Course 400 m (temps en secondes)	46,17	47,17	48,19	49,24	50,32	51,43	52,58
Course 110 m haies (temps en secondes)	13,81	14,19	14,59	15	15,41	15,85	16,29
Lancer du disque (en mètres)	56,18	53,8	51,4	49	46,6	44,16	41,72
Saut à la perche (en mètres)	5,29	5,13	4,97	4,8	4,64	4,46	4,3
Lancer du javelot (en mètres)	77,2	73,94	70,68	67,4	64,1	60,78	57,46
Course 1 500 m (temps en min. sec.)*	3'53"79	4'00"53	4'07"42	4'14"5	4'21"77	4'29"25	4'36"96

* 3'53''79 se lit 3 min 53 s et 79 centièmes de seconde

1. Combien de points obtient un athlète qui réalise 50,32 secondes lors de la course de 400 mètres ?
2. Quelle hauteur a été franchie en saut à la perche par un athlète ayant obtenu 850 points ?

Si la performance réalisée n'est pas dans ce premier tableau, on procède à un ajustement à l'aide du suivant :

Table internationale de décompte

Course 100 m (temps en secondes)	0,10 sec = 22 points	puis	10 points = 0,05 sec
Saut en longueur (en mètres)	10 cm = 24 points	puis	10 points = 4 cm
Lancer du poids (en mètres)	50 cm = 30 points	puis	10 points = 15 cm
Saut en hauteur (en mètres)	3 cm = 28 points	puis	10 points = 1 cm
Course 400 m (temps en secondes)	0,50 sec = 24 points	puis	10 points = 0,20 sec
Course 110 m haies (temps en secondes)	0,10 sec = 12 pts	puis	10 points = 0,08 sec
Lancer du disque (en mètres)	1 m = 20 points	puis	10 points = 50 cm
Saut à la perche (en mètres)	10 cm = 30 points	puis	10 points = 3 cm
Lancer du javelot (en mètres)	1 m = 15 points	puis	10 points = 65 cm
Course 1 500 m (temps en min. sec.)*	5 sec = 33 points	puis	10 points = 1,5 sec

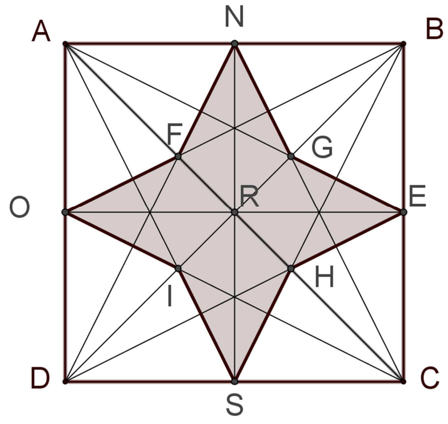
3. À l'aide de ce tableau, expliquer pourquoi un athlète qui réalise 1,98 m au saut en hauteur marque 788 points.
4. Combien de points obtient-on avec 16,63 mètres au lancer du poids ?
5. Lors d'une compétition, après les 9 premières épreuves, l'athlète Jo Lympik possède 7802 points et est premier au classement provisoire. Le deuxième, Jean Trouvepa, est très proche de lui avec 7778 points. Jean Trouvepa a réalisé un temps de 4'24''25 lors de la dernière épreuve, le 1500 mètres.

Quel temps maximal doit réaliser Jo Lympik pour rester premier et gagner ce décathlon ?

Exercice 2
Rose des vents

Une rose des vents a été construite dans un carré ABCD de centre R, de 12 cm de côté.

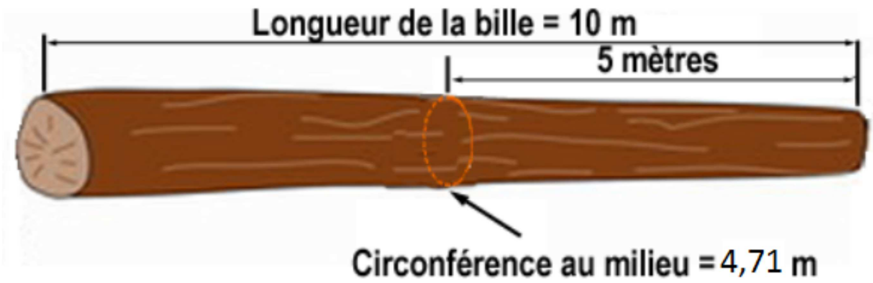
Tous les segments apparents sur la figure ci-contre joignent des points appartenant à l'ensemble des sommets et des milieux des côtés du carré.



Quelle est l'aire de la rose représentée en gris sur la figure ?

Exercice 3
Bille de bois

Un bûcheron a vendu sur pied un chêne dont il a mesuré certaines dimensions.



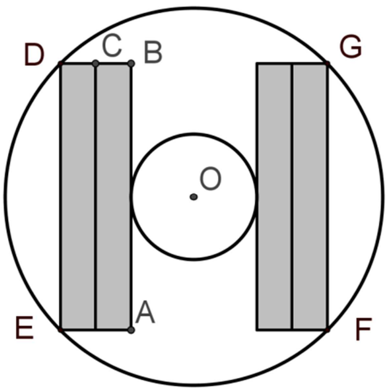
Pour estimer le volume du tronc, le bucheron effectue :

$$\frac{4{,}71 \times 4{,}71 \times 10}{4 \times 3{,}14}.$$

1. On suppose, comme le bûcheron, que le tronc est modélisé par un cylindre. Expliquer le calcul du bûcheron.
2. Quel est le rayon du tronc (on en donnera l'arrondi au cm) ?

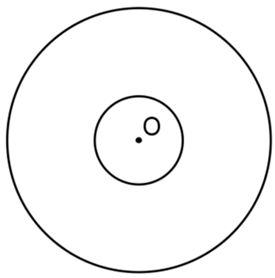
Lors de la découpe, on découvre avec surprise que le cœur de la bille de bois est abîmé sur un rayon de 25 cm.

On envisage de découper dans le tronc quatre poutres identiques en forme de parallélépipède rectangle.



3. ***a.*** Les quatre poutres sont découpées comme le montre la figure de gauche, dans laquelle le quadrilatère EFGD est un carré. Calculer la largeur AB d'une poutre.
b. Calculer l'épaisseur BC d'une poutre.
c. Calculer le volume de bois perdu.

4. Reproduire la figure de droite et indiquer comment on pourrait procéder à un autre découpage du tronc pour obtenir quatre poutres plus épaisses (on ne demande pas un schéma à l'échelle).



TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT

Exercice 4
Longueurs sur un segment

On place sur un segment [AE] trois points B, C et D, dans cet ordre, comme sur la figure ci-dessous.

Ces cinq points déterminent 10 longueurs : AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE

On appelle *Somme* de [AE] la somme de ces 10 longueurs.

1. Quelle est la *Somme* de [AE] quand AB = BC = CD = DE ?

2. Montrer qu'il n'est pas possible de placer sur un segment [AS] trois points P, Q et R tels que les 10 longueurs déterminées soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

3. On place, de gauche à droite, sur un segment [AJ] les points A, B, C, D, E, F, G, H et I tels que :
$\mathrm{AB}=1$, $\mathrm{BC}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{CD}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{DE}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{EF}=\frac{1}{5}$, $\mathrm{FG}=\frac{1}{6}$, $\mathrm{GH}=\frac{1}{7}$, $\mathrm{HI}=\frac{1}{8}$, $\mathrm{IJ}=\frac{1}{9}$
Calculer la *Somme* de [AJ].

académie
Versailles

RÉGION ACADÉMIQUE
ÎLE-DE-FRANCE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Olympiades académiques de mathématiques

Classes de quatrième

Concours René Merckhoffer

Concours organisé en commun par les académies d'Amiens, Besançon, Caen, la Corse, Grenoble, Lyon, Reims, Rouen et Versailles

Mardi 28 mars 2017

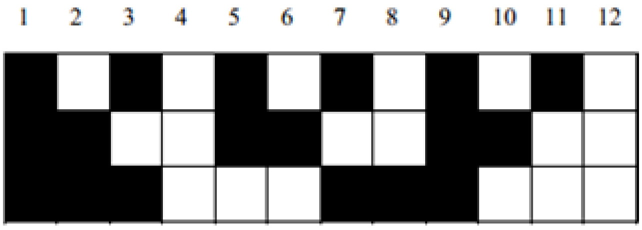
Durée de l'épreuve : 2 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

Exercice 1

La frise

Une frise est réalisée en recopiant vers la droite le motif constitué par les douze colonnes représentées ci-dessous.



Chaque colonne de la frise est codée par trois symboles, 000 si les trois cases (de la colonne) sont blanches, 001 si les deux cases supérieures sont blanches et la troisième noire… et enfin 111 si les trois cases sont noires.

1. Comment est codée la colonne 10 de la frise ? Même question pour la colonne 14.
2. Dans le **motif** ci-dessus, quelles sont les colonnes codées 100 ?
3. On se donne un entier n. Comment la colonne $12n + 5$ est-elle codée ?
4. Comment la colonne 2 017 est-elle codée ?

Exercice 2

Covoiturage

Monsieur A doit effectuer en voiture un voyage de 350 km (sans péage). Il doit prendre en route quatre autres personnes, madame B, monsieur C, madame D et monsieur E, qui se rendent au même endroit que lui. Il récupère madame B après 60 km de route puis roule encore pendant 60 km avant de prendre en charge monsieur C et madame D. Il prend en charge monsieur E à 200 km de l’arrivée.
La dépense en carburant est estimée à 36,40 €.

On envisage différents modes de partage pour la répartition des frais entre tous les occupants de la voiture.

1. **Premier mode :** chacun paie la même somme. Quelle est cette somme ?
2. **Deuxième mode :** la part de chacun est proportionnelle à la distance qu’il a parcourue dans la voiture. Quelle est la part de chacun ?
3. **Troisième mode :** la part de chacun se calcule en prenant en compte, sur chacun des tronçons, le nombre de personnes présentes dans la voiture. Quelle est la part de chacun ?

Exercice 3

Loto nouveau

Lors d'une partie de Loto, chaque joueur reçoit des cartes sur lesquelles sont inscrits des nombres entiers. Des jetons numérotés sont tirés au sort et le numéro porté par chacun est annoncé à haute voix. On gagne lorsque tous les nombres d'une ligne de sa carte ont été annoncés.

3	4	5
12	13	14
28	29	30

Ce soir, les règles ont un peu varié.

L'organisateur distribue des cartes sur lesquelles figurent neuf nombres répartis en trois lignes de trois nombres consécutifs (le tableau ci-dessus est un exemple d'une telle carte).

1. L'organisateur annonce : « un lot est offert à qui complète une ligne de nombres dont la somme est 41 ». Peut-on gagner ?
2. L'organisateur annonce : « un lot est offert à qui complète une ligne de nombres dont la somme est 57 ». Quels sont les nombres inscrits sur une ligne gagnante ?
3. À partir de maintenant : « un lot de consolation est offert à qui présente une ligne de nombres dont le produit est multiple de 6 ». Qui gagne ?

Dans la question suivante, les cartes comportent trois lignes de quatre nombres consécutifs.

4. L'organisateur annonce : « si en ajoutant 1 au produit des quatre nombres d'une même ligne vous obtenez un carré parfait*, alors vous gagnez un lot ». Qui gagne ?

**On rappelle qu'un carré parfait est le carré d'un entier.*

Exercice 4

Savez-vous planter des clous ?

Madame Briqueau souhaite accrocher un cadre dans son salon. Ce cadre est rectangulaire et mesure 84 cm de longueur et 56 cm de hauteur. Son système d'accrochage est constitué d'une ficelle de 60 cm de long, attachée au dos du cadre en deux points situés tous deux à 21 cm du bord supérieur du cadre et chacun à 20 cm d'un des bords latéraux.

Le mur destiné à l'accrochage est rectangulaire et mesure 2,68 m de haut sur 3,78 m de large.

Madame Briqueau voudrait que son cadre, une fois posé, soit centré en largeur (même espace à gauche et à droite du cadre) et que son bord inférieur soit horizontal et à 1,42 m du sol.

1. À quelle distance du bord gauche du mur madame Briqueau doit-elle planter le crochet ?
2. Quelle forme prendra la ficelle quand le cadre sera en place ?
3. À quelle distance du haut du mur madame Briqueau devra-t-elle planter le crochet (arrondir au millimètre) ?

RÉGION ACADÉMIQUE
ÎLE-DE-FRANCE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE
MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Olympiades académiques de mathématiques

Classes de quatrième

Concours René Merckhoffer

Concours organisé en commun par les académies d'Amiens, Besançon, Caen, la Corse, Grenoble, Lyon, Orléans-Tours, Nancy-Metz, Reims, Rouen et Versailles

Mardi 27 mars 2018

Durée de l'épreuve : 2 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

Exercice 1

Développement décimal

1. Quand on effectue la division de 28 par 27, on trouve $1{,}037037037037\ldots$

La division posée permet d'obtenir une écriture décimale périodique illimitée du quotient $\frac{28}{27}$.

La période de cette écriture est composée de trois chiffres (ici 037) qui se répètent. La 5^e décimale est 3.

Quelle est la 52^e décimale de $\frac{28}{27}$?

2. Quand on effectue la division de 19 par 13, on trouve $1{,}461538461538461538\ldots$

De combien de chiffres est composée la période ?

Quelle est la 100^e décimale de $\frac{19}{13}$?

3. Quand on effectue la division de $9\,533$ par 270, on trouve $35{,}30740740740\ldots$

De combien de chiffres est composée la période ?

Quelle est la $1\,000^e$ décimale de $\frac{9\,533}{270}$?

4. L'écriture décimale de $\frac{1}{97}$ fait apparaître une période de 96 chiffres.

Quel est le 96^e chiffre de cette période ?

Exercice 2

Code secret

Les participants à un jeu cherchent à sortir d'une pièce équipée d'un digicode dont le pavé numérique est constitué des dix chiffres de 0 à 9. Ils doivent pour cela découvrir le code à composer et disposent des deux indices suivants :

Premier indice

Le code est une combinaison ordonnée de quatre chiffres différents pouvant constituer un nombre.

Ce nombre doit être inférieur ou égal à $2\,018$.

Par exemple, $0\ 6\ 2\ 7$ est un code correspondant au nombre 627.

Combien de codes différents peut-on composer ?

Second indice

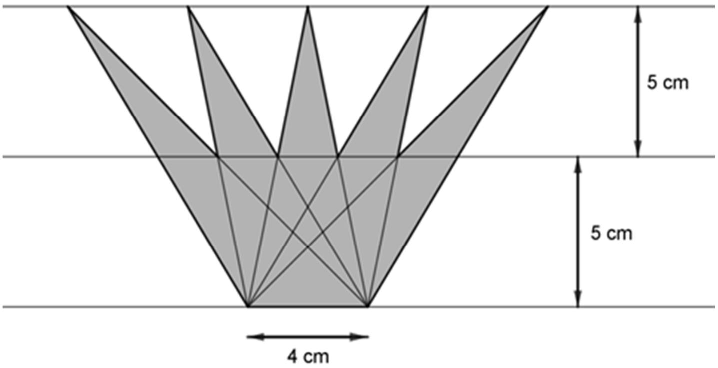
Parmi tous les codes différents que l'on peut composer avec le premier indice, celui qui permet de sortir de la pièce est tel que :

- le nombre formé par le chiffre des milliers et celui des centaines est le double du nombre formé par le chiffre des dizaines et celui des unités ;
  par exemple pour $1\,809$, 18 est le double de 09 ;
- la somme des quatre chiffres du code est paire et non divisible par 9.

Quel est ce code ?

Exercice 3

La couronne



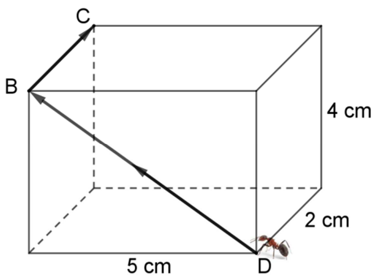
Les sommets du polygone grisé représenté ci-contre sont situés sur des droites parallèles espacées de 5 cm. La « base » a pour longueur 4 cm.

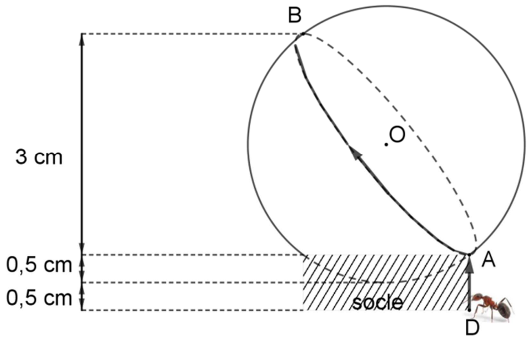
Quelle est l'aire de ce polygone ?

Exercice 4

Les fourmis

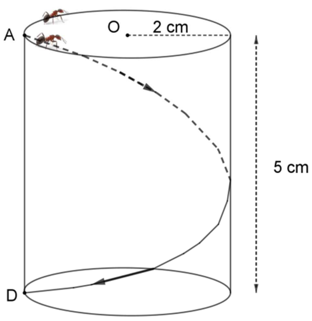
1. Voici ci-dessous deux solides : un pavé droit et une boule sur lesquels se déplacent deux fourmis.





La fourmi n°1 se déplace sur le pavé droit en suivant le parcours formé par les segments [DB] et [BC].
La fourmi n°2 se déplace sur une boule de centre O et de rayon 2 cm qui repose sur un socle de 1 cm de hauteur. Elle part du point D, va en A en suivant le segment [DA], puis rejoint le point B selon le grand cercle de diamètre [AB] A.
Quelle fourmi parcourt le chemin le plus court ?

2. Deux fourmis se déplacent sur un cylindre de rayon 2 cm.



La fourmi n°1, part du point A et décrit le cercle supérieur du cylindre, plusieurs fois de suite.

La fourmi n°2, quant à elle, se déplace sur le cylindre en suivant le tracé fléché de A à D, en prenant le plus court chemin, puis remonte en A par le même chemin.

Les deux fourmis débutent leur parcours au même instant et se déplacent à la même vitesse, supposée constante.

a. Est-ce que la fourmi n°2 rencontrera la fourmi n°1 à son retour en A ?

b. Imaginons que les deux fourmis continuent de se déplacer de la sorte sans s'arrêter. Pourront-elles se rencontrer à un moment donné en A ?

Olympiades inter-académiques de mathématiques

Classes de quatrième

Concours René Merckhoffer

Mardi 26 mars 2019

Durée de l'épreuve : 2 heures

Les calculatrices et le matériel de géométrie sont autorisés.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les traces de leurs recherches et les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus.

Exercice 1
La persistance d'un nombre

Dans cet exercice, on considère des nombres entiers supérieurs ou égaux à 10 écrits dans le système décimal.
Lorsqu'on multiplie les chiffres qui composent l'écriture d'un nombre entier, on obtient un nouveau nombre. On recommence ce calcul avec ce nouveau nombre et ainsi de suite. Par exemple, pour le nombre 377 :

$$\boxed{377} \xrightarrow{3\times7\times7} \boxed{147} \longrightarrow \boxed{28} \longrightarrow \boxed{16} \longrightarrow \boxed{6}$$

Le processus s'arrête lorsqu'on obtient un nombre s'écrivant avec un seul chiffre. Il a fallu 4 étapes en tout : on dit que **la persistance de 377 est 4.**

1. Quelle est la persistance de chacun des nombres

a. 77 ;

b. $28\,534$;

c. $6\,785\,791$?

2. La persistance de chacun des nombres $2\,019$; $4\,806$ et $13\,970\,875$ est égale à 1. Quel résultat général ces résultats semblent-ils illustrer ? En donner une preuve.

3. Existe-il un chiffre que l'on pourrait insérer dans l'écriture d'un nombre sans changer sa persistance ?

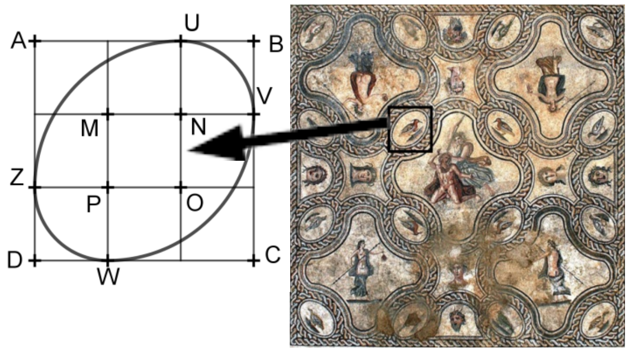
4. Trouver un nombre s'écrivant avec 20 chiffres dont la persistance soit 4.

5. Quelles sont les persistances possibles d'un nombre dont l'écriture comporte un chiffre pair et un 5 ?

Exercice 2
La mosaïque de Penthée

Dans la ville de Nîmes, des travaux ont amené à la découverte d'une magnifique mosaïque romaine du début du troisième siècle, dite « mosaïque de Penthée ». Cette mosaïque se compose de plusieurs panneaux figurés de formes géométriques diverses, séparés par des « tresses » (torsades). C'est là l'œuvre un maître-artisan possédant de solides connaissances de « géométrie pratique » et capable d'assembler des arcs de cercles en des formes variées, pour finalement composer un tout harmonieux.

Sur la figure ci-contre, on a extrait mentalement de la mosaïque un *ovale* inclus dans un carré ABCD de côté 3 unités, découpé lui-même en 9 carrés. On sait que l'ovale est constitué de 4 quarts de cercles.



1. Quel est le centre de chacun de ces quarts de cercles ?

2. Construire un tel ovale (on prendra 3 cm pour unité).

3. Calculer le périmètre de cet ovale.

4. Calculer l'aire de cet ovale.

5. Construire une figure de même périmètre mais avec une aire plus petite.

6. Construire une figure de même périmètre mais avec une aire égale à 4 unités d'aire.

Exercice 3
Code EAN

Le code EAN-13 (European Article Numbering) est un code-barres utilisé par le commerce et l'industrie permettant d'identifier des objets de façon unique et d'être lu par un scanner. Ce code-barres est composé de 13 chiffres (entiers compris entre 0 et 9), le dernier étant une clé de contrôle calculée à partir des 12 chiffres précédents. Un code-barres est symbolisé par le tableau suivant :

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	C

… où on a porté les treize chiffres constituant le code barre. Le chiffre C est la clé de vérification. Pour le déterminer, on calcule $S = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} + 3\times(a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12})$. C est alors le chiffre tel que $S + C$ soit un multiple de 10.

1. Le code 4971850187820 est-il valide ?

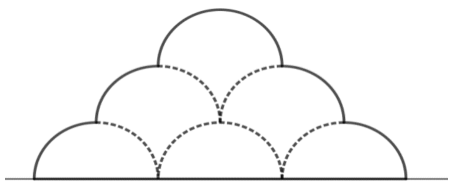
2. Déterminer C pour que le code $978204732850C$ soit valide.

3. Un chiffre a été remplacé par x dans le code $32525x7041767$. Quelle valeur donner à x pour que ce code soit valide ?

4. Le code 3742278085958 est valide. Quelles peuvent être les valeurs des deux premiers chiffres à gauche dans d'autres codes valides comportant les 11 mêmes chiffres à droite ?

Exercice 4
Six demi-cercles

Six demi-cercles de rayon 1, et les diamètres de trois d'entre eux, déterminent le domaine représenté ci-contre.
Quelle est l'aire de ce domaine ?



Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Région académique
GRAND EST

académie
Nancy-Metz

Olympiades de mathématiques

Classes de quatrième

Concours René Merckhoffer

Mardi 24 mars 2020

Durée de l'épreuve : 2 heures

Les calculatrices et le matériel de géométrie sont autorisés.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les traces de leurs recherches et les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus.

Exercice 1
Confiserie

Dans une confiserie, on vend des caramels, des chocolats et des macarons.

Au cours de la matinée, 19 clients ont acheté au moins une de ces trois confiseries, mais aucun n'a acheté les trois en même temps.

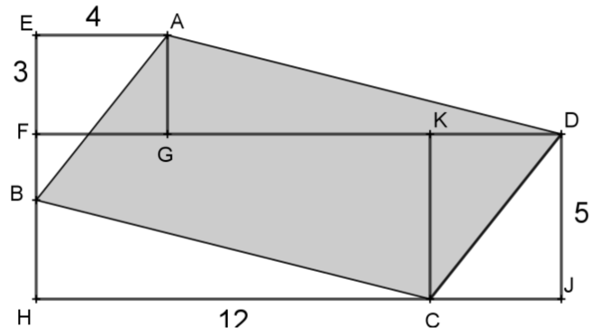
En faisant ses comptes, la caissière s'aperçoit qu'elle a vendu des caramels à 17 personnes, des chocolats à 13 clients et des macarons à 8 clients.

Combien de personnes ont acheté à la fois des macarons et des chocolats ?

Exercice 2
Des aires

Le quadrilatère FHCK est un rectangle de dimensions 12 et 5.
Le quadrilatère AEFG est un rectangle de dimensions 4 et 3.
Le quadrilatère KCJD est un rectangle (sa largeur n'est pas donnée).
Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Déterminer l'aire de ce parallélogramme.



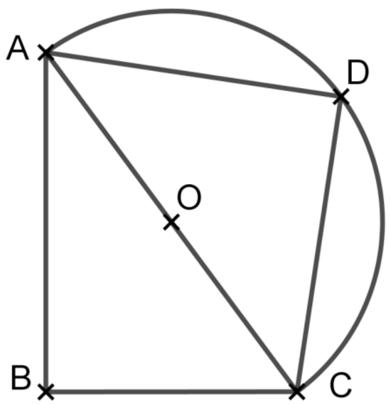
Exercice 3
Dodécachaîne

La suite de chiffres $1-3-2-4-0$ présente une propriété particulière : dans le système décimal, tous les nombres écrits en prenant dans l'ordre trois chiffres consécutifs de cette suite $(132, 324, 240)$ sont des multiples de 12. On admet – exceptionnellement pour cet exercice – que l'écriture décimale d'un nombre puisse comporter un 0 en position la plus à gauche.
On rappelle qu'un entier est un multiple de 12 si et seulement si cet entier est un multiple de 3 et un multiple de 4.

Dans ce problème, on appelle *dodécachaîne* toute suite de chiffres possédant cette propriété.

1. La suite $3-4-8-8-8$ constitue-t-elle une dodécachaîne ?
2. Dans cette question, on cherche le chiffre a tel que la suite $2-1-a$ soit une dodécachaîne.
a. Pourquoi ce chiffre a est-il pair ?
b. Pourquoi ce chiffre a est-il divisible par 3 ?
c. Déterminer ce chiffre a.
d. On donne à a la valeur obtenue précédemment. Déterminer le chiffre b tel que $2-1-a-b$ soit une dodécachaîne.
3. Existe-t-il un chiffre c tel que $3-5-c$ soit une dodécachaîne ?
4. Trouver une dodécachaîne comportant 5 chiffres dont le chiffre central soit 4.
5. On donne la dodécachaîne $2-5-2-8-8$, qu'on complète progressivement en ajoutant des chiffres à droite. Quel est le 2 020$^{\text{ème}}$ chiffre de la dodécachaîne ainsi construite ?

Exercice 4
Une course entre amis



Sur le plan ci-contre figurent des parcours de course empruntés par trois amis.
Le triangle ABC est rectangle en B, AB = 200 m et BC = 150 m.
Le point D est situé sur le demi-cercle de diamètre [AC]. Le triangle ACD est rectangle en D et isocèle.

1. Victor parcourt le trajet A-B-C en vélo, à la vitesse moyenne de 15 km/h. Rachel va directement de A à C en roller, à la vitesse moyenne de 12 km/h. Ils partent en même temps du point A. Qui de Rachel ou de Victor arrivera le premier ?

2. Carl est un athlète entraîné. Les trois amis repartent du point A, Carl court en suivant le demi-cercle. Quelle doit être la vitesse moyenne minimale de Carl pour qu'il parvienne en C avant Victor et Rachel ?

3. Victor parcourt le segment [AD] à la vitesse de 15 km/h et Carl l'arc $\overset{\frown}{AD}$ à la vitesse de 17 km/h. Ils partent en même temps du point A. Qui arrive le premier ?