

# LE CERCLE - EXERCICES

## Exercice 1

Soit  $ABC$  un triangle. Les droites perpendiculaires à  $(AB)$  en  $B$  et à  $(AC)$  en  $C$  sont sécantes en  $D$ . Démontrer que le centre  $O$  du cercle circonscrit à  $ABC$  est le milieu du segment  $[AD]$ .

## Exercice 2

Démontrer que les quatre sommets d'un quadrilatère  $ABCD$  tel que  $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$  sont cocycliques (i.e. appartiennent à un même cercle). Préciser son centre.

## Exercice 3

Soit  $ABCD$  un parallélogramme. Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles  $ABC$  et  $CDA$  ont le même rayon. Démontrer qu'il en est de même pour les cercles circonscrits aux triangles  $ABD$  et  $BCD$ .

## Exercice 4

Soit  $ABC$  un triangle d'orthocentre  $H$ . Soit  $D$  le point du plan tel que  $BACD$  soit un parallélogramme.

1. Démontrer que le cercle circonscrit au triangle  $HBC$  passe par  $D$ .
2. Comparer les rayons des cercles circonscrits aux triangles  $ABC$  et  $HBC$ .

## Exercice 5

Soit  $ABC$  un triangle. Soient  $M$ ,  $N$  et  $P$  les milieux respectifs des côtés  $[BC]$ ,  $[CA]$  et  $[AB]$ .

1. Comparer les rayons des cercles circonscrits aux triangles  $ANP$ ,  $BPM$  et  $CMN$ .
2. Démontrer que ces trois cercles passant par le centre  $O$  du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

## Exercice 6

1. Construire un cercle de rayon 3 cm, tangent à une droite  $d$  en un point  $A$  de cette droite.
2. Construire un cercle de centre donné tangent à une droite donnée.
3. Construire une tangente à un cercle, parallèle à une direction donnée.
4. On donne deux droites parallèles  $d$  et  $d'$  distantes de 52 mm. Construire un cercle tangent aux deux droites  $d$  et  $d'$ .
5. On donne deux droites parallèles  $d$  et  $d'$  et une sécante commune  $d''$ . Construire un cercle aux trois droites  $d$ ,  $d'$  et  $d''$ .

## Exercice 7

Sur les tangentes en  $A$  et  $B$  à un cercle de centre  $O$ , on porte deux longueurs égales à  $AA'$  et  $BB'$ .

1. Comparer les triangles  $OAA'$  et  $OBB'$ , puis les longueurs  $OA'$  et  $OB'$ .
2. Les droites  $(AA')$  et  $(BB')$  sont sécantes en  $P$ . Comparer  $[PA]$  et  $[PB]$ .

## Exercice 8

Les tangentes en  $A$  et  $B$  à un cercle de centre  $O$  sont sécantes en  $M$ .

1. Comparer les triangles  $OAM$  et  $OBM$ .
2. Quelle conséquence pouvons-nous en tirer au sujet des longueurs  $MA$  et  $MB$ ?
3. Quelles propriétés vérifie la droite  $(OM)$ ?
4. Démontrer que le cercle de diamètre  $[OM]$  passe par  $A$  et  $B$ .

## Exercice 9

Sur la tangente en  $M$  à un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$ , on porte deux longueurs égales  $MA$  et  $MB$ . Les cercles de centres  $A$  et  $B$  passant par  $M$  recoupent le cercle  $\mathcal{C}$  en  $N$  et  $P$ .

1. Comparer les triangles  $OMA$ ,  $OMB$ ,  $ONA$  et  $OPB$ . Quelles conséquences pouvons-nous en tirer ?
2. Démontrer que les droites  $(AN)$  et  $(BP)$  se coupent en  $C$  sur la droite  $(OM)$  et que  $CN = CP$ .

## Exercice 10

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $O$ . Soit  $[AB]$  un diamètre de  $\mathcal{C}$ . Une tangente à  $\mathcal{C}$  en un point  $M$  quelconque coupe les tangentes en  $A$  et  $B$  en deux points,  $C$  et  $D$ .

1. Comparer les triangles  $AOC$  et  $MOC$ , puis  $BOD$  et  $MOD$ . Quelles conséquences pouvons-nous en tirer ?
2. Démontrer que  $CD = AC + BD$ .
3. Démontrer que le triangle  $COD$  est rectangle.
4. Démontrer que  $OM^2 = MC \times MD$ .

## Exercice 11

1. Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $O$  et de rayon 2 cm. Soit  $A$  un point appartenant à  $\mathcal{C}$ . Construire le cercle  $\mathcal{C}'$  de centre  $O'$ , de rayon 2,5 cm et tangent extérieurement au cercle  $\mathcal{C}$  en  $A$ .
2. Démontrer que la droite perpendiculaire à la droite  $(OO')$  en  $A$  est tangente aux cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ .
3. Calculer  $OO'$ .

## Exercice 12

1. Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $O$  et de rayon 4 cm. Soit  $A$  un point appartenant à  $\mathcal{C}$ . Construire le cercle  $\mathcal{C}'$  de centre  $O'$ , de rayon 2,5 cm et tangent intérieurement au cercle  $\mathcal{C}$  en  $A$ .
2. Démontrer que la droite perpendiculaire à la droite  $(OO')$  en  $A$  est tangente aux cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ .
3. Calculer  $OO'$ .

## Exercice 13

Soit  $ABCD$  un carré de centre  $O$ . Soit  $E$  le milieu du côté  $[BC]$ . Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $O$  passant par  $E$ . Quelle est la position relative de chacune des droites  $(AB)$ ,  $(BC)$ ,  $(CD)$  et  $(DA)$  par rapport au cercle  $\mathcal{C}$  ?

## Exercice 14

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $O$ . Soient  $[AB]$  et  $[CD]$  deux diamètres perpendiculaires.

1. Construire la tangente à  $\mathcal{C}$  en chacun des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .
2. Déterminer la nature du quadrilatère  $ABCD$ .

## Exercice 15

Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan tels que  $AB = 80$  mm.

1. Placer un point  $M$  tel que  $AM = 55$  mm et  $BM = 45$  mm.
2. Construire le cercle  $\mathcal{C}$  passant par  $M$  et tangent à la droite  $(AB)$  au point  $B$ .
3. Construire l'autre tangente à  $\mathcal{C}$  qui passe par  $A$ . Soit  $D$  le point de tangence.
4. Construire la tangente à  $\mathcal{C}$  au point  $M$ . Elle coupe  $(AB)$  en  $E$  et  $(AD)$  en  $F$ .
5. Calculer le périmètre du triangle  $AEF$ .