# Géométrie vectorielle dans l'espace - Exercices

## Exercice 1

Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que $ABC$, $ABD$ et $ACD$ soient trois triangle isocèles rectangles en $A$. On pose $a := AB = AC = AD$.
Soit $A'$ le centre de gravité du triangle $BCD$, c'est-à-dire le point défini par $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{0}$.

1. Démontrer que la droite $(AA')$ est orthogonale au plan $(BCD)$.
2. Exprimer $AA'$ en fonction de $a$.
3. Soit $G$ l'isobarycentre du tétraèdre $ABCD$, c'est-à-dire le point défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$.
   Soit $I$ le milieu de $[BC]$.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AA'}$ puis exprimer $AG$ en fonction de $a$.
   (b) Déterminer l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que :
   $$\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\| = 2 \left\| \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\|$$
4. Soit $H$ le symétrique de $A$ par rapport à $G$.
   (a) Démontrer que $4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$.
   (b) En déduire que $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BA}$.
   (c) Démontrer que $HC = HD$.

## Exercice 2

Soit $ABCDEFGH$ un cube. Soient $I$ et $J$ les points tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$. Soit $K$ le milieu de $[IJ]$.
Soit $P$ le projeté orthogonal de $G$ sur le plan $(FIJ)$.

*Partie A* :

1. Démontrer que le triangle $FIJ$ est isocèle en $F$. En déduire que les droites $(FK)$ et $(IJ)$ sont orthogonales.
2. Démontrer que les droites $(GK)$ et $(IJ)$ sont orthogonales.
3. Démontrer que la droite $(IJ)$ est orthogonale au plan $(FGK)$.
4. Démontrer que la droite $(IJ)$ est orthogonale au plan $(FGP)$.
5. Démontrer que les points $F$, $G$, $K$ et $P$ sont coplanaires.
6. En déduire que les points $F$, $P$ et $K$ sont alignés.

*Partie B* :
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
Soit $N$ le point d'intersection de la droite $(GP)$ et du plan $(ADB)$.

1. Déterminer les coordonnées des points $F$, $G$, $I$ et $J$.
2. Démontrer que la droite $(GN)$ est orthogonale aux droites $(FI)$ et $(FJ)$.
3. Exprimer les produits scalaires $\overrightarrow{GN}.\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{GN}.\overrightarrow{FJ}$ en fonction des coordonnées de $N$.
4. Déterminer les coordonnées de $N$.

## Exercice 3

Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points de l'espace.

1. Démontrer l'équivalence :
   $$\left(\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}\right) \Leftrightarrow \left(AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2\right)$$
2. Démontrer l'équivalence :
   $$\left(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\right) \Leftrightarrow \left(AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2\right)$$