Cercle circonscrit à un triangle rectangle - Exercices

Exercice 1

Soit $[AB]$ un segment. Soient d et d' deux droites distinctes passant par A et ne passant pas par B. Les perpendiculaires à d et d' passant par B coupent respectivement d et d' en C et D. Démontrer que les points A, B, C et D sont cocycliques (i.e. qu'ils appartiennent à un même cercle).

Exercice 2

Soit $\mathscr{C}$ un cercle. Soient A, B et C trois points de $\mathscr{C}$ non diamétralement opposés deux à deux. La droite perpendiculaire à (AM) passant par M coupe le cercle $\mathscr{C}$ en P. Démontrer que le triangle PAB est rectangle.

Exercice 3

Soit ABC un triangle rectangle en A. Soit I un point appartenant à la droite (BC) tel que $IA = IB$. Démontrer que I est le milieu du segment $[BC]$.

Exercice 4

Soit ABC un triangle rectangle en A. Soit H le pied de la hauteur issue de A. On suppose que $AH = \frac{1}{2}BC$. Démontrer que H est le milieu de $[BC]$.

Exercice 5

Soit ABC un triangle rectangle en A. On prolonge $[BA]$ d'une longueur $AD = AC$ et $[CA]$ d'une longueur $AE = AB$.

1. Démontrer que les médianes issues de A dans les triangles ABC et ADE sont égales (i.e. confondues).
2. Démontrer que la médiane issue de A dans le triangle ABC est hauteur dans le triangle ADE.

Exercice 6

Deux cercles de centres distincts O et O' et de rayons différents se coupent aux points A et B. Soit C le symétrique de A par rapport à O. Soit D le symétrique de A par rapport à O'.

1. Déterminer les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ABD}$.
2. Que dire des points B, C et D ?

Exercice 7

Soit ABC un triangle. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Soient M et N les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.

1. Comparer les triangles AMN et HMN et démontrer que la droite (MN) est la médiatrice du segment $[AH]$.
2. Soient I et J les pieds des hauteurs respectivement issues de M et N dans le triangle MBH et NCH. Déterminer la nature du quadrilatère $MNJI$.
3. Comparer $[MN]$ et $[BC]$ en longueur et en direction.

Exercice 8

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[BC]$. Soit A un point de ce cercle, distinct de A et B. Les médiatrices des segments $[AC]$ et $[AB]$ coupent le demi-cercle $\overset{\frown}{BAC}$ respectivement en I et J.

1. Comparer les directions de ces médiatrices et des côtés de l'angle $\widehat{BAC}$.
2. Que représentent les droites (BI) et (CJ) pour le triangle ABC ? Le démontrer.
3. Soient I' et J' les points diamétralement opposés respectivement à I et J. Que représentent de même les droites (BI') et (CJ') ?

Exercice 9

Soit ABC un triangle rectangle en A. On mène la médiane (AM) et la hauteur (AH) (on supposera H entre B et M).

1. Comparer les angles $\widehat{BAH}$ et $\widehat{ACB}$ à l'angle $\widehat{ABC}$. Quelles conséquences pouvons-nous en tirer ?
2. Comparer les angles $\widehat{BAH}$ et $\widehat{CAM}$ et démontrer que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{HAM}$ ont la même bissectrice.

Exercice 10

Soit A un point d'un cercle de diamètre $[BC]$. Soit D le point d'intersection du demi-cercle ne contenant pas A avec la médiatrice de $[BC]$. On mène les droites (DE) et (DF) perpendiculaires à (AB) et (AC).

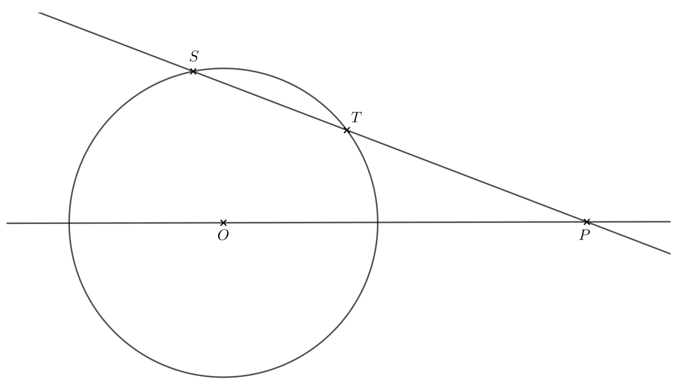
1. Comparer les segments $[DB]$ et $[DC]$ puis les angles $\widehat{BDE}$ et $\widehat{CDF}$.
2. Comparer les triangles BDE et CDF. Quelles conséquences au sujet de $[DE]$ et $[DF]$ pouvons-nous en tirer ?
3. Déterminer la nature du quadrilatère $AEDF$.
4. Démontrer que la droite (AD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 11

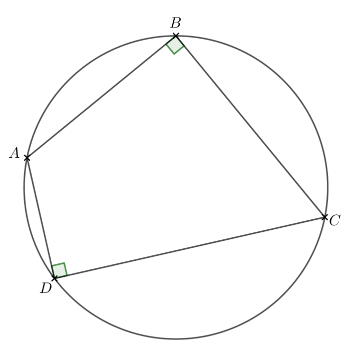
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O. Soient R et S deux points de $\mathscr{C}$ non diamétralement opposés. Soit M le milieu du segment $[RS]$. La droite perpendiculaire à (RS) en S coupe $\mathscr{C}$ en A. Démontrer que $SA = 2 \times OM$.

Exercice 12

Dans la figure ci-dessous, démontrer que le cercle de diamètre $[PO]$ coupe le segment $[ST]$ en son milieu.



Exercice 13



1. Démontrer que les points A, B, C et D sont cocycliques.
2. Construire cette figure avec $AB = 3,5\,\text{cm}$, $BC = 5\,\text{cm}$ et $AD = 2\,\text{cm}$.
3. La médiatrice du segment $[BD]$ coupe $[BD]$ en M. Démontrer qu'elle coupe $[AC]$ en son milieu O.
4. La perpendiculaire en D à (BD) coupe (BO) en E. Démontrer que $DE = 2 \times MO$ puis que E appartient au cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$.