Fonction exponentielle - Exercices

Exercice 1

Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les courbes d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan. Nous allons démontrer qu'il existe une unique tangente commune à ces deux courbes. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soient A le point d'abscisse a appartenant à la courbe $\mathscr{C}_1$ et B le point d'abscisse b appartenant à la courbe $\mathscr{C}_2$.

Partie A :

1. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}_A$ à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point A.
2. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}_B$ à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point B.
3. En déduire que les droites $\mathscr{T}_A$ et $\mathscr{T}_B$ sont confondues si, et seulement si, a et b sont solutions du système $(\mathscr{S})$: $\begin{cases} e^a = -2b & (1) \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 & (2) \end{cases}$.
4. Démontrer que $(\mathscr{S})$ est équivalent à $\begin{cases} e^a = -2b & (1) \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 & (2) \end{cases}$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4$.

1. Démontrer que, pour tout réel x strictement négatif, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$.
2. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. Démontrer que f est strictement croissante que $\mathbb{R}_+$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On note α cette solution.
5. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
6. On prend pour A le point d'abscisse α. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} du réel b pour lequel les droites $\mathscr{T}_A$ et $\mathscr{T}_B$ sont confondues.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.
3. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_-$ par $\varphi(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$.
   (a) Déterminer les dérivées première et seconde φ' et φ'' de la fonction φ.
   (b) Démontrer que, pour tout réel x négatif, $\varphi''(x) < 0$.
   (c) En déduire : $\forall\, x \in \mathbb{R}_-,\ 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \leqslant e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$.
   (d) Déduire de (c) qu'il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}_-^*$ de limite nulle en 0 telle que :
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}_-^*,\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$
   (e) Déduire que (d) que : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ existe et est finie. On la note l. Calculer l.
   (f) Établir une relation entre $f(-x)$ et $f(x)$ valable pour tout réel x. En déduire que : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = l$.
   (g) Démontrer que, pour tout réel x non nul, $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$ où l'on précisera g.
   (h) Dresser le tableau de variations de f.
   (i) Démontrer que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe représentative de f dans un repère du plan.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soient a, b et c trois réels. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ae^{-2x} + be^{-x} + cx$. Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère du plan. Dresser le tableau de signes et le tableau de variations de f sachant que la droite d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 et que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.