Cinquième - Cours de mathématiques

Mathieu KIEFFER

BY NC ND

Table des matières

Table des matières **3**

Introduction **7**

1 Opérations sur les nombres décimaux **9**
1.1 Succession d'opérations . . . 9
1.2 Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition . . . 10

2 Nombres relatifs - Présentation **13**
2.1 Introduction . . . 13
2.2 Nombres relatifs . . . 13
2.3 Repérage d'un point sur une droite . . . 14
2.4 Repérage d'un point dans le plan . . . 15

3 Nombres relatifs - Addition **17**
3.1 Somme de nombres relatifs . . . 17
3.2 Propriétés de l'addition . . . 18

4 Nombres relatifs - Soustraction **19**
4.1 Différence de deux nombres relatifs . . . 19
4.2 Comparaisons . . . 20
4.3 Application : les mesures algébriques . . . 21

5 Nombres rationnels - Présentation **23**
5.1 Généralités . . . 23
5.2 Réduction au même dénominateur . . . 24
5.3 Comparaison de fractions . . . 25
5.4 Partie entière d'une fraction . . . 25
5.5 Fractions décimales . . . 26

6 Nombres rationnels - Addition et soustraction **27**
6.1 Addition de deux nombres rationnels . . . 27
6.2 Soustraction de deux nombres rationnels . . . 28

7 Expressions algébriques **31**
7.1 Réduction d'une expression algébrique . . . 31
7.2 Développement d'une expression algébrique . . . 32
7.3 Factorisation d'une expression algébrique . . . 32

8 Équations **33**
8.1 Généralités . . . 33
8.2 Égalité et opérations . . . 33

9 Proportionnalité **35**
9.1 Nombres proportionnels . . . 35
9.2 Règle de trois . . . 36
9.3 Propriétés . . . 36
9.4 Pourcentages et échelles . . . 37

10 Éléments de géométrie plane **39**
10.1 Angles . . . 39
10.2 Droites perpendiculaires . . . 42
10.3 Cercle . . . 43
10.4 Triangles . . . 44

11 L'inégalité triangulaire **47**
11.1 L'inégalité triangulaire . . . 47
11.2 L'inégalité triangulaire bis . . . 48
11.3 Application . . . 48

12 Cas d'égalité de triangles **49**
12.1 Cas d'égalité de triangles . . . 49
12.2 Application . . . 50

13 Symétries axiale et centrale **51**
13.1 Symétrie axiale . . . 51
13.2 La symétrie centrale . . . 53

14 Angles (1) **57**
14.1 Droites parallèles . . . 57
14.2 Propriétés angulaires des parallèles . . . 59
14.3 Angles . . . 61

15 Triangles particuliers **63**
15.1 Médiatrice d'un segment . . . 63
15.2 Triangle isocèle . . . 64
15.3 Triangle équilatéral . . . 65
15.4 Triangle rectangle . . . 66
15.5 Bissectrice d'un angle . . . 67

16 Angles (2) **69**
16.1 Somme des angles d'un triangle . . . 69
16.2 Somme des angles d'un quadrilatère . . . 70

17 Parallélogramme **71**
17.1 Présentation . . . 71
17.2 Propriétés des angles . . . 72
17.3 Propriétés des côtés . . . 72
17.4 Propriétés des diagonales . . . 73

18 Quadrilatères particuliers **75**
18.1 Rectangle . . . 75
18.2 Losange . . . 76
18.3 Carré . . . 78

19 Aire d'une surface plane **81**
19.1 Aire d'un parallélogramme 81
19.2 Aire d'un triangle 82
19.3 Aire d'un disque 82

20 Prismes et cylindres **85**
20.1 Prismes 85
20.2 Cylindres 87

Bibliographie **89**

Index **90**

Introduction

Ce cours est celui dispensé sur le terrain à mes élèves de Cinquième. Il reprend les thèmes évoqués par le programme officiel avec un certain souci de rigueur tout en s'octroyant quelques libertés. Les objets mathématiques utilisés y sont toujours présentés via une définition claire et précise. Les théorèmes et autres résultats mathématiques sont démontrés dans la mesure du possible avec plus ou moins de détails. Les rares propositions laissées sans démonstration le sont car il n'existe tout simplement pas de démonstration accessible à ce niveau ; une référence aux cours des années suivantes est alors requise. Aussi, certaines démonstrations ont volontairement été rédigées de manière succincte voire très incomplète. L'objectif est clair : que l'élève prenne son stylo afin de se frotter à cette réalité mathématique et d'en délier le vrai du faux par sa propre expérience, ses propres efforts. De la même façon, vous trouverez des exemples et des exercices non traités tout au long de ce cours. En effet, lire un corrigé ou une solution n'apporte quasiment rien à la compréhension d'une notion. Apprendre, c'est avant tout faire par soi-même.

Ce cours comporte sans aucun doute des erreurs et est voué à évoluer à l'épreuve des séances. Il représente le strict minimum que tout élève de Cinquième désireux d'étudier les mathématiques doit maîtriser en fin d'année scolaire. C'est pourquoi j'invite vivement cet élève à prolonger ses études en visitant mon site internet (www.mathieu-kieffer.com) qui rassemble de nombreuses ressources lui permettant d'apprendre les mathématiques et de se passionner pour elles. Enfin, puisque rien ne peut se substituer à la relation professeur-élève, j'encourage chacun de mes élèves à me demander de l'aide, à en savoir davantage, en un mot, à être éclairé, il n'en sera que plus heureux...

« Il n'y a de progrès, pour nul écolier au monde, ni en ce qu'il entend, ni en ce qu'il voit, mais seulement en ce qu'il fait. »

Émile-Auguste Chartier dit « Alain »

Chapitre 1

Opérations sur les nombres décimaux

Simon Stevin

(Bruges 1 548 - Leyde 1 620)

Dans ce chapitre, nous ne considérerons que les nombres décimaux, c'est-à-dire les nombres avec un nombre fini de chiffres à droite de la virgule. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

1.1 Succession d'opérations

Affirmation. Les calculs entre parenthèses doivent être effectués prioritairement (i.e. en premier).

Exemple. Voici trois exemples :

1. $a = 18 - (7,1 + 2,3) = 18 - 9,4 = 8,6$
2. $b = 15,2 + (7 \times 2,1) = 15,2 + 14,7 = 29,9$
3. $c = (18,4 \div 9,2) \times (5 - 0,3) = 2 \times 4,7 = 9,4$

Remarque. La place des parenthèses joue un rôle très important.

Exemple. $(18 - 7,1) + 2,3 \neq 18 - (7,1 + 2,3)$

Remarque. Dans le cas où les parenthèses contiennent elles-mêmes d'autres parenthèses, il est possible, pour améliorer la lisibilité, de remplacer les parenthèses extérieures par des crochets.

Affirmation. Les calculs entre les parenthèses les plus « intérieures » doivent être effectués prioritairement.

Exemple. $d = [8 \div (9 - 7)] \times [17 - (5 - 2)] = (8 \div 2) \times (17 - 10) = 4 \times 7 = 28$

Affirmation. La valeur d'une somme de nombres décimaux est indépendante de l'ordre dans lequel les additions sont effectuées.

Exemple. $e = 2 + 3,1 + 5 = (2 + 3,1) + 5 = 5,1 + 5 = 10,1 = 2 + (3,1 + 5) = 2 + 8,1.$

Affirmation. La valeur d'un produit de nombres décimaux est indépendante de l'ordre dans lequel les multiplications sont effectuées.

Exemple. $f = 2 \times 3,1 \times 5 = (2 \times 3,1) \times 5 = 6,2 \times 5 = 31 = 2 \times (3,1 \times 5) = 2 \times 15,5$

Affirmation. Si, dans une écriture sans parenthèses, ne figurent que les signes opératoires $+$ et $-$, alors les calculs à effectuer se font successivement de gauche à droite.

Exemple. $g = 8,5 - 3 + 2 - 1,2 - 0,6 = 5,5 + 2 - 1,2 - 0,6 = 7,5 - 1,2 - 0,6 = 6,3 - 0,6 = 5,7$

Affirmation. Si, dans une écriture sans parenthèses, ne figurent que les signes opératoires $+$, $-$ et $\times$, alors le signe $\times$ a priorité sur les signes $+$ et $-$.

Exemple. $h = 2,3 + 4,2 \times 5 - 7,8 = 2,3 + 21 - 7,8 = 23,3 - 7,8 = 15,5$

Affirmation. Si, dans une écriture sans parenthèses, ne figurent que les signes opératoires $+$, $-$ et $\div$, alors le signe $\div$ a priorité sur les signes $+$ et $-$.

Exemple. $i = 3,5 + 4,8 \div 6 - 1,2 = 3,5 + 0,8 - 1,2 = 4,3 - 1,2 = 3,1$

Affirmation. Si, dans une écriture sans parenthèses, ne figurent que les signes opératoires $\times$ et $\div$, alors les calculs à effectuer se font successivement de gauche à droite.

Exemple. $j = 2 \times 63 \div 3 \times 5 \div 7 = 126 \div 3 \times 5 \div 7 = 42 \times 5 \div 7 = 210 \div 7 = 30$

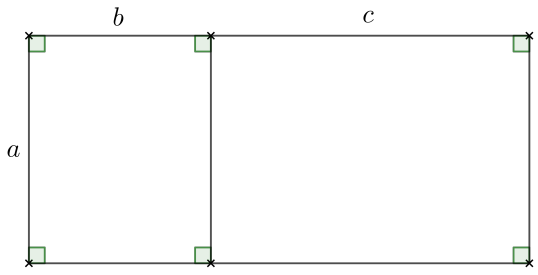
1.2 Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

Exemple. Un champ a une largeur de 40 m. Des clôtures parallèles le partagent en trois parcelles rectangulaires dont les dimensions sont 25 m, 16 m et 38 m. Calculons l'aire de champs de deux manières différentes.

Proposition 1. *(Distributivité de $\times$ par rapport à $+$) Soient a, b et c trois nombres décimaux positifs. On a :*

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

Démonstration. Observons les aires des rectangles suivants :



□

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. On a aussi, par commutativité de $\times$, $(b + c) \times a = a \times b + a \times c$.
2. On peut utiliser la distributivité de $\times$ par rapport à $+$ en calcul mental.
   Exemple : $18 \times 1,1 = 18 \times (1 + 0,1) = 18 \times 1 + 18 \times 0,1 = 18,8$
3. La distributivité de $\times$ par rapport à $+$ se généralise aisément :
   $a \times (b + c + d) = a \times b + a \times c + a \times d$

Exemple. Un champ rectangulaire de 58 m de longueur et de 26 m de largeur est divisé en deux parcelles A et B par une clôture parallèle à sa largeur. La parcelle A ayant 35 m de longueur, calculons l'aire de la parcelle B de deux façons différentes.

Proposition 2. *(Distributivité de $\times$ par rapport à $-$) Soient a, b et c trois nombres décimaux positifs avec $b \geqslant c$. On a :*

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

Démonstration. Laissée en exercice. □

Exemple. $18 \times 17 = 18 \times (20 - 3) = 18 \times 20 - 18 \times 3 = 360 - (10 + 8) \times 3 = 360 - 30 - 24 = 306$.

Remarque. On peut désormais synthétiser et retenir que, quels que soient les nombres décimaux a, b et c, on a : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

Définition 3. Une expression contenant plusieurs opérations est appelée :

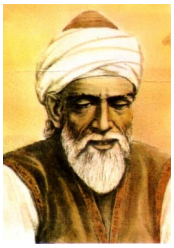
1. Une somme si la dernière opération à effectuer est une addition.
2. Une différence si la dernière opération à effectuer est une soustraction.
3. Un produit si la dernière opération à effectuer est une multiplication.
4. Un quotient si la dernière opération à effectuer est une division.

Exemple. Déterminons la nature des expressions suivantes :

1. $A = [125 \times (16 - 8)] - [2 \times (3 + 6)]$
2. $B = (35 - 9) \times (13 - 9)$
3. $C = 3 \times (3,8 + 5) - (9 + 17) \div 2$
4. $D = (13,75 \times 12) - 7 \times (4,1 - 3,8)$

Chapitre 2

Nombres relatifs - Présentation



Abu Al-Wafa

(Bouzjan 940 - Bagdad 998)

2.1 Introduction

Remarque. Certaines grandeurs peuvent être orientées dans deux sens différents.

Exemple. Voici deux exemples de grandeurs orientées :

1. Pour repérer des températures, il faut une température de référence. Ainsi, sur l'échelle Celsius, c'est celle de la fusion de la glace qui a été choisie. C'est pour cela qu'on dit que la glace fond à 0°C. Les températures plus chaudes que cette température-là se repèrent avec un nombre, que l'on fait parfois précéder d'un signe + pour insister. Les températures plus froides que la température de fusion de la glace, c'est-à-dire plus froides que 0°C, doivent être distinguées des précédentes par l'emploi d'un signe, le signe −. On parle par exemple d'une température égale à −18°C. On dit aussi « 18 degrés Celsius au-dessous de zéro ».
2. Les altitudes sont repérées par rapport à un certain niveau, à savoir le niveau des océans. Par exemple, le Grand Ballon a une altitude de +1 424 m, ce qui signifie : « 1 424 m au-dessus du niveau des océans ». A l'opposé, le niveau de la mer Morte est à une altitude de −395 m, c'est-à-dire : « 395 m au-dessous du niveau des océans ».

2.2 Nombres relatifs

Définition 4. On appelle nombre positif tout nombre supérieur ou égal à zéro. On appelle nombre négatif tout nombre inférieur ou égal à 0. Un nombre positif est précédé du signe +. Un nombre négatif est précédé du signe −.

Remarque. Il existe un unique nombre à la fois positif et négatif : 0.

Exemple. $19,81$ est un nombre positif. $-2,17$ est un nombre négatif.

Définition 5. La réunion de l'ensemble des nombres entiers positifs et de l'ensemble des nombres entiers négatifs est appelée l'ensemble des nombres entiers relatifs. Il est noté $\mathbb{Z}$. La réunion de l'ensemble des nombres décimaux positifs et de l'ensemble des nombres décimaux négatifs est appelée l'ensemble des nombres décimaux relatifs. Il est noté $\mathbb{D}$.

Exemple. 9 et -17 sont des nombres entiers relatifs. Ce sont aussi des nombres décimaux relatifs. $89,5$ est un nombre décimal relatif mais n'est pas un nombre entier relatif. $-64,17$ est un nombre décimal relatif mais n'est pas un nombre entier relatif.

Définition 6. On appelle valeur absolue d'un nombre relatif le nombre obtenu en supprimant son signe. On l'appelle aussi parfois sa distance à zéro.

Exemple. $39,7$ a pour valeur absolue $39,7$. $-26,81$ a pour valeur absolue $26,81$.

Notation : la valeur absolue de x se note $|x|$. Ainsi, $|-7,3| = 7,3$ et $|900,1| = 900,1$.

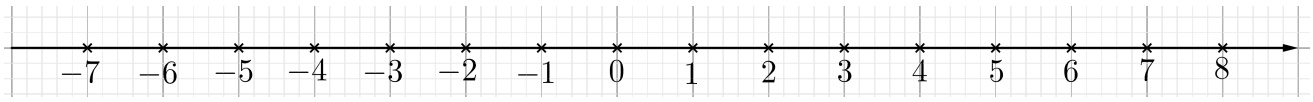
Définition 7. Deux nombres relatifs sont dits égaux s'ils ont le même signe et la même valeur absolue. Deux nombres relatifs sont dits opposés s'ils sont de signe contraire et ont la même valeur absolue.

Exemple. $3,2$ et $-3,2$ sont opposés.

2.3 Repérage d'un point sur une droite

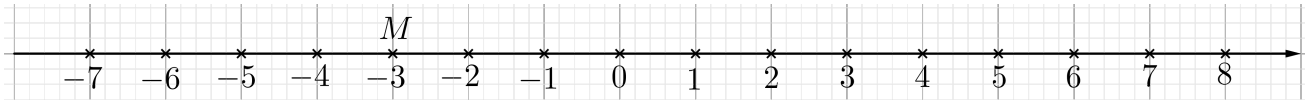
Définition 8. On appelle axe toute droite orientée, c'est-à-dire une droite sur laquelle on a choisi une origine, une unité et une orientation (i.e. un sens de parcours).

Illustration :



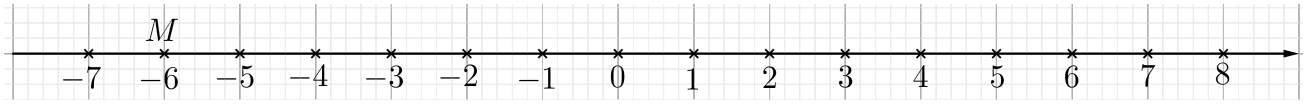
Remarque. A tout nombre relatif x correspond un unique point M de l'axe et réciproquement, à tout point M de l'axe correspond un unique nombre relatif.

Exemple. Sur la droite graduée ci-dessous, le point M est repéré par le nombre -3.



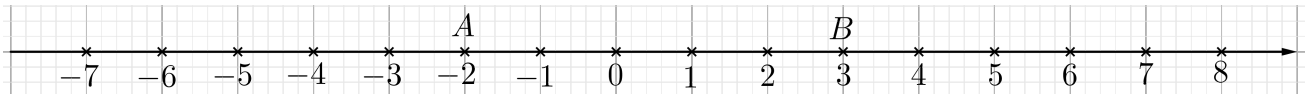
Définition 9. Soit M un point d'un axe. Le nombre relatif x correspondant à M permet de repérer M sur l'axe, il est appelé l'abscisse du point M. On note $M(x)$ ou encore $\overline{OM} = x$ où O désigne l'origine de l'axe.

Exemple. Sur la droite graduée ci-dessous, le point M a pour abscisse -6. On note : $M(-6)$.



Définition 10. Soient A et B deux points d'un axe. On appelle mesure algébrique du segment $[AB]$, notée $\overline{AB}$, l'abscisse de B lorsque l'on prend A comme origine de l'axe.

Exemple. Sur la droite graduée ci-dessous, on a : $\overline{AB} = 5$.



Remarque. La mesure algébrique $\overline{AB}$ est positive si, en parcourant le segment de A vers B, on se déplace dans le sens positif défini par l'axe. La mesure algébrique $\overline{AB}$ est négative si, en parcourant le segment de A vers B, on se déplace dans le sens négatif défini par l'axe.

Proposition 11. *$\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ sont deux nombres opposés.*

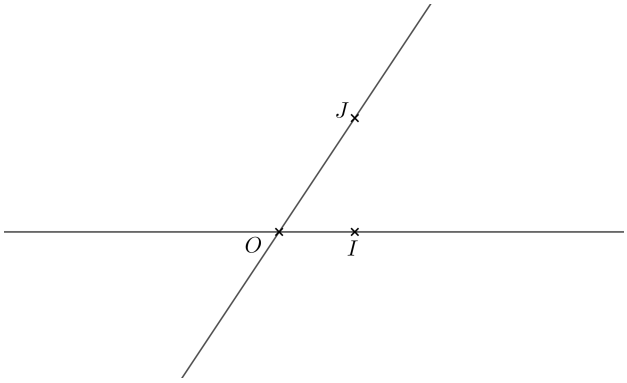
Démonstration. Évidente d'après la définition de deux nombres opposés et la remarque précédente. □

Remarque. Deux nombres sont opposés si, et seulement si, les points de l'axe dont ils sont les abscisses sont symétriques par rapport à l'origine.

2.4 Repérage d'un point dans le plan

Définition 12. On appelle repère du plan la donnée de trois points O, I et J non alignés. On le note $(O; I, J)$.

Illustration :



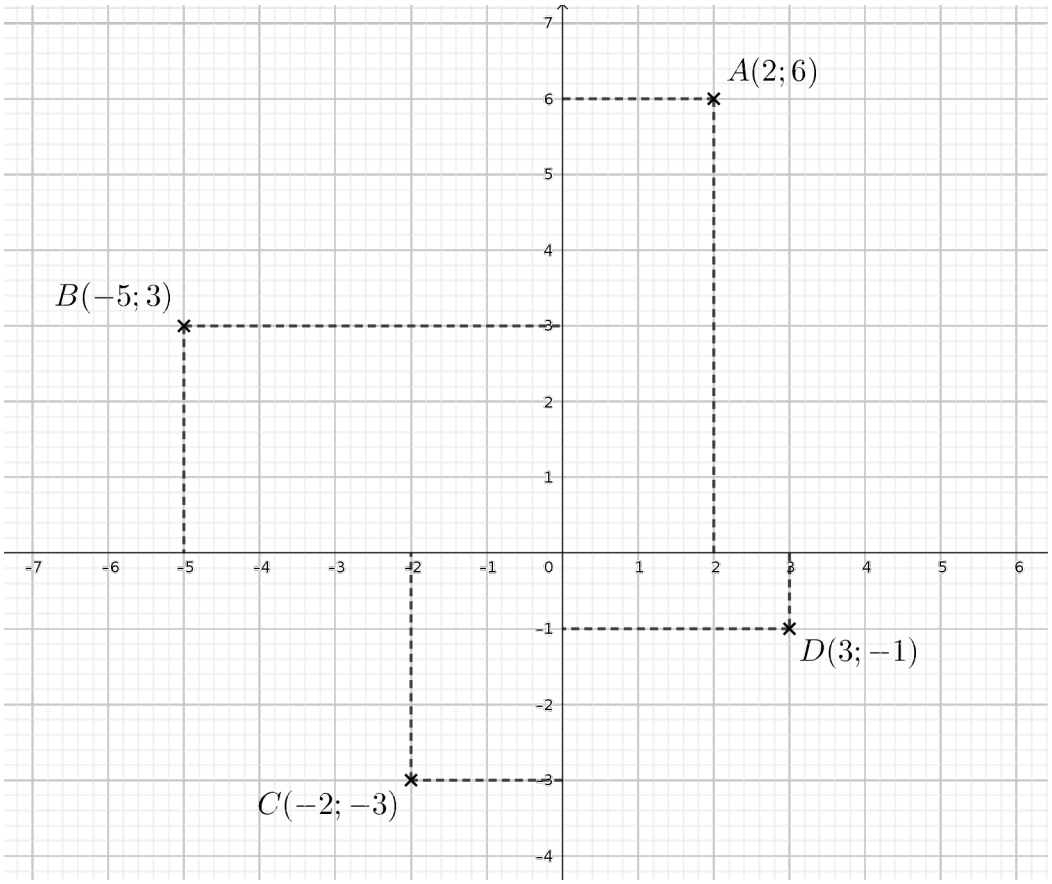
Vocabulaire :

- O est appelé l'origine du repère.
- La droite (OI) orientée de O vers I est appelée l'axe des abscisses du repère. La longueur OI est l'unité sur cet axe.
- La droite (OJ) orientée de O vers J est appelée l'axe des ordonnées du repère. La longueur OJ est l'unité sur cet axe.
- Si $(OI) \perp (OJ)$, alors le repère $(O; I, J)$ est dit orthogonal.
- Si $OI = OJ$, alors le repère $(O; I, J)$ est dit normé.
- Un repère orthogonal et normé est dit orthonormé.

Définition 13. Soit $(O; I, J)$. un repère du plan. Soit M un point du plan. La parallèle à l'axe des ordonnées passant par M coupe l'axe des abscisses en A. La parallèle à l'axe des abscisses passant par M coupe l'axe des ordonnées en B. Les nombres relatifs $x = \overline{OA}$ et $y = \overline{OB}$ sont appelés les coordonnées du point M dans le repère $(O; I, J)$. Plus précisément, x est appelé l'abscisse de M et y est appelé l'ordonnée de M. On note $M(x; y)$.

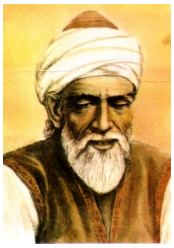
Remarque. A tout couple de nombres relatifs $(x; y)$ correspond un unique point M du plan et, réciproquement, à tout point M du plan correspond un unique couple de nombre relatifs $(x; y)$.

Illustration :



Chapitre 3

Nombres relatifs - Addition



Abu Al-Wafa

(Bouzjan 940 - Bagdad 998)

3.1 Somme de nombres relatifs

Remarque. Un joueur joue plusieurs parties successivement. Pour chacune des parties, il peut gagner ou bien perdre de l'argent. Si, pour un certaine partie, le joueur gagne une certaine somme d'argent, nous dirons qu'il s'agit d'un gain positif. Si, au contraire, il perd de l'argent, nous appellerons cela un gain négatif, qui sera représenté par un nombre négatif. On suppose à présent que le joueur jour deux parties successivement. On va calculer le « gain global » du joueur à l'issue de ces deux parties.

Exemple. Il existe quatre situations différentes :

1. S'il gagne successivement 8 euros et 7 euros, il gagne en définitive 15 euros.
   Nous écrirons : $(+8)+(+7)=(+15)$.
2. S'il perd successivement 8 euros et 7 euros, il perd en définitive 15 euros.
   Nous écrirons : $(-8)+(-7)=(-15)$.
3. S'il gagne 12 euros puis perd 7 euros, il gagne en définitive 5 euros. Nous écrirons : $(+12)+(-7)=(+5)$.
4. S'il perd 12 euros puis gagne 7 euros, il perd en définitive 5 euros. Nous écrirons : $(-12)+(+7)=(-5)$.

Définition 14. La somme de deux nombres relatifs de même signe est le nombre relatif de même signe que les deux autres et dont la valeur absolue est la somme de leurs valeurs absolues. La somme de deux nombres relatifs de signes opposés est le nombre relatif dont la valeur absolue est la différence de leurs valeurs absolues et dont le signe est celui des deux nombres qui a la plus grande valeur absolue.

Exemple. Voici deux exemples :

1. $(+6)+(+13)=(+19)$
2. $(-11)+(-9)=(-20)$
3. $(-4)+(+17)=(+13)$

4. $(-21) + (+8) = (-13)$

Remarque. La somme de plusieurs nombres relatifs rangés dans un certain ordre est le nombre relatif obtenu en ajoutant le premier nombre au second, le nombre obtenu au troisième, et ainsi de suite.

Exemple. Calculons $(+13) + (-15) + (-7) + (+3) + (-1)$.

3.2 Propriétés de l'addition

Proposition 15. *L'addition de deux nombres relatifs est :*

1. *Commutative : pour tous nombres relatifs a et b, $a + b = b + a$;*
2. *Associative : pour tous nombres relatifs a, b et c : $a + (b + c) = (a + b) + c$.*

Démonstration. Admise. □

Exemple. Voici deux exemples :

1. $(-3, 2) + (+1, 8) = (+1, 8) + (-3, 2) = (-1, 4)$
2. $[(+3) + (-7)] + (+12) = (-4) + (+12) = (+8)$ et $(+3) + [(-7) + (+12)] = (+3) + (+5) = (+8)$

Remarque. Ces deux propriétés de l'addition de nombres relatifs a pour conséquence qu'une somme de nombres relatifs est indépendante de l'ordre de ses termes. Par exemple, pour tous nombres relatifs a, b, c et d on a :

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= (a + b) + (c + d) \\ &= (c + d) + (a + b) \\ &= c + d + a + b \end{aligned}$$

Proposition 16. *Le nombre 0 est l'élément neutre pour l'addition. Autrement dit, pour tout nombre relatif a, $a + 0 = 0 + a = a$.*

Démonstration. Admise. □

Exemple. $(-7) + 0 = 0 + (-7) = (-7)$

Proposition 17. *La somme de deux nombres opposés est égale à zéro.*

Démonstration. Découle de la définition de la somme de deux nombres relatifs. □

Exemple. $(-12) + (+12) = 0$

Définition 18. Deux propriétés sont équivalentes si chacune découle de l'autre.

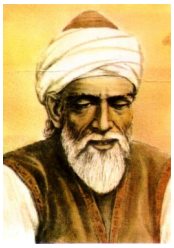
Exemple. Dire que « Emma est la sœur de Clément » est équivalent à dire que « Clément est le frère d'Emma ». En effet, si Emma est la sœur de Clément, alors Clément est le frère d'Emma. Et réciproquement, si Clément est le frère d'Emma, alors Emma est la sœur de Clément.

Proposition 19. *Les égalités $a = b$ et $a + c = b + c$ sont équivalentes.*

Démonstration. $\Rightarrow$: supposons que $a = b$. Alors les deux nombres obtenus en ajoutant c à a et b sont aussi égaux. D'où : $a + c = b + c$.
$\Leftarrow$: supposons que $a + c = b + c$. Alors les deux nombres obtenus en ajoutant $(-c)$ à $a + c$ et $b + c$ sont aussi égaux. D'où : $(a + c) + (-c) = (b + c) + (-c)$, soit : $a + [(+c) + (-c)] = b + [(+c) + (-c)]$, puis : $a + 0 = b + 0$, et enfin : $a = b$. □

Chapitre 4

Nombres relatifs - Soustraction



Abu Al-Wafa

(Bouzjan 940 - Bagdad 998)

4.1 Différence de deux nombres relatifs

Remarque. Étant donné deux nombres relatifs a et b, existe-t-il un nombre relatif x tel que $a = b + x$?

Exemple. Supposons qu'il existe un nombre x tel que $(-7) = (-4) + x$. Ajoutons l'opposé de (-4), c'est-à-dire $(+4)$, aux deux membres de l'égalité. On a alors : $(+4)+(-7) = (+4)+[(-4) + x]$ soit : $(-3) = [(+4) + (-4)]+x$ puis : $(-3) = x$. On vérifie que $(-7) = (-4) + (-3)$. Ce qui nous invite à poser la définition suivante :

Définition 20. On appelle différence de deux nombres relatifs a et b (dans cet ordre), l'unique nombre relatif tel que : $a = b + x$. On le note $a - b$.

Remarque. Les égalités $x = a - b$ et $b + x = a$ sont équivalentes.

Exemple. Voici deux exemples :

1. $(+17) - (+14) = (+3)$ car $(+14) + (+3) = (+17)$.
2. $(-1, 4) - (-2, 3) = (+0, 9)$ car $(-2, 3) + (+0, 9) = (-1, 4)$.

Proposition 21. *Pour soustraire un nombre relatif, on ajoute son opposé. Plus formellement, pour tous nombres relatifs a et b, on a : $a - b = a + (-b)$. Ainsi, toute soustraction se ramène à une addition.*

Démonstration. Calculer $a - b$, c'est chercher le nombre x tel que $x + b = a$. On ajoute $(-b)$ aux deux membres de l'égalité : $x + b + (-b) = a + (-b)$. D'où : $a - b = a + (-b)$. □

Exemple. Voici trois exemples !

1. $(-12) - (+13) = (-12) + (-13) = (-25)$.
2. $(+5) - (-11) = (+5) + (+11) = (+16)$.

3. $(-7,5)-(-18,4)=(-7,5)+(+18,4)=(+10,9)$.

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Contrairement à l'addition, la soustraction n'est ni associative, ni commutative :
   (a) $(+5)-(+3)=(+5)+(-3)=(+2)$ et $(+3)-(+5)=(+3)+(-5)=(-2)$
   (b) $\begin{cases}(+6)-[(+5)-(+4)]=(+6)-[(+5)+(-4)]=(+6)-(+1)=(+6)+(-1)=(+5)\\[(+6)-(+5)]-(+4)=[(+6)+(-5)]-(-4)=(+1)+(-4)=(-3)\end{cases}$
2. On peut désormais convenir de quelques simplifications d'écriture :
   (a) $0-a=-a$
   (b) Pour les nombres positifs, le signe « + » devient facultatif : $(+7,2)=7,2$.

Exemple. $(-7)+(-6)+(+5)=-7-6+5=-13+5=-8$ et $(+8)-(+12)=(+8)+(-12)=8-12=-4$.

Exercice. Calculer $-3-5-(-6)-4+7$.

Remarque. On peut généraliser par ce que l'on appelle la « règle des signes » :

Proposition 22. *(Règle des signes)*

1. *+ devant + se remplace par +.*
2. *− devant − se remplace par +.*
3. *+ devant − se remplace par −.*
4. *− devant + se remplace par −.*

Démonstration. Admise. □

4.2 Comparaisons

Définition 23. Soient a et b deux nombres relatifs. On dit que :

1. a est supérieur à b, ou que a est plus grand que b, et l'on note $a>b$ lorsque la différence $a-b$ est positive et non nulle.
2. a est supérieur ou égal à b, et l'on note $a\geqslant b$ lorsque la différence $a-b$ est positive.
3. a est inférieur à b, ou que a est plus petit que b, et l'on note $a<b$ lorsque la différence $a-b$ est négative et non nulle.
4. a est inférieur ou égal à b, et l'on note $a\leqslant b$ lorsque la différence $a-b$ est négative.

Exemple. $(+12)-(+7)=(+5)$ donc $(+12)>(+7)$.

Remarque. On peut effectuer quelques remarques :

1. Un nombre positif est supérieur à tout nombre négatif.
2. De deux nombres positifs, le plus grand est celui qui a la plus grande valeur absolue.
3. De deux nombres négatifs, le grand est celui qui a la plus petite valeur absolue.
4. Si a et b désignent les abscisses respectives des points A et B sur un axe, alors $a<b$ si, et seulement si, le parcours de A vers B se fait dans le même sens que l'orientation de l'axe.

Proposition 24. *Le sens d'une inégalité ne change pas lorsque l'on ajoute ou retranche un même nombre aux deux membres. Plus formellement, pour tous nombres a, b et c, si $a\leqslant b$ alors $a+c\leqslant b+c$.*

Démonstration. Soient a, b et c trois nombres. Supposons que $a \leqslant b$. D'une part :

$$\begin{aligned}(a+c)-(b+c) &= a+c-b-c \\ &= a-b+c-c \\ &= a-b+0 \\ &= a-b\end{aligned}$$

Or $a-b$ est négatif. Donc $(a+c)-(b+c)$ est négatif, et par suite, $a+c \leqslant b+c$. D'autre part :

$$\begin{aligned}(a-c)-(b-c) &= a-c-b+c \\ &= a-b-c+c \\ &= a-b+0 \\ &= a-b\end{aligned}$$

Or $a-b$ est négatif. Donc $(a-c)-(b-c)$ est négatif, et par suite, $a-c \leqslant b-c$.

□

Exemple. Soit x un nombre relatif. Supposons que $x+3 \leqslant 2$. Que pouvons-nous dire concernant x ?

Proposition 25. *On peut additionner membre à membre deux inégalités de même sens. Plus formellement, pour tous nombres a, b, c et d, si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a+c \leqslant b+d$.*

Démonstration. Soient a, b, c et d quatre nombres. Supposons que $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$. Alors :

$$\begin{aligned}(b+d)-(a+c) &= b+d-a-c \\ &= b-a+d-c \\ &= (b-a)+(d-c)\end{aligned}$$

Or $b-a$ et $d-c$ sont positifs. Donc $(b-a)+(d-c)$ est positif, et par suite, $a+c \leqslant b+d$. □

4.3 Application : les mesures algébriques

Proposition 26. *Soient A et B deux points d'abscisses respectives a et b. Alors :*

1. $\overline{AB} = b-a$
2. $\overline{BA} = -\overline{AB}$
3. $\overline{AB}+\overline{BC} = \overline{AC}$ *(relation de Chasles)*

Démonstration. 1. Découle de la définition de la mesure algébrique.
2. Découle de l'égalité $-(b-a) = a-b$.
3. $\overline{AB}+\overline{BC} = (b-a)+(c-b) = b-a+c-b = b-b-a+c = 0+c-a = c-a = \overline{AC}$ □

Remarque. La relation de Chasles est vrai quelles que soient les positions des points alignés A, B et C.
A contrario, l'égalité $AB+BC = AC$ est vraie si, et seulement si, $B \in [AC]$.

Chapitre 5

Nombres rationnels - Présentation

Héron d'Alexandrie

(Alexandrie I^{er} siècle)

Dans ce chapitre, nous ne considérerons que des nombres positifs.

5.1 Généralités

Définition 27. Soient a et b deux nombres décimaux positifs avec b non nul. On appelle quotient de a par b (ou rapport de a par b) le nombre qui, multiplié par b donne a. On note ce quotient $\frac{a}{b}$, et on lit : « a divisé par b » ou « a sur b ». a est appelé le numérateur du quotient et b est appelé le dénominateur du quotient. Lorsque a et b sont des entiers relatifs, $\frac{a}{b}$ est appelé une fraction.

Exemple. Le quotient de $3,7$ par $2,31$ se note $\frac{3,7}{2,31}$.

Remarque. On peut effectuer trois remarques :

1. Un quotient de deux nombres décimaux peut toujours s'écrire sous la forme d'une fraction.
   Exemple : $\frac{3,7}{2,31} = \frac{370}{231}$.
2. La plupart du temps, le quotient de deux nombres décimaux n'est pas un nombre décimal.
   Exemple : $\frac{2}{3} = 0,666\ldots$
3. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$. Il contient l'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$.

Proposition 28. *On ne change pas un quotient (et donc une fraction) lorsque l'on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul. Plus formellement, pour tous les nombres décimaux a, b et c avec b et c non nuls, on a :*

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$$

Démonstration. Par définition, $a = \frac{a}{b} \times b$ et $a \times c = \frac{a \times c}{b \times c} \times (b \times c)$. D'où : $\left(\frac{a}{b} \times b\right) \times c = \frac{a \times c}{b \times c} \times (b \times c)$. Puis : $\frac{a}{b} \times (b \times c) = \frac{a \times c}{b \times c} \times (b \times c)$. Et enfin : $\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$. □

Exemple. $\frac{1}{4} = \frac{1\times3}{4\times3} = \frac{3}{12}$

Remarque. Un quotient de deux nombres décimaux peut donc toujours d'écrire sous la forme d'une fraction.

Exemple. $\frac{3{,}7}{2{,}31} = \frac{3{,}7\times100}{2{,}31\times100} = \frac{370}{231}$

Définition 29. Simplifier une fraction consiste à déterminer une fraction égale à celle-ci à l'aide d'un numérateur et d'un dénominateur inférieurs aux précédents. Si une fraction n'est plus simplifiable, alors elle est dite irréductible.

Exemple. Simplifions $\frac{32}{128}$. On a : $\frac{32}{128} = \frac{16}{64} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

Remarque. Une méthode de simplification efficace consiste à décomposer numérateur et dénominateur de la fraction en produit de facteurs premiers puis à simplifier les facteurs communs aux deux.

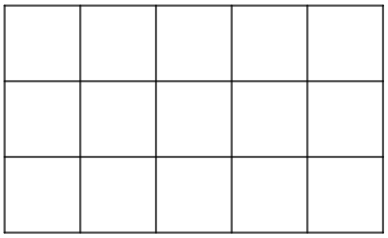
Exemple. $\frac{360}{1\,400} = \frac{2\times2\times2\times3\times3\times5}{2\times2\times2\times5\times5\times7} = \frac{9}{35}$.

5.2 Réduction au même dénominateur

Définition 30. Réduire deux ou plusieurs fractions au même dénominateur consiste à les remplacer par des fractions égales ayant toutes le même dénominateur.

Exemple. Réduisons au même dénominateur les fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{3}$.

Illustration : Sur la figure ci-dessous, on constate que $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$ et $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$.



Exercice. Réduire au même dénominateur le fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{8}{9}$.

Remarque. Une méthode de réduction au même dénominateur efficace consiste à multiplier les numérateurs de chaque fraction par le(s) dénominateur(s) de(s) (l')autre(s). Cependant, dans de nombreux cas, il y a plus rapide.

Exemple. Réduisons au même dénominateur les fractions :

1. $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{9}$ et $\frac{7}{4}$.
2. $\frac{17}{55}$ et $\frac{9}{5}$.
3. $\frac{1}{63}$ et $\frac{7}{45}$.
4. $\frac{18}{28}$, $\frac{19}{21}$ et $\frac{70}{150}$.

5.3 Comparaison de fractions

Proposition 31. *On compare aisément une fraction à l'unité :*

1. *Si le numérateur d'une fraction est strictement inférieur à son dénominateur, alors cette fraction est strictement inférieure à* 1.
   Plus formellement, si $a < b$, *alors* $\frac{a}{b} < 1$.
2. *Si le numérateur d'une fraction est strictement supérieur à son dénominateur, alors cette fraction est strictement supérieure à* 1.
   Plus formellement, si $a > b$, *alors* $\frac{a}{b} > 1$.

Démonstration. Évidente car $\frac{a}{b} = a \div b$. □

Exemple. Comparons les fractions $\frac{17}{19}$ et $\frac{85}{82}$.

Proposition 32. *Si deux fractions ont le même dénominateur, alors la plus grande des deux est celle qui a le plus grand numérateur. Plus formellement, si* $a < b$, *alors* $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Démonstration. Évidente car $\frac{a}{b} = a \div b$. □

Exemple. $27 < 40$ donc $\frac{27}{40} < \frac{40}{45}$.

Proposition 33. *Si deux fractions ont le même numérateur ; alors la plus grande des deux est celle qui a le plus petit dénominateur. Plus formellement, si* $b < c$, *alors* $\frac{a}{b} > \frac{a}{c}$.

Démonstration. Évidente car $\frac{a}{b} = a \div b$. □

Exemple. $27 < 40$ donc $\frac{45}{27} > \frac{45}{40}$.

Remarque. Si les deux fractions ont des numérateurs et des dénominateurs différents, alors on réduit les deux fractions au même dénominateur afin d'appliquer la proposition 32.

Exemple. Comparons les fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{8}{9}$.

5.4 Partie entière d'une fraction

Définition 34. On appelle partie entière d'une fraction le plus grand entier qui lui est inférieur.

Exemple. Déterminons la partie entière de la fraction $\frac{17}{5}$. $\frac{17}{5} = \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5}$. Donc la partie entière de la fraction $\frac{17}{5}$ est 3.

Remarque. Plus généralement, pour extraire la partie entière d'une fraction $\frac{a}{b}$, on commence par effectuer la division euclidienne de a par b :

$$\begin{cases} a = b \times q + r \\ 0 \leqslant r < b \end{cases}$$

La partie entière de $\frac{a}{b}$ est alors donnée par le quotient q de cette division euclidienne. On a donc :

$$\frac{a}{b} = \frac{b \times q + r}{b} = \frac{b}{b} \times q + \frac{r}{b} = q + \frac{r}{b} \text{ avec } 0 \leqslant \frac{r}{b} < 1$$

5.5 Fractions décimales

Définition 35. On appelle fraction décimale toute fraction dont le dénominateur est à 10, 100, 1 000 ou, plus généralement, à 10 multiplié par lui-même un certain nombre de fois (i.e. puissance de dix).

Exemple. $\frac{43}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{54\,293}{1\,000}$ et $\frac{23}{100\,000}$ sont des fractions décimales.

Proposition 36. *Toute fraction décimale peut s'écrire sous la forme d'un nombre décimal.*

Démonstration. Évidente d'après la définition d'un nombre décimal. □

Exemple. $\frac{7\,463}{100} = 74,63$

Proposition 37. *Tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.*

Démonstration. Évidente d'après la définition d'une fraction décimale. □

Exemple. $2,879 = \frac{2\,879}{1\,000}$

Chapitre 6

Nombres rationnels - Addition et soustraction

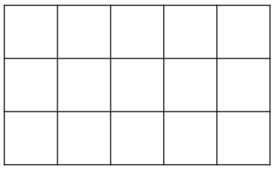
Héron d'Alexandrie

(Alexandrie I^{er} siècle)

6.1 Addition de deux nombres rationnels

Exemple. Additionnons $\frac{3}{5}$ et $\frac{1}{5}$.

Illustration :



Remarque. Ce résultat se généralise aisément :

Proposition 38. *La somme de deux ou plusieurs fractions de même dénominateur est la fraction ayant le dénominateur commun et dont le numérateur est la somme des numérateurs des fractions données. Plus formellement, pour tous nombres entiers relatifs a, b et c avec c non nul, on a :*

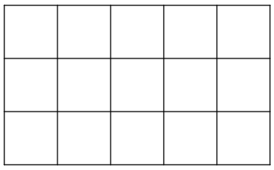
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Démonstration. Admise. □

Exemple. $\frac{3}{4} + \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+7+1}{4} = \frac{11}{4}$

Remarque. Additionnons à présent $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{5}$.

Illustration :



Ce résultat se généralise aisément :

Proposition 39. *Pour calculer la somme de deux ou plusieurs fractions il faut et il suffit de les réduire au même dénominateur, calculer la somme des numérateurs des fractions obtenues, et conserver le dénominateur commun. Plus formellement, pour tous nombres entiers relatifs a, b, c et d avec b et d non nuls, on a :*

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times d}+\frac{c\times b}{d\times b}=\frac{a\times d+c\times b}{b\times d}$$

Démonstration. Admise. □

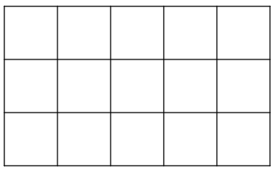
Exemple. $\frac{4}{7}+\frac{5}{8}+\frac{3}{2}=\frac{32}{56}+\frac{35}{56}+\frac{84}{56}=\frac{151}{56}$

Remarque. L'addition des fractions est :

1. Associative : $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$.
2. Commutative : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$.

6.2 Soustraction de deux nombres rationnels

Exemple. Calculons la différence de $\frac{3}{5}$ et $\frac{1}{5}$.
Illustration :



Remarque. Ce résultat se généralise aisément :

Proposition 40. *La différence de deux ou plusieurs fractions de même dénominateur est la fraction ayant le dénominateur commun et dont le numérateur est la différence des numérateurs des fractions données.. Plus formellement, pour tous nombres entiers relatifs a, b et c avec c non nul, on a :*

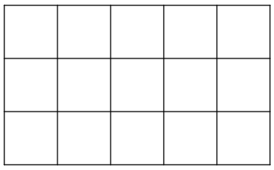
$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Démonstration. Admise. □

Exemple. $\frac{13}{4}-\frac{3}{4}=\frac{13-3}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

Remarque. Calculons à présent la différence de $\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{5}$.

Illustration :



Ce résultat se généralise aisément :

Proposition 41. *Pour calculer la différence de deux ou plusieurs fractions il faut et il suffit de les réduire au même dénominateur, calculer la différence des numérateurs des fractions obtenues, et conserver le dénominateur commun. Plus formellement, pour tous nombres entiers relatifs a, b, c et d avec b et d non nuls, on a :*

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} - \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{a \times d - c \times b}{b \times d}$$

Démonstration. Admise. □

Exemple. $5 - \frac{4}{7}$ et $\frac{33}{18} - \frac{7}{14}$.

Remarque. La soustraction de fractions n'est pas commutative. Exemple. Est-elle associative ?

Chapitre 7

Expressions algébriques

Al-Khawarizmi

(Khiva 780 - Bagdad 850)

7.1 Réduction d'une expression algébrique

Définition 42. On appelle expression algébrique toute expression dans laquelle plusieurs nombres sont représentés par des lettres.

Exemple. $3 \times (x+2)$, $ab+5$ et $u(v+3)$ sont des expressions algébriques.

Définition 43. Réduire une expression algébrique consiste à effectuer toutes les additions et soustractions possibles présentes afin d'obtenir une expression plus « simple ».

Exemple. $5x - 2x = 3x$, $7 - 4x + 11 - x = 18 - 5x$ ou encore $5x^2 - 7x - 12x^2 + 9 = -7x^2 - 7x + 9$.

Proposition 44. *On a les règles de signes suivantes :*

1. *+ devant + se remplace par +.*
2. *− devant − se remplace par +.*
3. *+ devant − se remplace par −.*
4. *− devant + se remplace par − .*

Démonstration. Cela découle de la règle des signes démontrée en classe de Quatrième. □

Exemple. Réduisons l'expression algébrique : $(x+5) - (x-13)$.

7.2 Développement d'une expression algébrique

Définition 45. Il existe deux distributivités de la multiplication par rapport à l'addition : la simple et la double. Soient a, b, c et d quatre nombres réels. On a :

1. *Simple distributivité* : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c = ab + ac$
2. *Double distributivité* : $(a+b) \times (c+d) = (a+b)(c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d = ac + ad + bc + bd$

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. Ces deux distributivités de $\times$ par rapport à $+$ peuvent se représenter géométriquement : (aires de rectangles).
2. Elles se généralisent aisément :
   (a) $a \times (b + c + d) = ab + ac + ad$. Démonstration.
   (b) $(a + b) \times (c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$. Démonstration.

Définition 46. Développer un produit consiste à transformer ce produit en une (ou plusieurs) somme(s) à l'aide de la distributivité de $\times$ par rapport à $+$.

Exemple. En voici deux :

1. $7(a + 3) = 7 \times a + 7 \times 3 = 7a + 21$.
2. $4(z + 3 - x) = 4 \times z + 4 \times 3 - 4 \times x = 4z - 4x + 12$.

7.3 Factorisation d'une expression algébrique

Définition 47. Factoriser une expression algébrique consiste à transformer cette expression en un produit d'un (ou plusieurs) facteur(s) à l'aide de la distributivité de $\times$ par rapport à $+$.

Exemple. En voici deux :

1. $3x + 6 + 21y = 3 \times x + 3 \times 2 + 3 \times 7y = 3 \times (x + 2 + 7y) = 3(x + 7y + 2)$.
2. $4a - 10 = 2 \times 2a - 2 \times 5 = 2 \times (2a - 5) = 2(2a - 5)$.

Remarque. On peut effecteur deux remarques :

1. La factorisation est la démarche inverse du développement. On ne s'étonnera donc pas que ces deux démarches utilisent la distributivité dans un sens contraire l'une de l'autre.
2. Lorsqu'on factorise une expression algébrique, on factorise toujours par « le plus grand diviseur commun » à tous les termes de la somme. Par exemple, $8x + 64 = 2(4x + 32)$ est une factorisation non terminée.

Chapitre 8

Équations

Al-Khawarizmi

(Khiva 780 - Bagdad 850)

8.1 Généralités

Définition 48. Toute égalité faisant intervenir une ou plusieurs quantités inconnues est appelée une équation. Les quantités inconnues sont traditionnellement désignées par des lettres minuscules (x, y, z, t, etc.). L'objectif est de résoudre l'équation, c'est-à-dire trouver toutes les valeurs que peuvent prendre les inconnues afin d'obtenir une égalité vraie.

Exemple. $6x + 3 = 21$ est une équation (du premier degré) d'inconnue x. Si l'on remplace x par 5, on obtient : $6 \times 5 + 3 = 21$, soit : $33 = 21$ qui est une égalité fausse. Par conséquent, 5 n'est pas solution de cette équation. En revanche, si l'on remplace x par 3, on obtient, : $6 \times 3 + 3 = 21$, soit : $21 = 21$ qui est une égalité vraie. Par conséquent, 3 est solution de cette équation. Des questions demeurent cependant :

1. Existe-t-il d'autres solutions que 3 ?
2. Existe-t-il un moyen mécanique de déterminer toutes les solutions d'une équation donnée ?

8.2 Égalité et opérations

Proposition 49. *Si l'on ajoute ou retranche un même nombre aux deux membres d'une égalité, alors on obtient une nouvelle égalité.*

Démonstration. On dit que l'addition et la soustraction sont compatibles avec l'égalité. Les raisons profondes de cette compatibilité nous échappent ici. □

Exemple. Si $a = b$, alors $a - 5 = b - 5$ et $a + 9 = b + 9$.

Remarque. Cette proposition nous invite à isoler les termes en x dans une équation.

Exemple. On a :

$$\begin{aligned} 2x - 4 + 5x &= 19 + 3x - 7 \\ 7x - 4 &= 3x + 12 \\ 7x - 3x &= 12 + 4 \\ 4x &= 16 \end{aligned}$$

Proposition 50. *Si l'on multiplie ou divise les deux membres d'une égalité par un même nombre (non nul dans le cas de la division), alors on obtient une nouvelle égalité.*

Démonstration. On dit que la multiplication et la division sont compatibles avec l'égalité. Les raisons profondes de cette compatibilité nous échappent ici. □

Exemple. Si $a = b$, alors $4 \times a = 4 \times b$ et $\frac{a}{3} = \frac{b}{3}$.

Remarque. Cette proposition nous invite à isoler les termes en x dans une équation.

Exemple. On a :

$$\begin{aligned} 2x - 4 + 5x &= 19 + 3x - 7 \\ 7x - 4 &= 3x + 12 \\ 7x - 3x &= 12 + 4 \\ 4x &= 16 \\ x &= \frac{16}{4} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Les égalités précédentes sont toutes équivalentes les unes aux autres. Ainsi, les solutions de l'une sont exactement les solutions d'une autre, on ne perd pas de solution et l'on ne gagne pas de solution au cours du mécanisme. On est donc certain d'avoir toutes les solutions de l'équation et seulement elles à la fin du processus.
2. Il est vivement conseillé de faire la vérification : on report chacune des solutions trouvées dans l'équation initiale et l'on vérifie que les membres de droite et de gauche sont bien égaux.

Exercice. Résoudre l'équation : $3(3x + 1) - 31 = 26 - 2(x + 5)$.

Chapitre 9

Proportionnalité

Euclide

(Grèce - 300 avt J.-C.)

9.1 Nombres proportionnels

Exemple. Lors d'un orage, on peut déterminer la distance à laquelle vient de tomber la foudre en comptant le temps écoulé entre le moment où l'on voit l'éclair et le moment où l'on entend le bruit du tonnerre. En effet, le son se déplace environ à la vitesse de 300 m/s. On peut donc dresser le tableau de correspondance suivant :

Temps de parcours (en secondes)	0,5	1	2	3	4
Distance parcoure (en mètres)	150	300	600	900	1 200

Ainsi, s'il s'écoule 4 secondes entre la vision de l'éclair et l'audition du tonnerre, on peut en déduire que la foudre est tombée à 1,2 km. On dit que la distance parcourue par le son est proportionnelle au temps de parcours. On appelle alors coefficient de proportionnalité le nombre 300 par lequel on multiplie le temps de parcours pour connaître la distance parcourue.

Définition 51. Deux grandeurs sont dites proportionnelles si l'on passe des valeurs numériques exprimant l'une des ces grandeurs à celles exprimant l'autre grandeur en multipliant par un facteur constant. Ce facteur constant est appelé coefficient de proportionnalité.

Remarque. Considérons deux grandeurs proportionnelles. Supposons que la première prend deux valeurs a et b quand la deuxième prend les deux valeurs correspondantes a' et b'. On dit souvent que les nombres a et b sont proportionnels aux nombres a' et b'. On notant k le coefficient de proportionnalité, on a le tableau suivant :

a	b
a'	b'

$\downarrow \times k$

Ce tableau n'est qu'un moyen commode pour représenter les deux égalités : $\begin{cases} a' = k \times a \\ b' = k \times b \end{cases}$.

9.2 Règle de trois

Remarque. La règle de trois permet de résoudre des problèmes sur des grandeurs proportionnelles. Elle repose sur « la réduction à l'unité ». Pour calculer le prix de x objets connaissant le prix de y objets identiques aux autres, on commence par calculer le prix unitaire (i.e. d'un seul objet) qui n'est autre que le coefficient de proportionnalité des deux grandeurs.

Exemple. On a payé 25 euros pour 15 cahiers achetés. Combien coûtent 36 cahiers ?

Solution : le prix et le nombre de cahiers sont des grandeurs proportionnelles. On complète le tableau suivant :

	Nombre de cahiers	Prix (en euros)	
	15	25	$\downarrow \div 15$
$\downarrow \times 36$	1	$\frac{25}{15} = \frac{5}{3}$	
	36	$\frac{5}{3} \times 36 = 60$	

Remarque. La règle de trois tire son nom du fait que l'on présente le raisonnement sur trois lignes.

9.3 Propriétés

Proposition 52. *(Produit en croix) Si les nombres a et b sont proportionnels aux nombres a' et b', alors $a' \times b = a \times b'$.*

Démonstration. Soit k le coefficient de proportionnalité entre les nombres a et b d'une part et les nombres a' et b' d'autre part. On a : $\begin{cases} a' = k \times a \\ b' = k \times b \end{cases}$. D'où :

$$\begin{aligned} a' \times b &= (k \times a) \times b \\ &= (a \times k) \times b \text{ commutativité de } \times \\ &= a \times (k \times b) \text{ associativité de } \times \\ &= a \times b' \end{aligned}$$

□

Remarque. Dans une situation de proportionnalité, quand on connaît trois des quatre nombres, on peut alors en déduire la quatrième. Ce quatrième nombre est parfois appelé la quatrième proportionnelle.

Exemple. Si les nombres a et b sont proportionnels aux nombres a' et x, alors on a :

a	b
a'	x

D'après le produit en croix, on a : $a \times x = a' \times b$. D'où : $x = \frac{a'b}{a}$.

Exercice. Compléter le tableau de proportionnalité suivant :

Volume d'essence (en litres)	5	41	y
Masse d'essence (en kilogrammes)	$3,7$	x	$34,04$

Proposition 53. *Si les nombres a et b sont proportionnels aux nombres a' et b', alors :*

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a+a'}{b+b'}$$

Démonstration. Soit k le coefficient de proportionnalité entre les nombres a et b d'une part et les nombres a' et b' d'autre part. On a : $\begin{cases} a' = k \times a \\ b' = k \times b \end{cases}$. D'où : $a' + b' = k \times a + k \times b = k \times (a+b)$, puis : $k = \frac{a'+b'}{a+b}$. Or $k = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. □

Remarque. La réciproque de la proposition 53 est vraie elle aussi : « Si $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{a+a'}{b+b'}$, alors les nombres a et b sont proportionnels aux nombres a' et b'. ». Autrement dit, si les les nombres a et b ne sont pas proportionnels aux nombres a' et b', alors $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} \neq \frac{a+a'}{b+b'}$.

9.4 Pourcentages et échelles

Définition 54. On appelle pourcentage tout coefficient de proportionnalité exprimé sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est 100.

Exemple. $\frac{17}{100}$ se lit « 17 pour cent » et s'écrit aussi $17\,\%$.

Exercice. Un garagiste rachète une voiture d'occasion 6 200 euros. Il la revend en faisant un bénéfice de $40\,\%$ sur le prix d'achat. Quel est le prix de vente ?

Définition 55. On appelle échelle d'un dessin le nombre par lequel on multiplie les dimensions de l'objet pour le représenter. Plus formellement :

$$\text{échelle} = \frac{\text{dimensions sur le dessin}}{\text{dimensions réelles}}$$

Exemple. Pour représenter un pays ou une région sur une carte, on multiplie les dimensions réelles par un coefficient de proportionnalité, l'échelle. Celle-ci est généralement exprimée par une fraction de numérateur 1. Par exemple, sur une carte local I.G.N. TOP 25, on peut lire sur la légende que l'échelle vaut : « 1 : 25 000 ». Cela signifie qu'une distance de 1 cm mesurée sur la carte correspond à une distance de 25 000 cm dans la réalité.

Chapitre 10

Éléments de géométrie plane

Euclide

(Grèce - 300 avt J.-C.)

Remarque. Soient A et B deux points distincts du plan. On note :

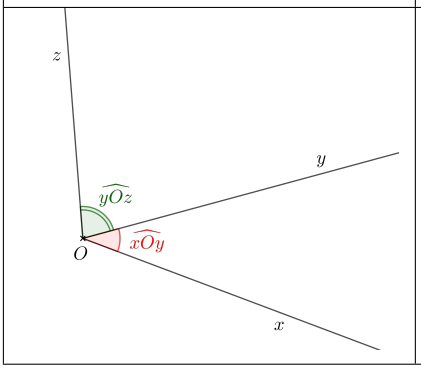
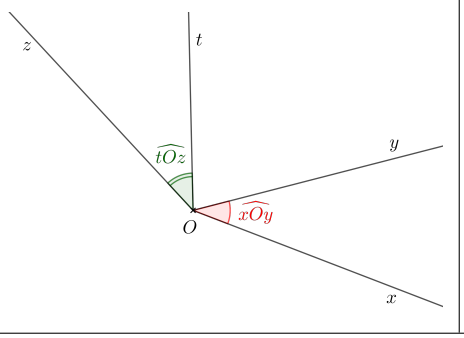
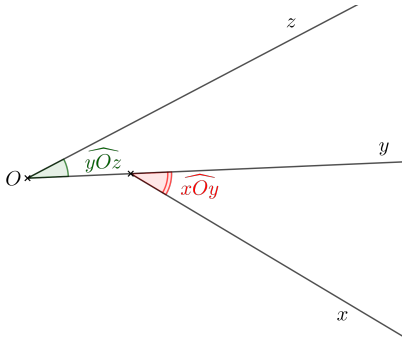
1. (AB) la droite passant par A et B.
2. $[AB)$ la demi-droite d'origine A et passant par B.
3. $[AB]$ le segment d'extrémités A et B.
4. AB la longueur du segment $[AB]$.
5. $\overline{AB}$ la mesure algébrique du segment $[AB]$ si la droite (AB) a été préalablement orientée.

10.1 Angles

On ne considérera que des angles saillants (i.e. non rentrants, de mesure inférieure ou égale à 180°).

Définition 56. Deux angles sont dits adjacents s'ils ont même sommet, un côté commun et s'ils sont situés de part et d'autre de ce côté commun.

Illustration :

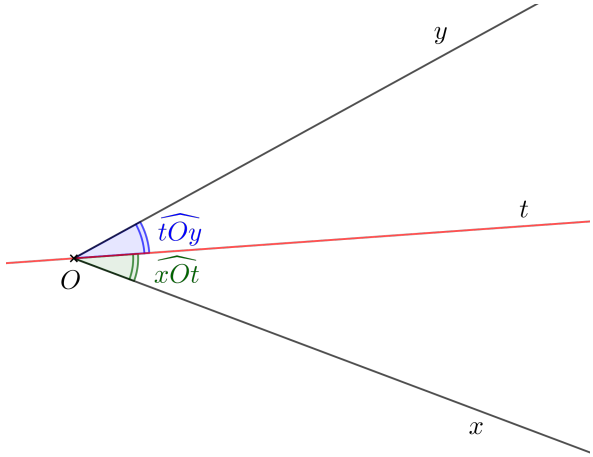
Adjacents	Non adjacents	
		

Proposition 57. *Si deux angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont adjacents, alors $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC}$.*

Démonstration. Évidente. □

Définition 58. Soit $\widehat{AOB}$ un angle, on appelle bissectrice de cet angle la demi-droite qui partage cet angle en deux angles adjacents égaux.

Illustration : Sur la figure ci-dessous, la demi-droite $[Ot)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

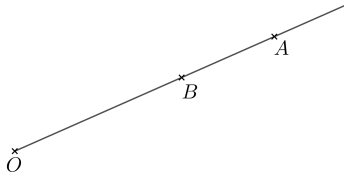
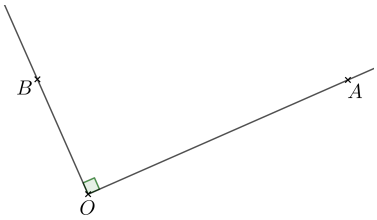
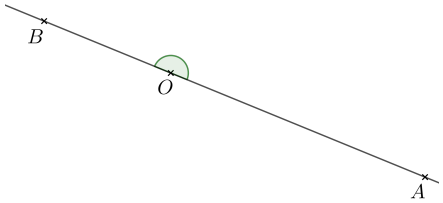


Remarque. Bien que la bissectrice d'un angle soit en toute rigueur une demi-droite, on désigne parfois aussi par bissectrice de l'angle la droite qui porte cette demi-droite.

Proposition 59. *Si $[OM)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ alors $\widehat{AOM} = \widehat{BOM} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.*

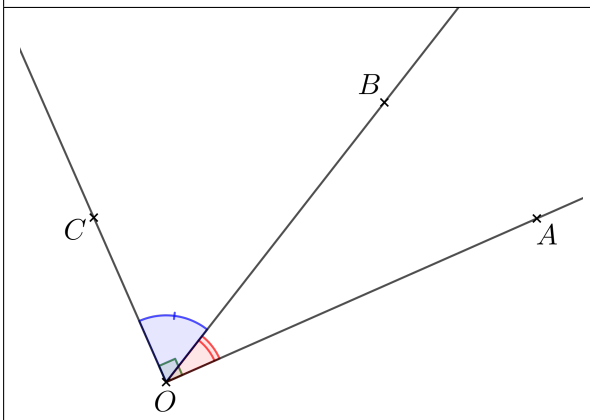
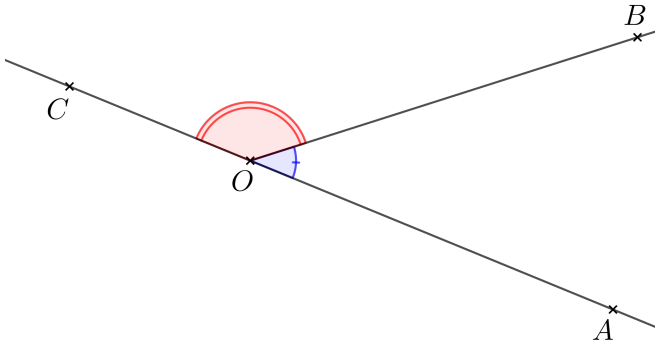
Démonstration. Découle directement de la définition 58. □

Exemple. Trois angles particuliers sont à connaître :

$\widehat{AOB}$ est un angle nul	$\widehat{AOB}$ est un angle droit	$\widehat{AOB}$ est un angle plat
		

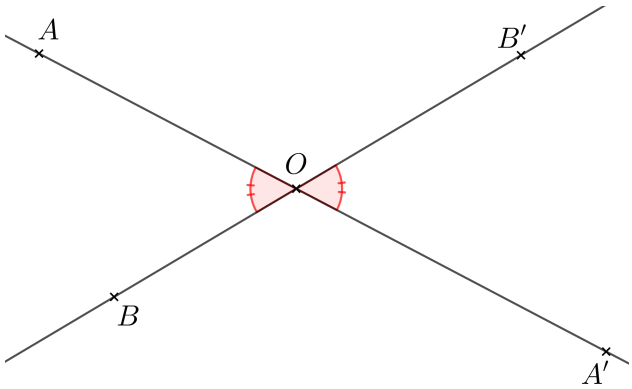
Définition 60. On appelle angles complémentaires deux angles dont la somme est égale à 90°. On appelle angles supplémentaires deux angles dont le somme est égale à 180°.

Illustration :

$\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont complémentaires	$\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont supplémentaires
	

Définition 61. Deux angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ sont dits opposés par le sommet si les droites (OA) et (OB) sont respectivement confondues avec les droites (OA') et (OB').

Illustration :



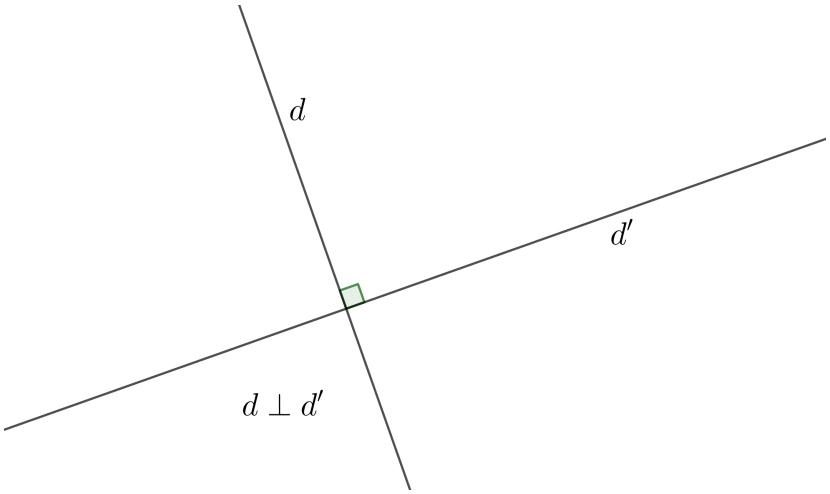
Proposition 62. *Si deux angles sont opposés par le sommet, alors ils sont égaux.*

Démonstration. Soient $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ deux angles opposés par le sommet. $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ admettent tous les deux l'angle $\widehat{AOB'}$ comme supplémentaire. Par conséquent, ils sont égaux. □

10.2 Droites perpendiculaires

Définition 63. Deux droites sont dites perpendiculaires (ou orthogonales) si les quatre angles qu'elles forment en leur point d'intersection sont droits.

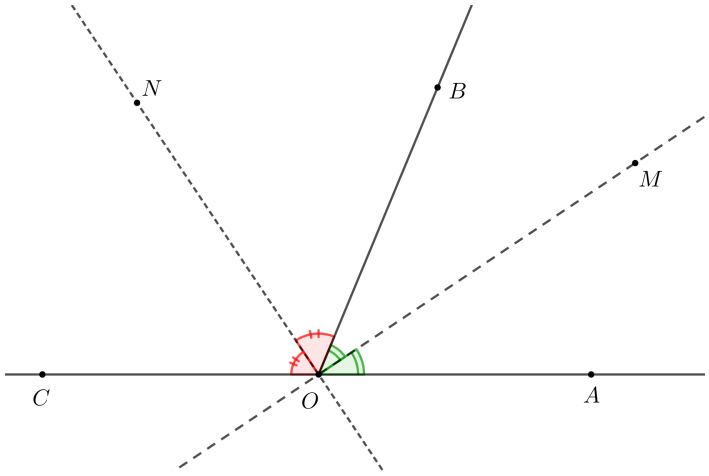
Illustration :



Remarque. D'après la proposition 62, il suffit qu'un des quatre angles soit droit pour que les droites soient perpendiculaires.

Proposition 64. *Les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires sont perpendiculaires.*

Démonstration. Soient $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ deux angles adjacents supplémentaires.



On note $[OM)$ la bissectrice de $\widehat{AOB}$ et $[ON)$ la bissectrice de $\widehat{BOC}$. $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont supplémentaires donc, par définition, $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 180°$. D'où : $\frac{1}{2}\widehat{AOB} + \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 90°$ c'est-à-dire $\widehat{MOB} + \widehat{BON} = 90°$ et donc $\widehat{MON} = 90°$. Ainsi, les bissectrices $[OM)$ et $[ON)$ sont bien perpendiculaires. □

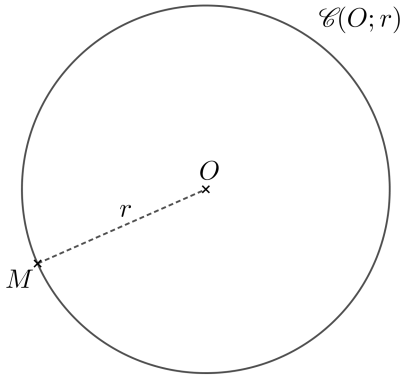
Proposition 65. *Soient d une droite et A un point. Il existe une unique droite perpendiculaire à d passant par A.*

Démonstration. Admise. □

10.3 Cercle

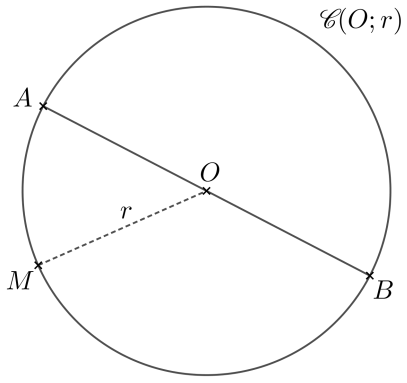
Définition 66. Soient O un point et r un nombre réel. On appelle cercle de centre O et de rayon r, noté $\mathscr{C}(O;r)$, l'ensemble des points du plan situés à une distance r du point O. Plus formellement, $\mathscr{C}(O;r) = \{M \in \mathscr{P},\ OM = r\}$.

Illustration :



Définition 67. Soit $\mathscr{C}(O;r)$ un cercle. Soient A et B deux points appartenant à $\mathscr{C}(O;r)$. Le segment $[AB]$ est appelé une corde du cercle. Si de plus, $O \in [AB]$, alors $[AB]$ est appelé un diamètre du cercle. On dit alors que les points A et B sont diamétralement opposés.

Illustration :



Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Un point N tel que $ON < r$ est dit intérieur au cercle $\mathscr{C}(O;r)$.
2. L'ensemble des points N du plan tels que $ON < r$ est appelé le disque de centre O et de rayon r. On le note $\mathscr{D}(O;r)$.
3. Un point N tel que $ON > r$ est dit extérieur au cercle $\mathscr{C}(O;r)$.

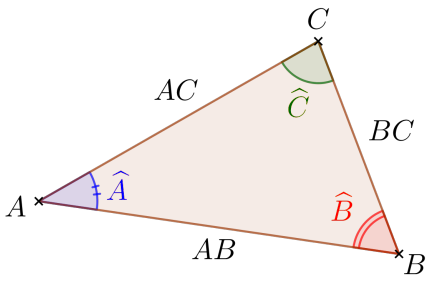
10.4 Triangles

Définition 68. Soit ABC un triangle. ABC possède six éléments caractéristiques :

1. Les trois longueurs de ses côtés : $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.
2. Les trois mesures de ses angles : $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

Le côté $[AB]$ est dit adjacent aux angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ et opposé à l'angle $\widehat{C}$ (ou au sommet C).

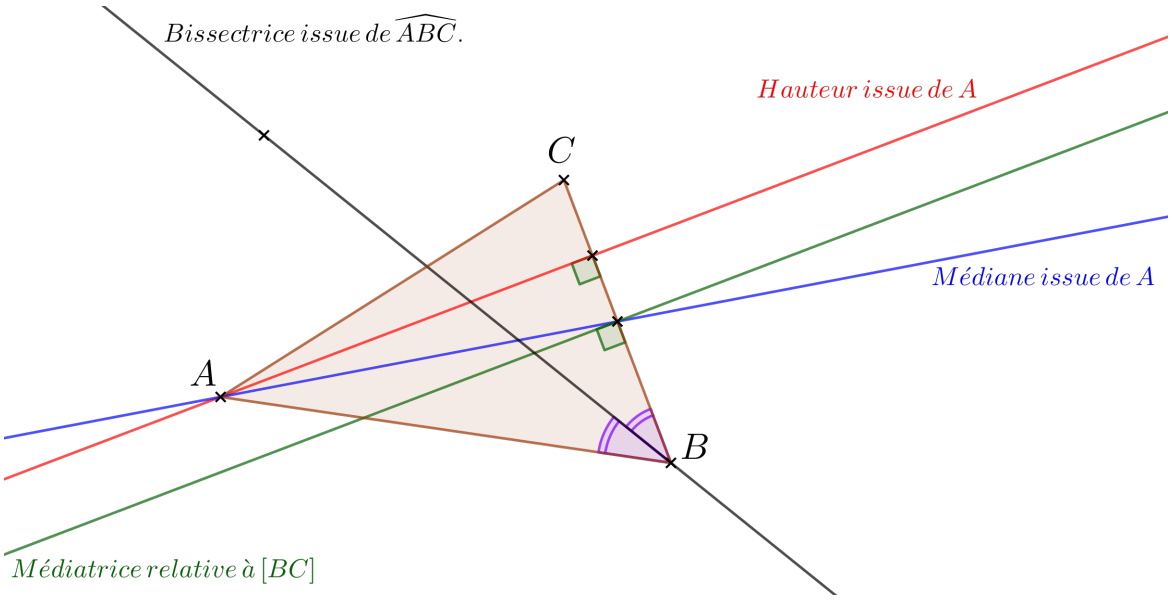
Illustration :



Définition 69. Soit ABC un triangle. On appelle :

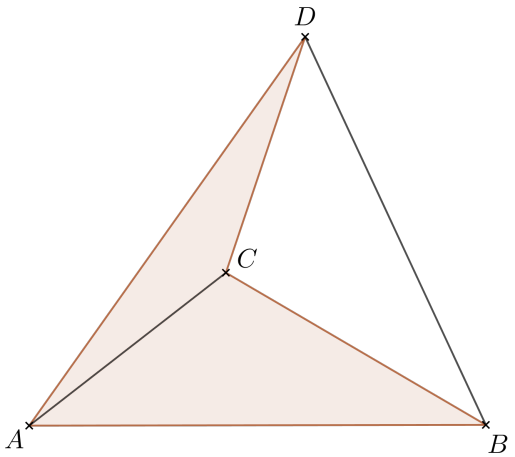
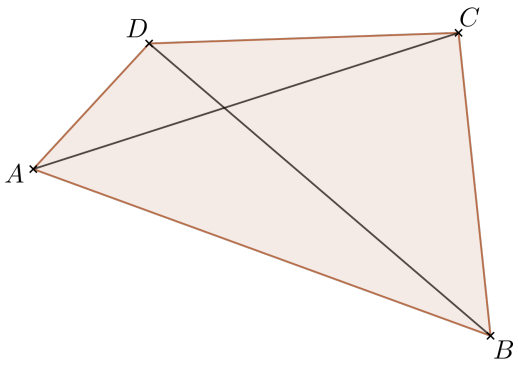
1. Hauteur issue de A, la droite perpendiculaire à (BC) et passant par A.
2. Médiane issue de A, la droite passant par A et le milieu de $[BC]$.
3. Médiatrice du côté $[BC]$, la médiatrice du segment $[BC]$.
4. Bissectrice intérieure issue de A, la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
5. Bissectrice extérieure issue de A, la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Illustration :



Définition 70. Une figure est dite convexe si elle ne possède pas d'angle rentrant.

Illustration :

$ABCD$ n'est pas convexe, il est concave	$ABCD$ est convexe
	

Remarque. Une définition équivalente de la convexité d'une figure est la suivante : une figure est convexe si, quelle que soit la paire de points pris à l'intérieur de la figure, le segment d'extrémité ces deux points ne contient aucun point situé à l'extérieur de la figure.

Chapitre 11

L'inégalité triangulaire

Hermann Minkowski

(Aleksotas 1 864 - Göttingen 1 909)

11.1 L'inégalité triangulaire

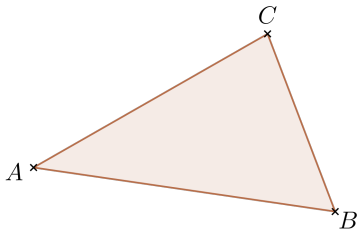
Remarque. Soit ABC un triangle. Le segment de droite $[BC]$ est la ligne la plus courte (dans le plan) joignant les deux points B et C. Donc, pour aller de B à C, il est plus court de suivre le segment de droite $[BC]$ que de faire le détour par le point A. D'où l'inégalité :

$$BC \leqslant BA + AC$$

Plus généralement, pour tout triangle ABC, on a :

$$\begin{cases} AB \leqslant AC + CB \\ BC \leqslant BA + AC \\ CA \leqslant CB + BA \end{cases}$$

Illustration :



Proposition 71. *Dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.*

Démonstration. C'est une propriété de la distance dans le plan. □

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. L'inégalité triangulaire nous donne donc une condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle dont les longueurs des côtés sont connues soit constructible.
2. La réciproque de l'affirmation précédente est vraie elle aussi.

Proposition 72. *Étant données trois longueurs, si la plus grande des trois est inférieure ou égale à la somme des deux autres, alors il existe un triangle dont les côtés ont ces trois longueurs.*

Démonstration. C'est une propriété de la distance dans le plan. □

Remarque. On a donc l'équivalence suivante, appelée « inégalité triangulaire » : ABC est un triangle constructible si, et seulement si, son plus grand côté a une longueur inférieure à la somme des longueurs de ses deux autres côtés.

Exemple. Voici deux exemples :

1. Soit ABC un triangle tel que $AB = 7\,\text{cm}$, $AC = 4\,\text{cm}$ et $BC = 13\,\text{cm}$. ABC n'est pas constructible car $BC > BA + AC$.
2. Soit DEF un triangle tel que $DE = 8\,\text{cm}$, $DF = 14\,\text{cm}$ et $EF = 20\,\text{cm}$. DEF est constructible car $EF \leqslant ED + DF$.

11.2 L'inégalité triangulaire bis

Proposition 73. *(Inégalité triangulaire bis) Dans un triangle, la longueur d'un côté est supérieure à la différence des longueurs des deux autres.*

Démonstration. Soit ABC un triangle. Posons $a \coloneqq BC$, $b \coloneqq AC$ et $c \coloneqq AB$. Supposons, pour fixer les idées, que l'on a : $a \geqslant b \geqslant c$. D'après la proposition 71, on a : $a + c \geqslant b$. D'où, en retranchant c aux deux membres de l'inégalité : $a \geqslant b - c$. De même, en retranchant c ou b aux deux membres de l'inégalité $b + c \geqslant a$, on obtient : $b \geqslant a - c$ et $c \geqslant a - b$. □

Théorème 74. *Dans un triangle, la longueur d'un côté est comprise entre la somme et la différence des longueurs des deux autres côtés. Plus formellement : si ABC un est triangle, alors :*

$$\begin{cases} CA - AB \leqslant CB \leqslant CA + AB \\ CB - BA \leqslant CA \leqslant CB + BA \\ BC - CA \leqslant BA \leqslant BC + CA \end{cases}$$

Démonstration. Ce théorème ne fait que synthétiser les propositions 71 et 73. □

11.3 Application

Exercice. Soit ABC un triangle. Soit M un point situé « à l'intérieur » du triangle ABC.

1. Démontrer que $MA + MB$ est compris entre AB et $CA + CB$.
   Indication : considérer le point P, intersection de (AM) et $[BC]$ puis comparer $MA + MB$, $PA + PB$ et $CA + CB$.
2. En déduire que $MA + MB + MC$ est compris entre le demi-périmètre et le périmètre de ABC.

Chapitre 12

Cas d'égalité de triangles

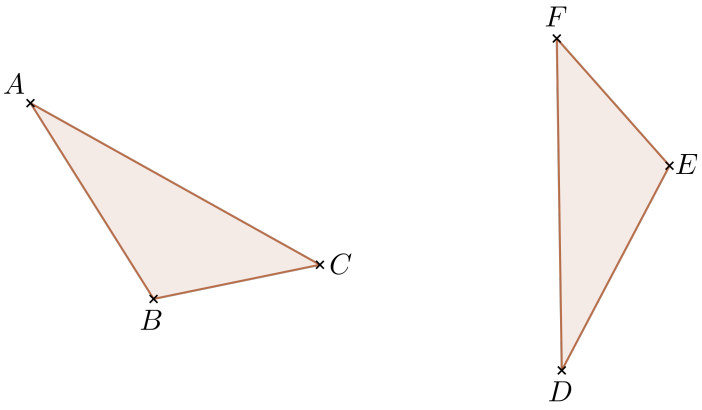
Euclide

(Grèce - 300 avt J.-C.)

12.1 Cas d'égalité de triangles

Définition 75. Deux figures du plan sont dite égales (ou isométriques) si elles sont superposables (soit par glissement, soit par retournement et glissement).

Illustration : Sur la figure ci-dessous, les triangles ABC et DEF sont égaux car superposables.



Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Dire que deux segments sont égaux revient à dire que ces deux segments ont la même longueur.
2. Parler de « droites égales » ne présente aucun intérêt car deux droites sont toujours superposables et donc toujours égales.

3. La notion de « figures égales » est surtout intéressante pour les triangles. Lorsque deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux, alors leurs éléments sont égaux deux à deux : $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $BC = B'C'$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $AC = A'C'$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$, $AB = A'B'$. En fait, il n'est pas nécessaire de vérifier chacune de ces six relations pour vérifier que deux triangles sont égaux.

Théorème 76. *(Cas d'égalité de triangles)*

1. *Premier cas d'égalité : si deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles respectivement égaux, alors ils sont égaux.*
2. *Deuxième cas d'égalité : si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux, alors ils sont égaux.*
3. *Troisième cas d'égalité : si deux triangles ont leurs trois côtés respectivement égaux, alors ils sont égaux.*

Démonstration. Admise. □

Exemple. Construisons les trois triangles suivants :

1. ABC tel que $BC = 6\,\text{cm}$, $\widehat{B} = 50°$ et $\widehat{C} = 60°$.
2. DEF tel que $DE = 5\,\text{cm}$, $DF = 4\,\text{cm}$ et $\widehat{D} = 60°$.
3. GHI tel que $HI = 6\,\text{cm}$, $GH = 4\,\text{cm}$ et $GI = 5\,\text{cm}$.

12.2 Application

Définition 77. Lorsque deux triangles sont égaux, deux sommets, deux angles ou deux côtés qui se correspondent sont dit homologues. Si les triangles ABC et DEF sont égaux, alors on pourra écrire $\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{bmatrix}$ où D est homologue à A, E est homologue à B, etc.

Exercice. Soit $\widehat{xOy}$ un angle aigu de mesure non nulle. Soient A et B deux point du côté $[Ox)$ et C et D deux points du côté $[Oy)$ tels que $OA = OC$ et $OB = OD$. Soit M le point d'intersection des segments $[AD]$ et $[BC]$.

1. Comparer les triangles OAD et OCB.
2. Comparer les triangles MAB et MCD, puis les segments $[MB]$ et $[MD]$.
3. Comparer les triangles OMB et OMD. Que peut-on dire de la droite (OM) ?

Chapitre 13

Symétries axiale et centrale

Sophus Lie

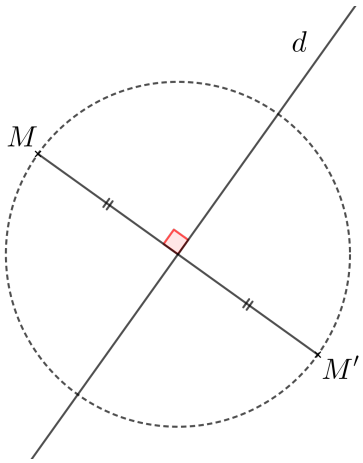
(Nodfjordeid 1 842 - Oslo 1 899)

13.1 Symétrie axiale

Définition 78. Soient M un point et d une droite du plan. On appelle symétrie axiale d'axe d l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que :

1. Si $M \in d$, alors $M' = M$.
2. Si $M \notin d$, alors d est la médiatrice de $[MM']$.

Notation : Cette transformation du plan se note en général : $s_d : M \longmapsto M'$.
Illustration :



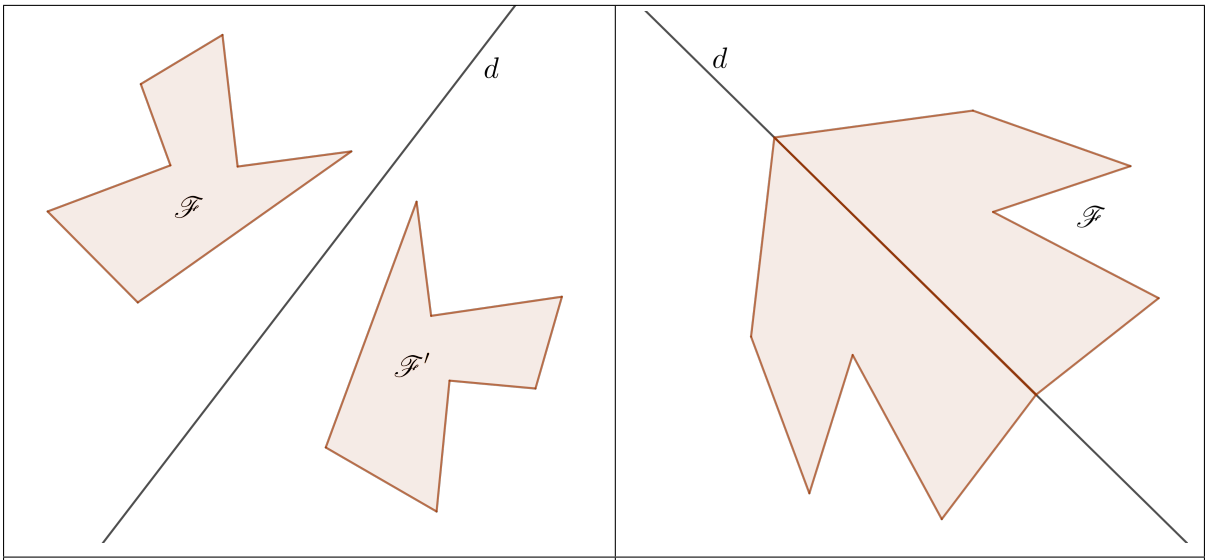
Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Pour tout point M du plan, on a : $s_d(s_d(M)) = M$. Autrement dit, la composée de la symétrie axiale d'axe d avec elle-même est l'application identité. On dit que la symétrie axiale d'axe d est involutive.
2. Ainsi M' est le symétrique de M par rapport à d et M est le symétrique de M' par rapport à d. On dit donc que M et M' sont symétriques par rapport à d.

Définition 79. Voici deux définitions :

1. Deux figures sont dites symétriques par rapport à une droite si leurs points sont deux à deux symétriques par rapport à cette droite.
2. On dit qu'une droite est un axe de symétrie d'une figure si le symétrique de cette figure par rapport à cette droite est elle-même.

Illustration :



$\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont symétriques par rapport à d | d est un axe de symétrie de la figure $\mathscr{F}$

Remarque. Une figure donnée admet un axe de symétrie Δ si, lorsque l'on plie cette figure suivant la droite Δ, les deux parties de la figure se recouvrent.

Proposition 80. *Voici quelques propriétés essentielles de la symétrie axiale :*

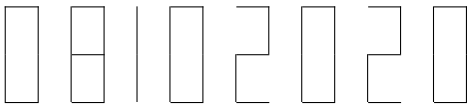
1. *Si trois points sont alignés, alors leurs symétriques respectifs par rapport à une droite sont alignés.*
2. *Le symétrique d'un segment par rapport à une droite est un segment de même longueur.*
3. *Le symétrique d'un angle par rapport à une droite est un angle de même mesure.*
4. *Si deux figures sont symétriques par rapport à une droite alors elles sont égales (i.e. sont superposables, c'est-à-dire qu'elles ont les mêmes longueurs et les mêmes angles).*
5. *Si une droite est parallèle à l'axe de symétrie, alors sa symétrique est une droite parallèle à l'axe et les deux droites sont équidistantes de l'axe.*
6. *Si une droite n'est pas parallèle à l'axe de symétrie, sa symétrique est une droite qui coupe l'axe au même point que la droite donnée et les deux droites symétriques forment un même angle avec l'axe.*

Démonstration. 1. Admise.
2. L'image d'un segment est un segment d'après 1. Le reste est admis.
3. Admise.
4. Découle de 2. et 3.

5. Découle de 1. et 3.
6. Découle de 1. et 3. □

Exercice. Voici un exercice :

1. On écrit les dates de la manière suivante :



pour le 8 octobre 2020.

   (a) Quelles sont les dates du $XXI^{ème}$ siècle ainsi écrites qui possèdent un axe de symétrie.

   (b) Déterminer toutes les dates possédant un axe de symétrie.

2. On appelle ambigramme tout mot et plus généralement toute phrase dont l'image par une symétrie centrale ou une symétrie axiale est encore un mot ou une phrase. En voici quelques exemples :

« bonjour » et « pauline » sont symétriques	« mon » et « nom » sont symétriques
« pauvre » et « banque » sont symétriques	« club » et « ciné » sont symétriques

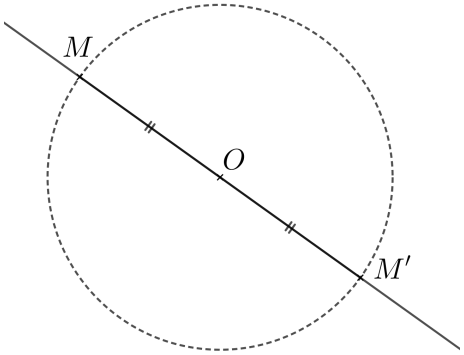
   Essayer d'imaginer et de dessiner un tel ambigramme. On pourra notamment essayer d'en créer un à partir de son prénom et/ou de son nom.

13.2 La symétrie centrale

Définition 81. Soient O et M deux points du plan. On appelle symétrie centrale de centre O l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que :

1. Si $M = O$, alors $M' = M$.
2. Si $M \neq O$, alors O est le milieu de $[MM']$.

Notation : Cette transformation du plan se note en général : $s_O : M \longmapsto M'$.
Illustration :



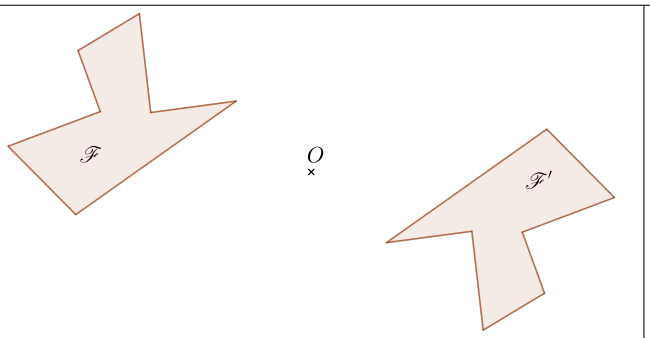
Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Pour tout point M du plan, on a : $s_O\left(s_O(M)\right) = M$. Autrement dit, la composée de la symétrie centrale de centre O avec elle-même est l'application identité. On dit que la symétrie centrale de centre O est involutive.
2. Ainsi M' est le symétrique de M par rapport à O et M est le symétrique de M' par rapport à O. On dit donc que M et M' sont symétriques par rapport à O.

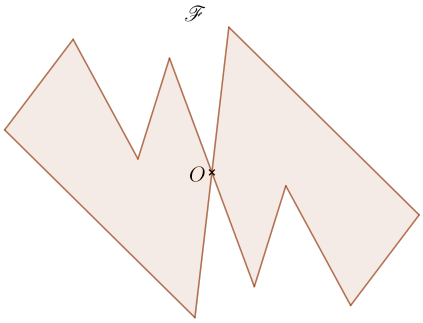
Définition 82. Voici deux définitions :

1. Deux figures sont dites symétriques par rapport à un point O si leurs points sont deux à deux symétriques par rapport à ce point O.
2. On dit qu'un point est un centre de symétrie d'une figure si le symétrique de cette figure par rapport à ce point est elle-même.

Illustration :



$\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont symétriques par rapport à O



O est un centre de symétrie de la figure $\mathscr{F}$

Remarque. Une figure donnée admet un centre de symétrie O si, lorsque l'on pivote cette figure autour du point O d'un demi-tour, les deux parties de la figure se recouvrent.

Proposition 83. *Voici quelques propriétés essentielles de la symétrie centrale :*

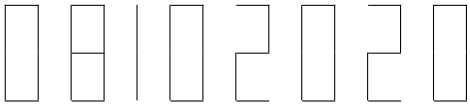
1. *Si trois points sont alignés, alors leurs symétriques respectifs par rapport à un point sont alignés.*
2. *Le symétrique d'un segment par rapport à un point est un segment de même longueur.*
3. *Le symétrique d'un angle par rapport à un point est un angle de même mesure.*
4. *Si deux figures sont symétriques par rapport à un point alors elles sont égales (i.e. sont superposables, c'est-à-dire qu'elles ont les mêmes longueurs et les mêmes angles).*
5. *Le symétrique d'une droite par rapport à un point est une droite qui lui est parallèle.*

Démonstration. 1. Admise.
2. L'image d'un segment est un segment d'après 1. Le reste est admis.
3. Admise.
4. Découle de 2. et 3.
5. Soient A et B deux points du plan. Soit O le centre de symétrie. Soient A' et B' les symétriques respectifs de A et B par rapport à O. Par définition, le quadrilatère $ABA'B'$ a ses diagonales sécantes en leur milieu. Par propriété, $ABA'B'$ est donc un parallélogramme de centre O. Par définition, les droites (AB) et $(A'B')$ sont donc parallèles. □

Remarque. Il existe une différence majeure entre la symétrie axiale et la symétrie centrale. Alors que la seconde conserve l'orientation du plan, la première la renverse. Il suffit pour s'en rendre compte de construire le symétrique d'une horloge par rapport à une droite et par rapport à un point.

Exercice. Voici trois exercices :

1. On écrit les dates de la manière suivante :



pour le 8 octobre 2020.

   (a) Quelles sont les dates du $XXI^{ème}$ siècle ainsi écrites qui possèdent un centre de symétrie.

   (b) Déterminer toutes les dates possédant un centre de symétrie.

2. On appelle ambigramme tout mot et plus généralement toute phrase dont l'image par une symétrie centrale ou une symétrie axiale est encore un mot ou une phrase. En voici quelques exemples :

« Mathematics » possède un centre de symétrie	« Symmetry » possède un centre de symétrie
Cette égalité possède elle aussi un centre de symétrie	« ambigram » possède un centre de symétrie

Essayer d'imaginer et de dessiner un tel ambigramme. On pourra notamment essayer d'en créer un à partir de son prénom et/ou de son nom.

Chapitre 14

Angles (1)

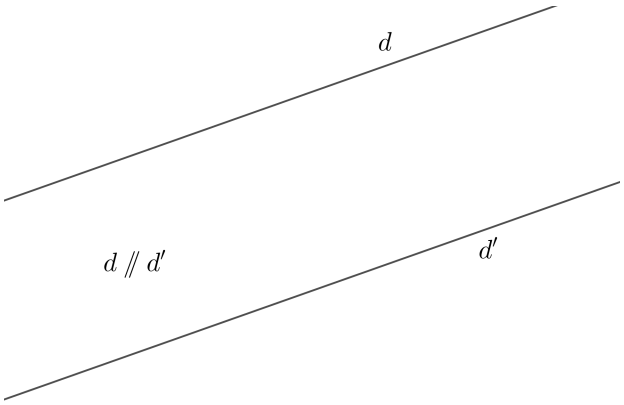
Hipparque

(Nicée 190 avt J.-C. - Rhodes 120 avt J.-C.)

14.1 Droites parallèles

Définition 84. Deux droites du plan sont dites strictement parallèles si elles n'ont aucun point commun. Deux droites du plan sont dites parallèles si elles sont strictement parallèles ou confondues.

Illustration :



Théorème 85. *Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles. Plus formellement :*

$$\begin{cases} d \perp d'' \\ d' \perp d'' \end{cases} \Rightarrow d//d'$$

Démonstration. Soient d et d' deux droites perpendiculaires à d''.
Si d et d' sont confondues, alors elles sont parallèles par définition.
Sinon, d et d' sont soit strictement parallèles, soit sécantes.
Si elles étaient sécantes en un point, il y aurait deux droites perpendiculaires à d'' passant par ce point, ce qui est impossible d'après la proposition 65. Donc d et d' ne peuvent pas avoir de point commun. Autrement dit, d et d' sont strictement parallèles. □

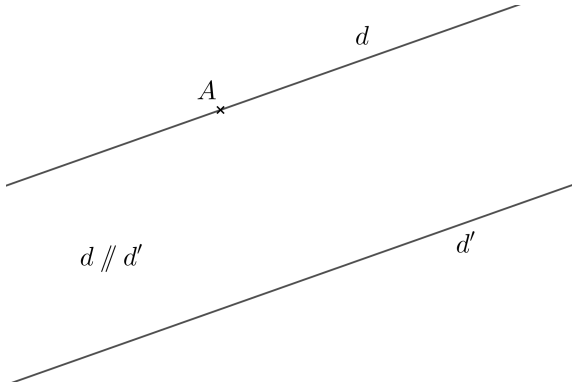
Théorème 86. *Par un point extérieur à une droite, on peut mener (au moins) une parallèle à cette droite.*

Démonstration. Soient d une droite et A un point du plan. Soit d' une droite perpendiculaire à d. Soit d'' la droite perpendiculaire à d' passant par A (elle existe d'après la proposition 65). Les droites d et d'' sont toutes les deux perpendiculaires à la droite d'. Donc, d'après le théorème 85, les droites d et d'' sont parallèles. □

Remarque. L'expérience montre que par un point extérieur à une droite, on ne peut mener qu'une seule droite parallèle à cette droite. Cependant, l'unicité de cette parallèle ne peut être démontrée (elle est même mise en défaut sur une sphère ou encore sur une selle de cheval). Le géomètre grec Euclide a perçu le premier l'impossibilité de cette démonstration et a demandé que l'on admette cette proposition une fois pour toutes. On qualifie cette propriété de postulat, de principe ou encore d'axiome.

Affirmation 87. (Postulat d'Euclide) Dans le plan, par un point extérieur à une droite, on ne peut mener qu'une seule droite parallèle à cette droite.

Illustration :



Remarque. Ce postulat a des conséquences :

Théorème 88. *Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles. Plus formellement :*

$$\begin{cases} d//d'' \\ d'//d'' \end{cases} \Rightarrow d//d'$$

Démonstration. Soient d et d' deux droites parallèles à d''.
Si d et d' sont confondues, alors elles sont parallèles par définition.
Sinon, d et d' sont soit strictement parallèles, soit sécantes.
Si d et d' étaient sécantes en un point O, alors on pourrait mener deux parallèles à d'' passant par O, ce qui est en contradiction avec le postulat d'Euclide. Ainsi, les droites d et d' n'ont pas de point commun : elles sont donc strictement parallèles. □

Théorème 89. *Si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Plus formellement :*

$$\begin{cases} d//d' \\ d'' \perp d \end{cases} \Rightarrow d'' \perp d'$$

Démonstration. Soient d et d' deux droites parallèles. Soit d'' une droite perpendiculaire à d.
Si d et d' sont confondues, alors c'est évident.
Sinon, d'' coupe d' en un point O. La droite perpendiculaire à d'' passant par O est parallèle à d d'après le théorème 85. Alors, d'après le postulat d'Euclide, cette droite est nécessairement d'. Par conséquent, $d'' \perp d'$. □

Remarque. On dit parfois que d'' est une perpendiculaire commune à d et d'.

Définition 90. Voici quelques définitions visant à préparer la section suivante :

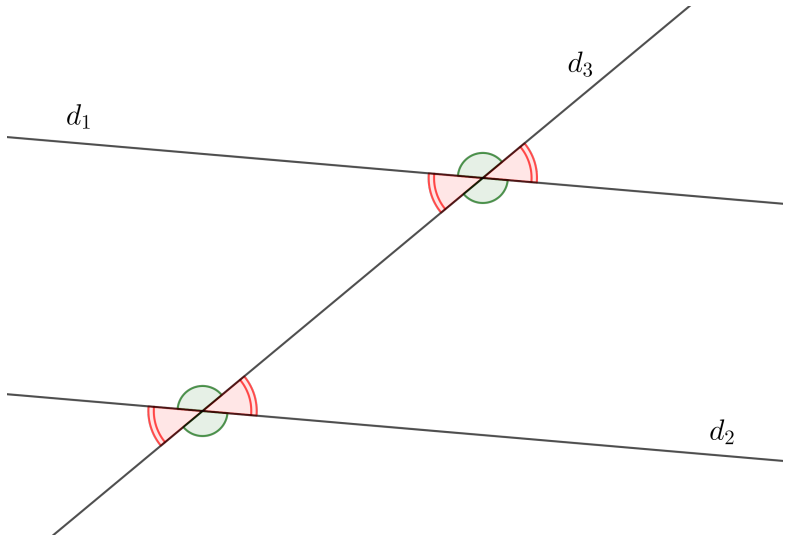
1. On appelle sécante toute droite qui coupe une figure géométrique.
2. Si deux droites sont parallèles, alors on dit qu'elles ont même direction.
3. Deux segments ou deux demi-droites sont dits parallèles si les droites qui les contiennent sont parallèles.
4. Deux demi-droites (ou deux segments) parallèles $[AM)$ et $[BN)$ sont dites de même sens si elles sont situées d'un même côté de la droite (AB). Elles sont dites de sens contraire si elles sont situées de part et d'autre de la droite (AB).

14.2 Propriétés angulaires des parallèles

Définition 91. Soient d_1, d_2 et d_3 trois droites telles que d_3 coupe d_1 et d_2. Huit angles que l'on peut regrouper en trois familles sont alors formés :

1. Angles alternes-internes : deux angles situés de part et d'autre de la sécante d_3, entre les droites d_1 et d_2 et non adjacents.
2. Angles correspondants : deux angles situés d'un même côté de d_3, non adjacents, l'un entre les droites d_1 et d_2, l'autre à l'extérieur.
3. Angles intérieurs d'un même côté : deux angles situés d'un même côté de d_3, entre les droites d_1 et d_2.

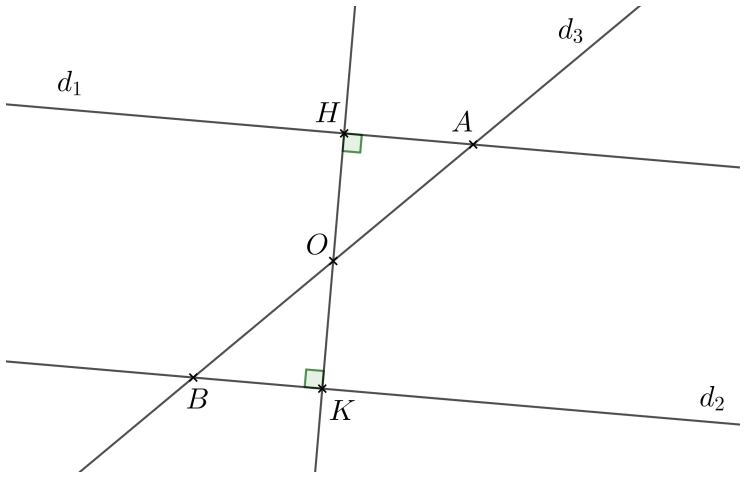
Illustration :



Théorème 92. *Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante alors :*

1. *Deux angles alternes-internes sont égaux.*
2. *Deux angles correspondants sont égaux.*
3. *Deux angles intérieurs d'un même côté sont supplémentaires.*

Démonstration. On considère la figure suivante :



1. Soient d_1, d_2 et d_3 trois droites telles que $d_1 /\!/ d_2$ et telles que d_3 coupe d_1 et d_2 respectivement en A et B. Soit O le milieu de $[AB]$. Soit d_4 la droite perpendiculaire à d_1 passant par O. d_4 coupe d_1 et d_2 respectivement en H et K. Les triangles rectangles OAH et OBK ont l'hypoténuse égale ($OA = OB$), et un angle égal ($\widehat{HOA} = \widehat{BOK}$) donc, d'après le premier cas d'égalité de triangles, OAH et OBK sont égaux. Par conséquent, $\widehat{OAH} = \widehat{OBK}$.

2. On raisonne sur les angles opposés par le sommet en utilisant 1.

3. On raisonne sur les angles supplémentaires en utilisant 1. □

Théorème 93. *(Réciproque du théorème précédent) Pour que deux droites soient parallèles, il suffit qu'elles forment avec une sécante :*

1. *Soit deux angles alternes-internes égaux.*
2. *Soit deux angles correspondants égaux.*
3. *Soit deux angles intérieurs d'un même côté supplémentaires.*

Démonstration. Les points 1., 2. et 3. sont équivalents. Donc il suffit de démontrer le théorème lorsque 1. est vrai. Supposons donc que la sécante d_3 forme avec les droites d_1 et d_2 deux angles alternes-internes égaux. Soient A et B les points d'intersection respectifs de d_3 avec d_1 et d_2. Soit O le milieu de $[AB]$. Soit d_4 la droite perpendiculaire à d_1. d_4 coupe d_1 et d_2 respectivement en H et K. Les triangles OAH et OBK ont : $\begin{cases} OA = OB \\ \widehat{AOH} = \widehat{BOK} \\ \widehat{OAH} = \widehat{OBK} \end{cases}$. Ils sont donc égaux d'après un cas d'égalité de triangles. En particulier, $\widehat{OHA} = \widehat{OKB} = 90°$. Les droites d_1 et d_2 sont donc toutes les deux perpendiculaires à la droite d_4. Ainsi, d'après le théorème 85, elles sont parallèles. □

14.3 Angles

Théorème 94. *Si deux angles ont leurs côtés respectivement parallèles, alors ils sont égaux ou supplémentaires.*

Remarque. Plus précisément :

1. Si deux angles ont leurs côtés parallèles et de même sens, alors ils sont égaux.
2. Si deux angles ont leurs côtés parallèles et de sens contraire, alors ils sont égaux.
3. Si deux angles ont deux côtés parallèles et de même sens, et les deux autres côtés parallèles et de sens contraire, alors ils sont supplémentaires.

Démonstration. Soit $\widehat{xAy}$ un angle. Soit B un point du plan. Par B, menons les parallèles $(u'u)$ et $(v'v)$ aux côtés de l'angle $\widehat{xAy}$. Les demi-droites $[Ax)$ et $[Bv)$ se coupent en C.

1. $\begin{cases} \widehat{xAy} = \widehat{xCv} & \text{comme correspondants} \\ \widehat{xCv} = \widehat{uBv} & \text{comme correspondants} \end{cases}$ donc $\widehat{xAy} = \widehat{uBv}$.
2. $\begin{cases} \widehat{xAy} = \widehat{uBv} & \text{d'après 1.} \\ \widehat{uBv} = \widehat{u'Bv'} & \text{opposés par le sommet} \end{cases}$ donc $\widehat{xAy} = \widehat{u'Bv'}$.
3. $\begin{cases} \widehat{xAy} = \widehat{uBv} \\ \widehat{uBv} + \widehat{u'Bv} = 180° \end{cases}$ donc $\widehat{xAy} + \widehat{u'Bv} = 180°$. □

Théorème 95. *Si deux angles ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, alors ils sont égaux ou supplémentaires.*

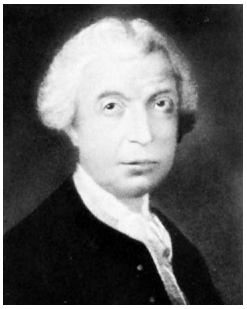
Remarque. Plus précisément :

1. Si les deux angles sont tous les deux aigus ou tous les deux obtus, alors ils sont égaux.
2. Sinon, ils sont supplémentaires.

Démonstration. Soient $\widehat{xAy}$ et $\widehat{uBv}$ deux angles dont les côtés sont respectivement perpendiculaires. Soient $\widehat{xAx'}$ l'angle droit non adjacent à $\widehat{xAy}$ et $\widehat{yAy'}$ l'angle droit adjacent à $\widehat{xAy}$. On a : $\widehat{xAy} = 90° - \widehat{yAx'} = \widehat{x'Ay'}$. De plus, $[Ax') \perp [Ax)$ et $[Bu) \perp [Ax)$ donc $[Ax')//[Bu)$. Aussi, $[Ay') \perp [Ay)$ et $[Bv) \perp [Ay)$ donc $[Ay')//[Bv)$. D'après le théorème 94, les angles $\widehat{x'Ay'}$ et $\widehat{uBv}$ sont égaux ou supplémentaires et, par suite, il en est de même des angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{uBv}$. La deuxième partie du théorème résulte du fait que, s'ils sont égaux ou supplémentaires, deux angles aigus (ou obtus) ne peuvent être qu'égaux tandis qu'un angle aigu et un angle obtus ne peuvent être que supplémentaires. □

Chapitre 15

Triangles particuliers



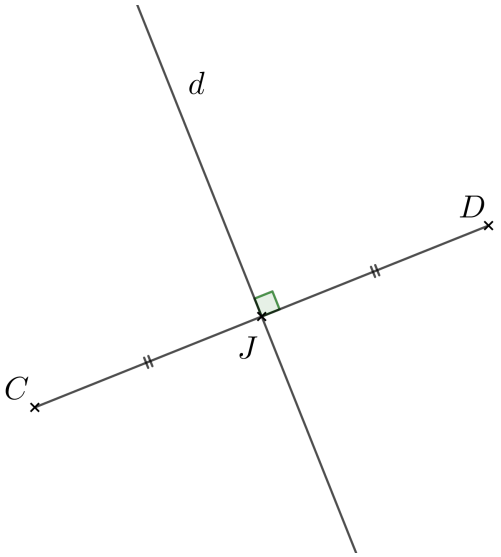
Giovanni Ceva

(Milan 1 647 - Mantoue 1 734)

15.1 Médiatrice d'un segment

Définition 96. On appelle médiatrice d'un segment la droite perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

Illustration : Sur la figure ci-dessous, la droite d est la médiatrice du segment $[CD]$.



Théorème 97. *Si un point est équidistant (i.e. situé à égale distance) des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment.*

Démonstration. Soit $[AB]$ un segment. Soit M un point équidistant de A et B. Démontrons que M appartient à la médiatrice de $[AB]$. La bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$ coupe $[AB]$ en I. On a alors : $\begin{cases} \widehat{AMI} = \widehat{BMI} \\ MI = MI \\ MA = MB \end{cases}$. D'après le deuxième cas d'égalité de triangles, on a : $\begin{bmatrix} A & M & I \\ B & M & I \end{bmatrix}$. D'où : $AI = BI$ et par conséquent I est le milieu de $[AB]$. Aussi, $\widehat{MIA} = \widehat{MIB}$, or ces angles sont supplémentaires, donc chacun est droit. Ainsi, $(MI) \perp (AB)$. En conclusion, la droite (MI) est la médiatrice de $[AB]$. □

Remarque. La réciproque de ce théorème est vraie aussi.

Théorème 98. *Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.*

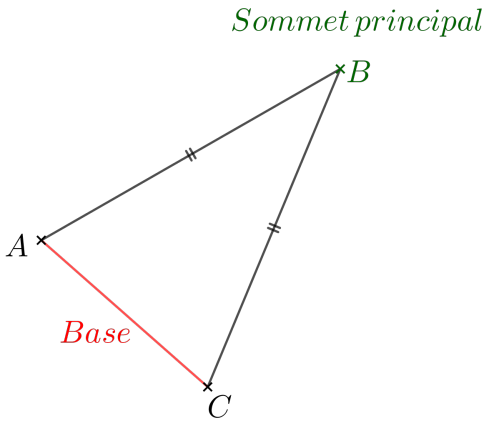
Démonstration. Soit $[AB]$ un segment. Soit M un point de la médiatrice de $[AB]$. Démontrons que M est équidistant de A et B. Soit I le milieu de $[AB]$. On a alors : $\begin{cases} \widehat{AIM} = \widehat{BIM} = 90° \\ IM = IM \\ IA = IB \end{cases}$. Donc, d'après le deuxième cas d'égalité de triangles, on a : $\begin{bmatrix} A & M & I \\ B & M & I \end{bmatrix}$. Ainsi, $AM = BM$. □

Remarque. On peut résumer les théorèmes précédents en un seule phrase : « Un point appartient à la médiatrice d'un segment si, et seulement si, il est équidistant des extrémités de ce segment. » ou encore « Pour qu'un point appartienne à la médiatrice d'un segment, il faut et il suffit qu'il soit équidistant des extrémités du segment. ». On dit que l'équidistance d'un point aux extrémités d'un segment caractérise l'appartenance à la médiatrice de ce segment.

15.2 Triangle isocèle

Définition 99. On appelle triangle isocèle tout triangle ayant deux côtés égaux. Le côté non égal aux deux autres est appelé la base du triangle et le sommet commun aux deux cotés égaux est appelé le sommet principal.

Illustration : Sur la figure ci-dessous, le triangle ABC est isocèle en B.



Théorème 100. *Si un triangle est isocèle, alors ses angles adjacents à la base sont égaux.*

Démonstration. Soit ABC un triangle isocèle en A. Démontrons que $\widehat{B} = \widehat{C}$. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le segment $[BC]$ en I. On a alors : $\begin{cases} \widehat{BAI} = \widehat{CAI} \\ AI = AI \\ AB = AC \end{cases}$. Donc, d'après le deuxième cas d'égalité de triangles, on a : $\begin{bmatrix} A & B & I \\ A & C & I \end{bmatrix}$. D'où : $\widehat{B} = \widehat{C}$. On a de plus : $IB = IC$, donc I est le milieu de $[BC]$ et par conséquent, (AI) est la médiane issue de A. Aussi, $\widehat{BIA} = \widehat{CIA}$, or ces angles sont supplémentaires, donc chacun d'eux est droit. Ainsi, (AI) est la hauteur issue de A et la médiatrice de $[BC]$. On a donc démontré plus que le résultat annoncé. □

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. Dans un triangle isocèle, la bissectrice de l'angle au sommet est aussi médiane, hauteur et médiatrice.
2. La réciproque du théorème 100 est vraie aussi.

Théorème 101. *Si un triangle a deux angles égaux, alors il est isocèle.*

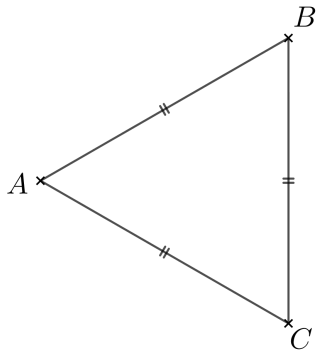
Démonstration. Laissée en exercice. On pourra utiliser un cas d'égalité de triangles. □

Remarque. On peut résumer les deux théorèmes précédents en une seule phrase : « Un triangle est isocèle si, et seulement si, il possède deux angles égaux. » ou encore « Pour qu'un triangle soit isocèle, il faut et il suffit qu'il possède deux angles égaux. ». On dit que « posséder deux angles égaux » est une propriété *caractéristique* des triangles isocèles.

15.3 Triangle équilatéral

Définition 102. On appelle triangle équilatéral tout triangle ayant ses trois côtés égaux.

Illustration : Sur la figure ci-dessous, le triangle ABC est équilatéral.



Théorème 103. *Si un triangle est équilatéral, alors ses trois angles sont égaux.*

Démonstration. Un triangle équilatéral est isocèle en chacun de ses sommets. Il suffit alors d'appliquer le théorème 100. □

Remarque. La réciproque du théorème 103 est vraie aussi.

Théorème 104. *Si un triangle a ses trois angles égaux, alors il est équilatéral.*

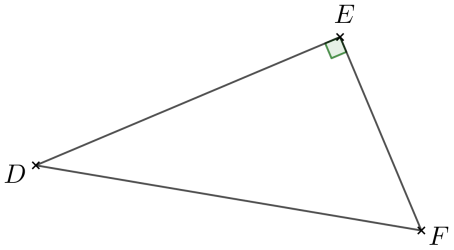
Démonstration. Il suffit alors d'appliquer le théorème 101. □

Remarque. Là encore, l'égalité des trois angles est une propriété caractéristique des triangles équilatéraux.

15.4 Triangle rectangle

Définition 105. On appelle triangle rectangle tout triangle ayant un angle droit. Le côté opposé à l'angle droit est appelé l'hypoténuse.

Illustration : Sur la figure ci-dessous, le triangle DEF est rectangle en E.



Proposition 106. *On peut toujours considérer un triangle rectangle comme la « moitié » d'un triangle isocèle.*

Démonstration. Soit ABC un triangle en A. Prolongeons le côté $[BA]$ du triangle ABC d'une longueur BA. Par construction, (CA) est la médiatrice de $[BD]$. Donc, d'après le théorème 98, $CB = CD$. Ainsi, BCD est isocèle. De plus : $\begin{cases} AC = AC \\ AB = AD \\ \widehat{CAB} = \widehat{CAD} \end{cases}$. Donc, d'après le deuxième cas d'égalité de triangles, les deux triangles rectangles ABC et ADC sont égaux. □

Exemple. Construisons les triangles ABC et DEF tels que :

1. ABC est rectangle en A, $BC = 6\,\text{cm}$ et $\widehat{ABC} = 34°$.
2. DEF est rectangle en D, $EF = 6\,\text{cm}$ et $DF = 4\,\text{cm}$.

Proposition 107. *Si deux triangles rectangles ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal, alors ils sont égaux.*

Démonstration. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles rectangles respectivement en A et A' tels que : $BC = B'C'$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$. Construisons les triangles isocèles BCD et $B'C'D'$ en prolongeant $[BA)$ d'une longueur AD égale à BA et $[B'A')$ d'une longueur $A'D'$ égale à $B'A'$. On a alors : $\begin{cases} BC = B'C' = CD = C'D' \\ \widehat{BCD} = \widehat{B'C'D'} \text{ car } 2\widehat{C} = 2\widehat{C'} \end{cases}$ et donc : $\begin{bmatrix} B & C & D \\ B' & C' & D' \end{bmatrix}$. On en déduit les égalités : $\begin{cases} B'A' = \frac{1}{2}B'D' = \frac{1}{2}BD = BA \\ B'C' = BC \\ \widehat{C'B'A'} = \widehat{CBA} \end{cases}$. Ainsi, d'après le deuxième cas d'égalité de triangles, on a : $\begin{bmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{bmatrix}$. □

Proposition 108. *Si deux triangles rectangles ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal, alors ils sont égaux.*

Démonstration. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles rectangles respectivement en A et A' tels que : $BC = B'C'$ et $AB = A'B'$. Construisons les triangles isocèles BCD et $B'C'D'$ en prolongeant $[BA)$ d'une longueur AD égale à BA et $[B'A')$ d'une longueur $A'D'$ égale à $B'A'$. On a alors : $\begin{cases} BC = B'C' = CD = C'D' \\ BC = B'D' \text{ car } 2AB = 2A'B' \end{cases}$ et donc : $\begin{bmatrix} B & C & D \\ B' & C' & D' \end{bmatrix}$. On en déduit les égalités : $\begin{cases} B'A' = \frac{1}{2}B'D' = \frac{1}{2}BD = BA \\ B'C' = BC \\ \widehat{C'B'A'} = \widehat{CBA} \end{cases}$. Ainsi, d'après le deuxième cas d'égalité de triangles, on a : $\begin{bmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{bmatrix}$. □

15.5 Bissectrice d'un angle

Théorème 109. *Un point situé à « l'intérieur » d'un angle est équidistant des côtés de l'angle si, et seulement si, il appartient à la bissectrice de cet angle.*

Démonstration. Soit $\widehat{xOy}$ un angle. Soit M un point situé à « l'intérieur » de cet angle. Soient A et B les projetés orthogonaux de M respectivement sur $[Ox)$ et $[Oy)$.
$\Rightarrow$: supposons que $MA = MB$. Alors les triangles OMA et OMB ont l'hypoténuse $[OM]$ en commun et un côté de l'angle droit égal : $MA = MB$. Ils sont donc égaux d'après le théorème 108. Par suite, $\widehat{MOA} = \widehat{MOB}$. Ainsi, $[OM)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.
$\Leftarrow$: supposons que M appartient à la bissectrice de $\widehat{xOy}$. Alors les triangles OMA et OMB ont l'hypoténuse $[OM]$ en commun et un angle aigu égal : $\widehat{MOA} = \widehat{MOB}$. Ils sont donc égaux d'après le théorème 107. Par suite, $MA = MB$. □

Chapitre 16

Angles (2)

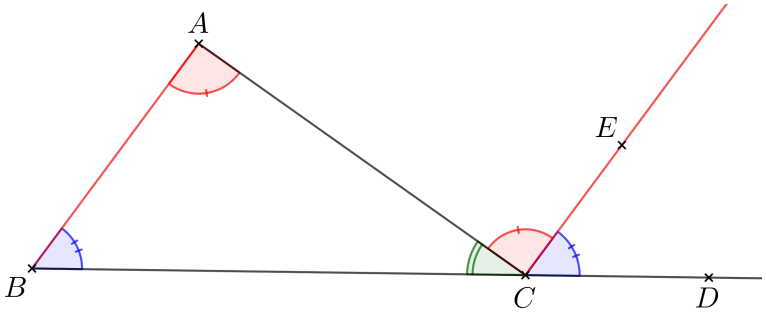
Euclide

(Grèce - 300 avt J.-C.)

16.1 Somme des angles d'un triangle

Théorème 110. *La somme des angles d'un triangles est égale à* 180°.

Démonstration. Soit ABC un triangle. Soit D un point de la demi-droite $[BC)$ n'appartenant pas au segment $[BC]$. Soit E un point appartenant à la demi-droite parallèle à (AB) d'origine C et de même sens que $[BA)$.



On a : $\begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{ACE} \text{ (angles alternes-internes)} \\ \widehat{CBA} = \widehat{DCE} \text{ (angles correspondants)} \end{cases}$. D'où : $\widehat{BAC}+\widehat{CBA}+\widehat{ACB} = \widehat{ACE}+\widehat{DCE}+\widehat{ACB} = 180°$.

□

Remarque. La somme de deux angles d'un triangle est donc inférieure ou égale à 180°.

Corollaire 111. *Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.*

Démonstration. Soit ABC un triangle rectangle en A. On a : $\widehat{BAC} + \widehat{CBA} + \widehat{ACB} = 180°$, soit : $90° + \widehat{CBA} + \widehat{ACB} = 180°$, d'où : $\widehat{CBA} + \widehat{ACB} = 90°$. □

Remarque. Pour qu'un triangle soit rectangle isocèle, il faut et il suffit qu'il ait deux angles égaux à 45°. Démonstration.

Corollaire 112. *Les angles d'un triangle équilatéral valent chacun* 60°.

Démonstration. D'après le théorème 103, les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux. Ainsi, d'après le théorème 110, la valeur commune des trois angles est : $\frac{180°}{3} = 60°$. □

Théorème 113. *Si ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles tels que $\widehat{A} = \widehat{A'}$ et $\widehat{B} = \widehat{B'}$, alors $\widehat{C} = \widehat{C'}$.*

Démonstration. On a : $\widehat{C} = 180° - \widehat{A} - \widehat{B} = 180° - \widehat{A'} - \widehat{B'} = \widehat{C'}$. □

Corollaire 114. *Si deux triangles ont un côté égal et deux angles homologues respectivement égaux, alors ils sont égaux.*

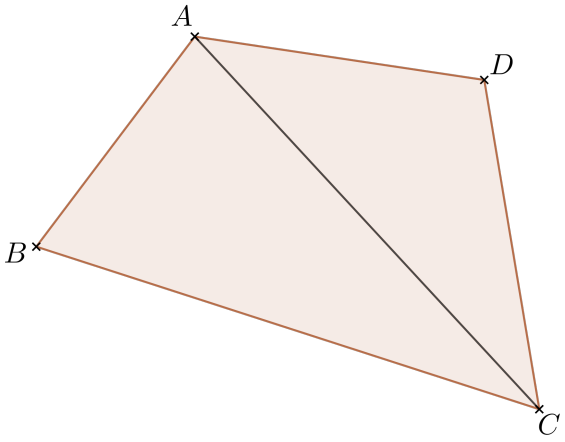
Démonstration. Évidente d'après le théorème 113. □

Remarque. Ce corollaire généralise le premier cas d'égalité de triangles.

16.2 Somme des angles d'un quadrilatère

Théorème 115. *La somme des angles d'un quadrilatère convexe est égale à* 360°.

Démonstration. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Traçons la diagonale $[AC]$.



La somme des angles du quadrilatère $ABCD$ est égale à la somme des angles des deux triangles ABC et CDA. La somme des angles de chaque triangle vaut 180°. D'où : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360°$.

□

Exercice. Déterminer une formule exprimant la somme des angles d'un polygone convexe en fonction de son nombre de côtés.

Chapitre 17

Parallélogramme

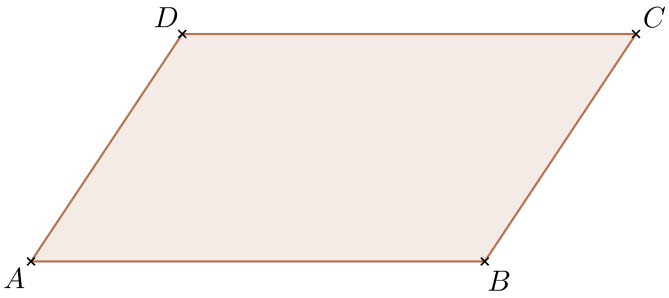
Pierre Varignon

(Caen 1 654 - Paris 1 722)

17.1 Présentation

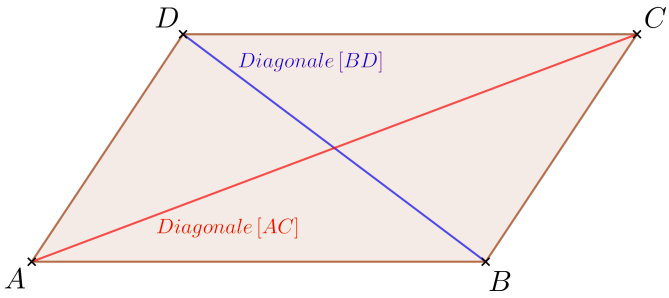
Définition 116. On appelle parallélogramme tout quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

Illustration :



Définition 117. La droite passant par deux sommets opposés d'un parallélogramme est appelée une diagonale.

Illustration :



17.2 Propriétés des angles

Proposition 118. *Voici deux propriétés :*

1. *Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors deux angles adjacents à un même côté sont supplémentaires.*
2. *Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors deux angles opposés sont égaux.*

Démonstration. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit E un point appartenant à la demi-droite $[AB)$ mais n'appartenant pas au segment $[AB]$.
1. $\widehat{DAB} = \widehat{CBE}$ car ils sont correspondants. $\widehat{CBE} + \widehat{BAC} = 180°$ car ils sont supplémentaires.
D'où : $\widehat{DAB} + \widehat{ABC} = 180°$.
2. $\widehat{DAB} = \widehat{CBE}$ car ils sont correspondants. $\widehat{CBE} = \widehat{BCD}$ car ils sont alternes-internes.
D'où : $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$. □

Remarque. La réciproque de 2. est vraie elle aussi :

Proposition 119. *Si un quadrilatère convexe a ses angles opposés égaux deux à deux, alors c'est un parallélogramme.*

Démonstration. Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que $\widehat{A} = \widehat{C}$ et $\widehat{B} = \widehat{D}$. La somme des angles d'un quadrilatère convexe vaut 360°. D'où :

$$\begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} &= 360° \\ 2\widehat{A} + 2\widehat{B} &= 360° \\ \widehat{A} + \widehat{B} &= 180° \end{aligned}$$

Les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ occupant la position d'angles intérieurs d'un même côté de la sécante (AB) pour les droites (AD) et (BC), ces droites sont donc parallèles d'après le théorème 93. De la même façon, on démontre l'égalité $\widehat{A} + \widehat{D} = 180°$. S'ensuit que (AB) et (CD) sont parallèles. Ainsi, par définition, $ABCD$ est un parallélogramme. □

Remarque. Que penser de la réciproque de 1. ?

17.3 Propriétés des côtés

Proposition 120. *Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont égaux.*

Démonstration. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Les triangles ABC et CDA sont tels que :

$$\begin{cases} AC = AC \\ \widehat{BAC} = \widehat{ACD} \text{ (alternes-internes)} \\ \widehat{ACB} = \widehat{DAC} \text{ (alternes-internes)} \end{cases}$$

Donc, d'après le premier cas d'égalité de triangles, les triangles ABC et CDA sont égaux. Par suite : $AB = CD$ et $AD = BC$. □

Remarque. La réciproque est vraie elle aussi :

Proposition 121. *Si un quadrilatère convexe a ses côtés opposés deux à deux égaux, alors c'est un parallélogramme.*

Démonstration. Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que $AB = CD$ et $AD = BC$. Les triangles ABC et CDA sont tels que : $\begin{cases} AC = AC \\ AD = BC \\ AB = DC \end{cases}$. Donc, d'après le troisième cas d'égalité de triangles, les triangles ABC et CDA sont égaux. Par suite, les angles alternes-internes $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACD}$ sont égaux. Ainsi, les droites (AB) et (CD) sont parallèles. De même, $\widehat{ACB} = \widehat{DAC}$ et par suite, les droites (AD) et (BC) sont parallèles. Par définition, $ABCD$ est donc un parallélogramme. □

Proposition 122. *Si un quadrilatère convexe a deux côtés égaux et parallèles, alors c'est un parallélogramme.*

Démonstration. Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que les côtés $[AB]$ et $[CD]$ sont égaux et parallèles. Les triangles ABC et CDA sont tels que : $\begin{cases} AC = AC \\ AB = CD \\ \widehat{BAC} = \widehat{ACD} \text{ (alternes-internes)} \end{cases}$. Donc, d'après le deuxième cas d'égalité de triangles, les triangles ABC et CDA sont égaux. Par suite, les angles alternes-internes $\widehat{ACB}$ et $\widehat{DAC}$ sont égaux. Ainsi, les côtés $[AD]$ et $[BC]$ sont parallèles. Par définition, le quadrilatère $ABCD$ est donc un parallélogramme. □

Remarque. La réciproque est vraie par définition et d'après la proposition 120.

17.4 Propriétés des diagonales

Proposition 123. *Si un quadrilatère un est parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu. Ce point est appelé centre du parallélogramme.*

Démonstration. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit O le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$. Les triangles OAB et OCD sont tels que : $\begin{cases} AB = CD \\ \widehat{OAB} = \widehat{OCD} \text{ (alternes-internes)} \\ \widehat{ABO} = \widehat{ODC} \text{ (alternes-internes)} \end{cases}$. Donc, d'après le premier cas d'égalité de triangles, les triangles OAB et OCD sont égaux. Par suite, $OA = OC$ et $OB = OD$. □

Remarque. La réciproque est vraie elle aussi :

Proposition 124. *Si un quadrilatère a ses deux diagonales sécantes en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.*

Démonstration. Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu O. Les triangles OAB et OCD sont tels que : $\begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \\ \widehat{AOB} = \widehat{COD} \text{ (opposés par le sommet)} \end{cases}$. Donc, d'après le deuxième cas d'égalité de triangles, les triangles OAB et OCD sont égaux. Par suite, $AB = CD$ et les angles alternes-internes $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OCD}$ sont égaux. Ainsi, les droites (AB) et (CD) sont parallèles. D'après la proposition 122, le quadrilatère $ABCD$ est donc un parallélogramme. □

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. Un quadrilatère convexe est un parallélogramme s'il possède l'une des propriétés caractéristiques suivantes :
   — Ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.
   — Ses angles opposés sont égaux deux à deux.
   — Deux de ses côtés sont égaux et parallèles.
   — Ses côtés opposés sont égaux deux à deux.
   — Ses diagonales sont sécantes en leur milieu.
2. Carré, rectangle et losange sont tous des parallélogrammes particuliers.

Chapitre 18

Quadrilatères particuliers

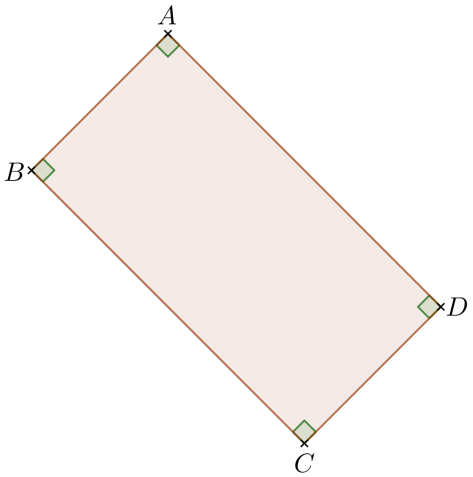
Jacques Peletier du Mans

(Le Mans 1 517 - Paris 1 583)

18.1 Rectangle

Définition 125. On appelle rectangle tout parallélogramme possédant au moins un angle droit.

Illustration :



Proposition 126. *Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses quatre angles sont droits.*

Démonstration. Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $\widehat{A} = 90°$. On sait que, dans un parallélogramme, les angles adjacents à un même côté sont supplémentaires. Ainsi : $\begin{cases} \widehat{A} + \widehat{B} = 180° \\ \widehat{A} = 90° \end{cases}$. D'où : $\widehat{B} = 90°$. De plus, dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux, donc $\widehat{C} = \widehat{A} = 90°$ et $\widehat{B} = \widehat{D} = 90°$. □

Remarque. La réciproque est vrai elle aussi :

Proposition 127. *Si un quadrilatère a ses quatre angles droits, alors c'est un rectangle.*

Démonstration. Deux côtés opposés sont perpendiculaires à un même côté, donc ils sont parallèles. Le quadrilatère est donc un parallélogramme. De plus, il possède un angle droit, donc, par définition, c'est un rectangle. □

Remarque. Le rectangle étant un parallélogramme particulier, ses côtés opposés sont parallèles et égaux et ses diagonales sont sécantes en leur milieu.

Proposition 128. *Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales sont égales.*

Démonstration. Soit $ABCD$ un rectangle. Les triangles ABC et BAD sont tels que :

$$\begin{cases} AB = AB \\ BC = AD \text{ (côtés opposés)} \\ \widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90° \end{cases}$$

Donc, d'après le deuxième cas d'égalité de triangles, ils sont égaux et par suite : $AC = BD$. □

Remarque. La réciproque est vrai elle aussi :

Proposition 129. *Si un parallélogramme a ses diagonales égales, alors c'est un rectangle.*

Démonstration. Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AC = BD$. Les triangles ABC et BAD sont tels que : $\begin{cases} AB = AB \\ BC = AD \text{ (côtés opposés)} \\ AC = BD \end{cases}$. Donc, d'après le troisième cas d'égalité de triangles, ils sont égaux et par suite : $\widehat{BAD} = \widehat{ABC}$. Or dans un parallélogramme, les angles adjacents à un même côté sont supplémentaires. Donc $\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = 90°$. □

Remarque. Les diagonales d'un rectangle étant égales et sécantes en leur milieu, ce dernier est le centre d'un cercle passant par les quatre sommets du rectangle : le cercle circonscrit au rectangle.

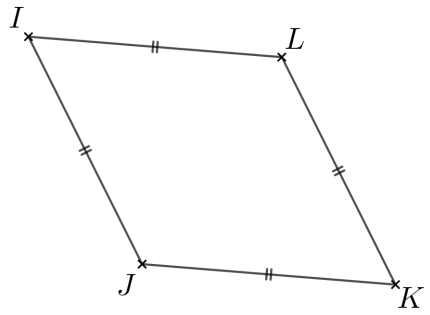
Proposition 130. *Toute droite passant par les milieux de deux côtés opposés d'un rectangle est un axe de symétrie de celui-ci.*

Démonstration. Laissée en exercice. □

18.2 Losange

Définition 131. On appelle losange tout parallélogramme possédant deux côtés consécutifs égaux.

Illustration :



Proposition 132. *Si un quadrilatère est un losange, alors ses quatre côtés sont égaux.*

Démonstration. Soit $ABCD$ un losange tel que $AB = BC$. $ABCD$ étant un parallélogramme, ses côtés opposés sont égaux. D'où : $\begin{cases} DC = AB \\ BC = AD \end{cases}$. Donc $DC = AB = BC = AD$. □

Remarque. La réciproque est vrai elle aussi :

Proposition 133. *Si un quadrilatère convexe a ses quatre côtés égaux, alors c'est un losange.*

Démonstration. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe qui a ses quatre côtés égaux. Comme $AB = CD$ et $BC = AD$, $ABCD$ est un parallélogramme d'après la proposition 121. $ABCD$ est un donc un parallélogramme qui a deux côtés adjacents égaux, il s'agit donc d'un losange par définition. □

Remarque. Cette proposition fournit une construction d'un losange à la règle et au compas.

Proposition 134. *Si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales sont sécantes en leur milieu, perpendiculaires et bissectrices des angles intérieurs du losange.*

Démonstration. Soit $ABCD$ un losange. $ABCD$ est aussi un parallélogramme par définition, donc ses diagonales sont sécantes en leur milieu d'après la proposition 123. Soit O le point d'intersection de ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$. Dans le triangle isocèle DAB, la médiane (AO) est également hauteur et bissectrice de l'angle $\widehat{A}$. Donc la diagonale (AC) est perpendiculaire à la diagonale (BD) et est bissectrice des angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$. On démontre de la même façon que la diagonale (BD) est bissectrice des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$. □

Proposition 135. *Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.*

Démonstration. Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O et dont les diagonales sont perpendiculaires. Les diagonales du parallélogramme $ABCD$ se coupent en leur milieu, donc O est le milieu de $[AC]$. Or, par hypothèse, $(BD) \perp (AC)$. Donc, par définition, (BD) est la médiatrice de $[AC]$. Ainsi, le point B est équidistant de A et C. Par conséquent, $AB = BC$. Finalement, par définition, $ABCD$ est un losange. □

Proposition 136. *Si une diagonale d'un parallélogramme est bissectrice de l'un de ses angles, alors ce parallélogramme est un losange.*

Démonstration. Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que la diagonale (AC) est bissectrice de $\widehat{BAD}$. Alors $\widehat{DAC} = \widehat{CAB}$. Or $\widehat{DAC} = \widehat{ACB}$ en tant qu'angles alternes-internes. Donc $\widehat{CAB} = \widehat{ACB}$. D'après le théorème 101, ABC est donc isocèle. Par définition, $AB = BC$. Ainsi, le parallélogramme $ABCD$ ayant deux côtés consécutifs égaux est un losange. □

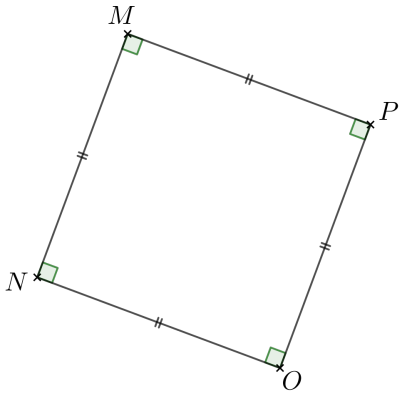
Proposition 137. *Toute diagonale d'un losange en est un axe de symétrie.*

Démonstration. Laissée en exercice. □

18.3 Carré

Définition 138. On appelle carré tout rectangle possédant deux côtés consécutifs égaux. Autrement dit, un carré est un losange possédant au moins un angle droit.

Illustration :

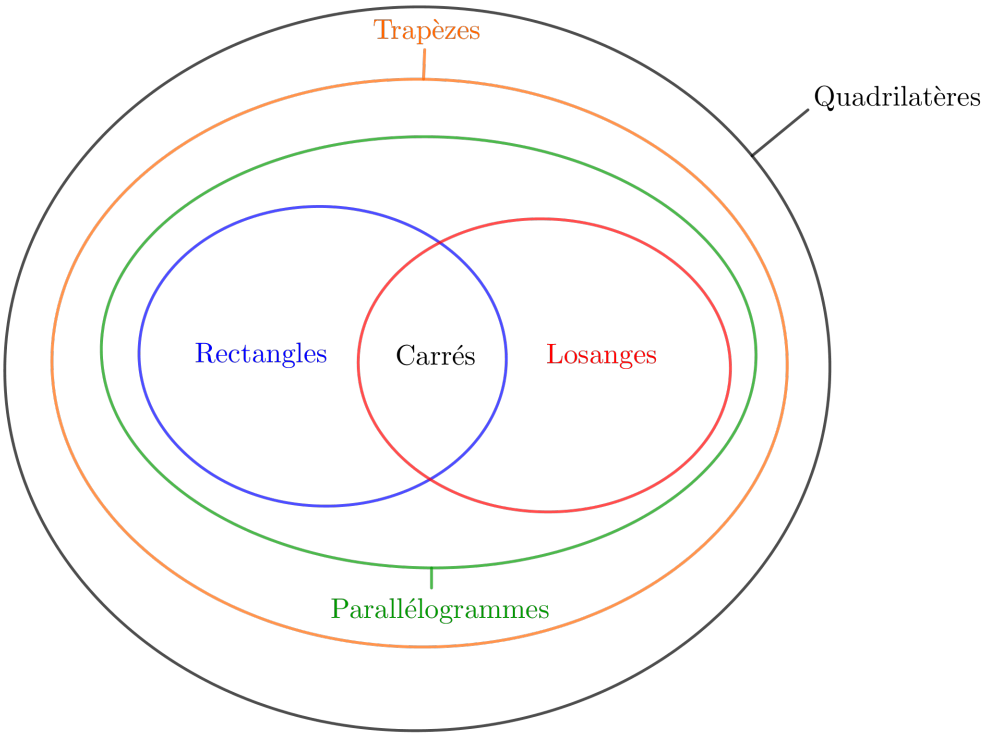


Proposition 139. *Si un quadrilatère est un carré, alors :*

1. *Ses quatre côtés sont égaux.*
2. *Ses quatre angles sont droits.*
3. *Ses diagonales sont égales, perpendiculaires et sont les bissectrices des angles du carré.*

Démonstration. Soit $ABCD$ un carré.
1. Par définition, $ABCD$ est aussi un losange. Donc ses quatre côtés sont égaux d'après la proposition 132.
2. Par définition, $ABCD$ est aussi un rectangle. Donc, d'après la proposition 126, $ABCD$ a ses quatre angles droits.
3. Par définition, $ABCD$ est aussi un rectangle. Donc, d'après la proposition 128, $ABCD$ a ses diagonales égales. □

Remarque. On peut synthétiser les différentes familles de quadrilatères particuliers à l'aide d'un diagramme de Venn [1] :



Remarque. Il est important de connaître les conditions nécessaires, suffisantes, et nécessaires et suffisantes afin qu'un quadrilatère a priori quelconque devienne un quadrilatère particulier.

1. John Venn est un mathématicien britannique né en 1 834 et mort en 1 923.

Chapitre 19

Aire d'une surface plane

Ferdinand von Lindemann

(Hanovre 1 852 - Munich 1 939)

19.1 Aire d'un parallélogramme

Remarque. L'aire d'un rectangle de longueur L et de largeur l s'exprime selon la formule : $\mathscr{A} = L \times l$.

Proposition 140. *L'aire d'un parallélogramme de base b et de hauteur relative h s'exprime selon la formule :*

$$\mathscr{A} = b \times h$$

Démonstration. On considère la figure suivante :

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soient H et K les projetés orthogonaux respectifs de D et C sur la droite (AB). Les droites (DH) et (CK) étant perpendiculaires à (AB) sont parallèles. Donc les angles $\widehat{ADH}$ et $\widehat{BCK}$ sont des angles à côtés parallèles. On a donc : $\begin{cases} \widehat{DAH} = \widehat{CBK} \text{ (angles correspondants)} \\ \widehat{ADH} = \widehat{BCK} \text{ (côtés parallèles)} \\ AD = BC \text{ (parallélogramme)} \end{cases}$.

Ainsi, d'après le premier cas d'égalité de triangles, les triangles ADH et BCK sont égaux, et par suite ils ont même aire. Le parallélogramme $ABCD$ et le rectangle $CDHK$ ont donc la même aire :

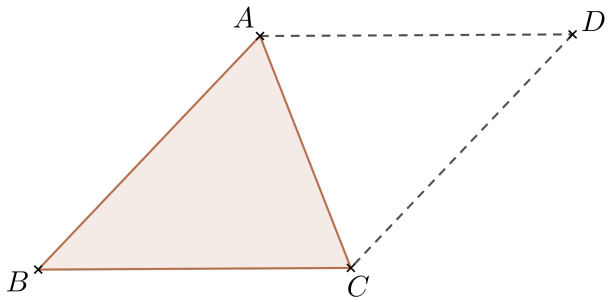
$$\mathscr{A}(ABCD) = \mathscr{A}(CDHK) = DH \times HK = DH \times DC = DH \times AB$$

□

19.2 Aire d'un triangle

Proposition 141. *L'aire d'un triangle de base b et de hauteur relative h s'exprime selon la formule : $\mathscr{A} = \frac{b \times h}{2}$.*

Démonstration. On considère la figure suivante :



Soit ABC un triangle. Soit D le point du plan tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Les triangles ABC et CDA vérifient : $\begin{cases} \widehat{DAC} = \widehat{BCA} \\ \widehat{ACD} = \widehat{CAB} \\ AC = AC \end{cases}$. Donc, d'après le premier cas d'égalité de triangles, les triangles ABC et CDA sont égaux et par suite, ils ont la même aire. D'où :

$$\mathscr{A}(ABCD) = \mathscr{A}(ABC) + \mathscr{A}(ADC) = 2 \times \mathscr{A}(ABC)$$

Puis : $\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}\mathscr{A}(ABCD) = \frac{1}{2} \times AH \times BC$.

□

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. Le cas du triangle rectangle est un cas particulier. Si l'on prend pour base l'une des cathètes, alors la hauteur relative est l'autre cathète. Par conséquent, l'aire d'un triangle rectangle est égalé à la moitié du produit de ses cathètes.
2. On peut désormais trouver une formule permettant de calculer l'aire d'un losange (laissée en exercice).

19.3 Aire d'un disque

Remarque. On rappelle que la circonférence d'un cercle est proportionnelle à son diamètre. Le coefficient de proportionnalité est noté π et il est bon de connaître des valeurs approchées de π : $3,14$ ou encore $\frac{22}{7}$. Ce nombre intervient aussi dans le calcul de l'aire d'un disque :

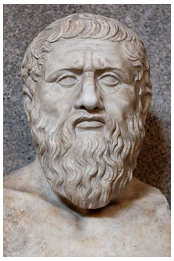
Proposition 142. *L'aire d'un disque de rayon r s'exprime selon la formule : $\mathscr{A} = \pi \times r \times r = \pi r^2$.*

Démonstration. Voici deux démonstrations :
1. On inscrit des polygones réguliers dans le disque et on calcule leur aire. On « passe à la limite ».
2. Méthode d'Archimède [1] : on divise le disque en secteurs angulaires égaux. On « déroule » l'ensemble. On assimile chaque secteur à un triangle, le « déroulé » est alors assimilable à un parallélogramme de base πr et de hauteur r. D'où le résultat. □

1. Archimède est un mathématicien grec né à Syracuse en 287 avant J.-C. et mort en 212 avant J.-C.

Chapitre 20

Prismes et cylindres



Platon

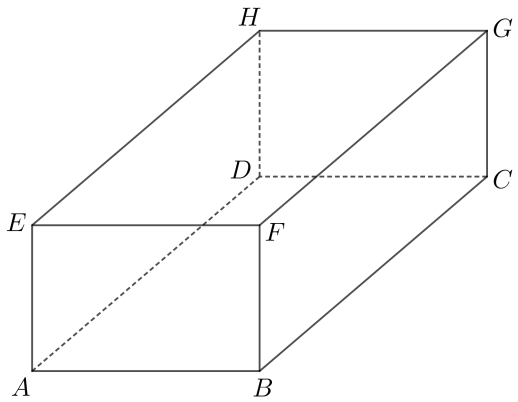
(Athènes 428 avt J.-C. - Athènes 348 avt J.-C.)

Dans ce chapitre, nous nous placerons dans l'espace usuel à trois dimensions.

20.1 Prismes

Définition 143. On appelle prisme droit tout solide limité par :
- Deux faces parallèles égales, appelées bases ;
- Des faces rectangulaires (et donc perpendiculaires aux bases), appelées faces latérales.

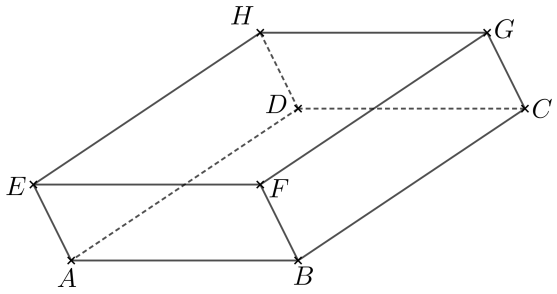
Illustration : $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.



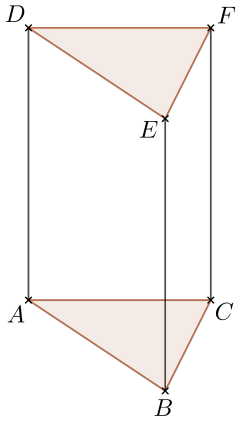
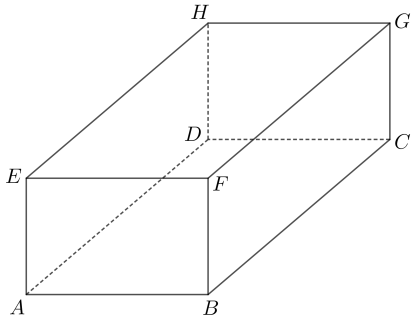
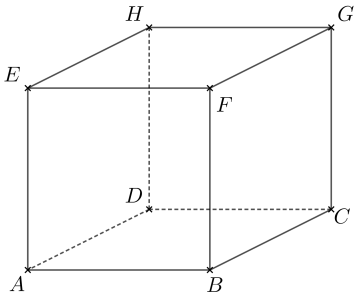
Remarque. Les arêtes latérales d'un prisme droit sont les arêtes qui ne font pas partie des bases. Ces arêtes sont égales et leur longueur commune est appelée la hauteur du prisme. Plus généralement, un prisme un solide

limité par deux bases polygonales superposables situées dans deux plans parallèles et par des parallélogrammes joignant les bases.

Illustration : $ABCDEFGH$ est un parallélépipède non rectangle.



Exemple. Voici quelques exemples de prismes droits :

A BASE TRIANGULAIRE	A BASE RECTANGULAIRE	A BASE CARRÉE (UN CUBE)
		

Définition 144. On appelle aire latérale d'un prisme la somme des aires de ses faces latérales.

Proposition 145. *L'aire latérale d'un prisme droit s'exprime selon la formule : $\mathscr{A}_l = \mathscr{P} \times h$, où $\mathscr{P}$ est le périmètre de sa base et h sa hauteur.*

Démonstration. Découle directement de la définition 144. □

Proposition 146. *Le volume d'un prisme droit s'exprime selon la formule : $\mathscr{V} = \mathscr{A}_b \times h$, où $\mathscr{A}_b$ est l'aire de sa base et h sa hauteur.*

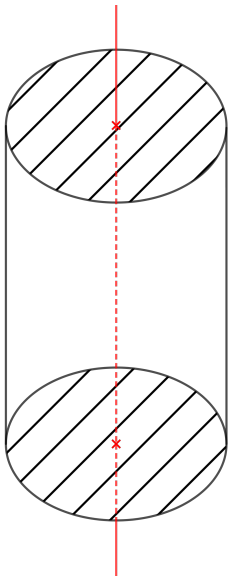
Démonstration. Principe de Cavalieri. □

Remarque. Ainsi, le volume d'un parallélépipède rectangle est égal au produit des nombres qui mesurent sa largeur, sa profondeur et sa hauteur.

20.2 Cylindres

Définition 147. On appelle cylindre de révolution un solide engendré par un rectangle tournant autour d'un de ses axes de symétrie appelé alors axe de révolution du cylindre.

Illustration :



Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Les bases du cylindre sont alors deux disques parallèles et égaux. De plus, on appelle surface latérale du cylindre la surface « joignant » les bases. Enfin, la distance entre les deux bases est appelée la hauteur du cylindre.
2. On peut développer le cylindre de révolution et obtenir ainsi son patron.
3. Il existe des cylindres qui ne sont pas des cylindres de révolution.
4. Un prisme est un cylindre mais un cylindre n'est pas nécessairement un prisme.

Proposition 148. *L'aire latérale d'un cylindre de révolution est égale au produit des nombres qui mesurent sa hauteur et le périmètre de sa base.*

Démonstration. Le patron du cylindre de révolution nous donne la réponse. □

Proposition 149. *Le volume d'un cylindre de révolution est égal au produit des nombres qui mesurent sa hauteur et l'aire de sa base.*

Démonstration. Admise. □

Bibliographie

[1] Frot, Jean-Louis (2021) - *Mathématiques - Classe de Cinquième - Pour ceux qui veulent comprendre* - Ellipses.

[2] Frot, Jean-Louis (2014) - *Mathématiques - Exercices - Pour ceux qui veulent s'exercer pour de bon* - Clovis.

[3] Casamayou-Boucau, Alexandre et Pantigny, François (2017) - *Les mathématiques au collège : démontrer pour comprendre* - Ellipses.

[4] Casamayou-Boucau, Alexandre et Pantigny, François (2019) - *Les mathématiques au collège : exercices corrigés progressifs* - Ellipses.

[5] Chevalier, Anne (2012) - *Référentiel de maths - A l'école comme à la maison - De 12 à 16 ans* - De Boeck.

[6] Collard, Philippe (2014) - *Donc, d'après. Une construction axiomatique de la géométrie au collège* - Mathémagique.com.

[7] Sésamath (2005) - *Les manuels et cahiers du collectif Sésamath* - Sésamath.net.

[8] Jacquet, Julien (2019) - *Apprendre à programmer avec Scratch - Jeux et applications mathématiques* - Ellipses.

[9] Chanet, Xavier (2016) - *Algorithmique et programmation au collège* - Ellipses.

[10] Chanet, Xavier (2016) - *Travaux pratiques d'algorithmique et de programmation au collège* - Ellipses.

Index

équation, 33

abscisse, 14
abscisse d'un point, 15
aire latérale d'un prisme, 86
angles adjacents, 39
angles alternes-internes, 59
angles complémentaires, 41
angles correspondants, 59
angles intérieurs d'un même côté, 59
angles supplémentaires, 41
associativité de l'addition, 18
axe, 14
axe des abscisses, 15
axe des ordonnées, 15

base d'un triangle isocèle, 64
bases d'un prisme droit, 85
bissectrice d'un angle, 40
bissectrice extérieure, 44
bissectrice intérieure, 44

cas d'égalité de triangles, 50
cercle, 43
cercle circonscrit à un rectangle, 76
coefficient de proportionnalité, 35
commutativité de l'addition, 18
coordonnées d'un point, 15
corde, 43
cylindre de révolution, 87

dénominateur, 23
développement d'une expression algébrique, 32
diagonale d'un parallélogramme, 71
diamètre, 43
différence, 11
différence de deux nombres relatifs, 19
disque, 43
distance à zéro, 14
distributivité, 10, 11
distributivités, 32
droites parallèles, 57
droites perpendiculaires, 42

expression algébrique, 31

faces latérales d'un prisme droit, 85
factorisation d'une expression algébrique, 32
figure convexe, 44
figures isométriques, 49
fraction, 23
fraction décimale, 26
fraction irréductible, 24

grandeurs proportionnelles, 35

hauteur, 44
hauteur du prisme, 85
homologie, 50
hypoténuse, 66

inégalité triangulaire bis, 48
inconnue, 33
inférieur, 20
inférieur ou égal, 20
involution, 52, 54

médiane, 44
médiatrice, 44, 63
mesure algébrique, 15

nombre négatif, 13
nombre positif, 13
nombres décimaux, 14
nombres entiers relatifs, 14
nombres opposés, 14
normé, 15
numérateur, 23

ordonnée d'un point, 15
origine, 15
orthogonal, 15
orthonormé, 15

parallélogramme, 71
partie entière d'une fraction, 25
points diamétralement opposés, 43
postulat d'Euclide, 58

pourcentage, 37
prisme droit, 85
produit, 11
produit en croix, 36

quatrième proportionnelle, 36
quotient, 11, 23

réduction au même dénominateur, 24
réduction d'une expression algébrique, 31
rapport, 23
rectangle, 75
relation de Chasles, 21
repère, 15

somme, 11
sommet principal d'un triangle isocèle, 64
supérieur, 20
supérieur ou égal, 20
symétrie axiale, 51
symétrie centrale, 53

triangle équilatéral, 65
triangle isocèle, 64
triangle rectangle, 66

valeur absolue, 14
volume d'un prisme droit, 86