LIMITES DE FONCTIONS ET CONTINUITÉ - EXERCICES

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+4x^2+3}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x^3-3x^2+2x+1\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-x+1}{3x^3+5}\right)$
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-x+3}+2x\right)$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3-x}{\sin(x)+2}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1-4x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

Exercice 2

1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elle est continue sur $\mathbb{R}$:

$$f\,:\,x\to\begin{cases}\sqrt{-3x+2} & \text{si } x<\frac{2}{3}\\ 3x-2 & \text{si } x\geqslant\frac{2}{3}\end{cases}\qquad g\,:\,x\to\begin{cases}4x+1 & \text{si } x<2\\ (-2x+1)^2 & \text{si } x\geqslant 2\end{cases}\qquad h\,:\,x\to\begin{cases}\frac{|x+2|}{x+2} & \text{si } x\neq-2\\ 1 & \text{si } x=-2\end{cases}$$

2. Déterminer les éventuelles valeurs du réel k pour lesquelles les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$u\,:\,x\to\begin{cases}-5x+2 & \text{si } x<3\\ k & \text{si } x=3\\ 4x-25 & \text{si } x>3\end{cases}\qquad u\,:\,x\to\begin{cases}(2x+1)^3 & \text{si } x<-1\\ 5x+4 & \text{si } -1\leqslant x\leqslant 5\\ k & \text{si } x>5\end{cases}\qquad w\,:\,x\to\begin{cases}x^3-2x^2+7 & \text{si } x<-2\\ 3x+3 & \text{si } -2\leqslant x\leqslant 4\\ k & \text{si } x>4\end{cases}$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x^3+x^2-3}{x^2+1}$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3+3x+8$.

Étude de g

1. Dresser le tableau de variations de g.
2. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. Dresser le tableau de signes de g.

Étude de f

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Démontrer qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que :
$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1}$$
3. En déduire que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f admet une asymptote oblique Δ dont on précisera l'équation réduite.
4. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ.
5. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ? Si oui, en quels points ?
6. Démontrer que $f(\alpha)=\frac{3\alpha+2}{2}$. En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.
7. Tracer $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan.

Exercice 4

Démontrer que, pour tout entier naturel n, l'équation (E_n) : $\sum\limits_{k=1}^{k=n} x^k=1$ admet une unique solution réelle positive.

Exercice 5

Un cycliste parcourt 40 km en un heure. Démontrer qu'il existe nécessairement un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il parcourt exactement 20 km.

Source : Méthod'S - 200 exercices corrigés - Bruno CLÉMENT.