Promenades mathématiques - « En génétique »

Région mathématique : Probabilités discrètes

Niveau de difficulté : Terminale

Équipement nécessaire : Probabilités conditionnelles

Suites géométriques

Comportement asymptotique d'une suite

Introduction

Les « gènes » se présentent dans les cas les plus simples en paires et sous deux formes appelées allèles : A et a. Cela donne donc trois génotypes :

— Les génotypes AA ;
— Les génotypes Aa ;
— Les génotypes aa.

Les génotypes AA et aa sont dits homozygotes et les génotypes Aa sont dits hétérozygotes. Chaque individu reçoit au hasard (hypothèse d'équiprobabilité) et de manière indépendante un gène de chacun des génotypes de ses parents.

Cas de l'autofécondation

Certaines plantes, comme par exemple le blé, se reproduisent par autofécondation. Tout se passe comme si l'on fécondait deux plantes de même génotype, chaque gène d'une paire étant sélectionné au hasard.

Partie A :

1. Calculer la probabilité pour qu'une plante de génotype AA donne par autofécondation une plante de génotype AA.
2. Calculer la probabilité pour qu'une plante de génotype Aa donne par autofécondation une plante de génotype Aa.
3. Calculer la probabilité pour qu'une plante de génotype aa donne par autofécondation une plante de génotype aa.
4. Recopier puis compléter le tableau suivant à l'aide de probabilités :

		Génotype de la plante initiale		
		AA	Aa	aa
Génotype du descendant	AA			
	Aa			
	aa			

Partie B :

Partant d'une plante hétérozygote (génération 0), on constitue par autofécondation des générations successives. Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère les événements suivants :

— AA_n : « La plante de la n-ième génération est du génotype AA » ;
— Aa_n : « La plante de la n-ième génération est du génotype Aa » ;
— aa_n : « La plante de la n-ième génération est du génotype aa ».

On pose $x_n \coloneqq P(AA_n)$, $y_n \coloneqq P(Aa_n)$ et $z_n \coloneqq P(aa_n)$.

1. *Étude de la suite y.*
   (a) Déterminer y_0.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n$.
   (c) En déduire le terme général de la suite y.
2. *Étude la suite x.*
   (a) Déterminer x_0.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}y_n$.
   (c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $x_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
3. En déduire le terme général de la suite z.
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$. Interpréter.

Cas de la reproduction bisexuée

Dans cette section, deux parents dont on suppose les génotypes indépendants, se fécondent pour donner des descendants. Chaque individu reçoit au hasard un gène de chacun des génotypes de ses parents. On note p la probabilité qu'un individu présente le génotype AA, q la probabilité qu'un individu présente le génotype Aa et r la probabilité qu'un individu présente le génotype aa.

1. Recopier et compléter les tableaux suivants à l'aide de probabilités :

Génotype du parent n°1 : AA		Génotype de la plante initiale		
		AA	Aa	aa
Génotype du descendant	AA			
	Aa			
	aa			

Génotype du parent n°1 : Aa		Génotype de la plante initiale		
		AA	Aa	aa
Génotype du descendant	AA			
	Aa			
	aa			

Génotype du parent n°1 : aa		Génotype de la plante initiale		
		AA	Aa	aa
Génotype du descendant	AA			
	Aa			
	aa			

2. Calculer la probabilité P pour que le descendant soit de génotype AA.
3. Calculer la probabilité Q pour que le descendant soit de génotype Aa.
4. Calculer la probabilité R pour que le descendant soit de génotype aa.
5. Exprimer P, Q et R en fonction de $\theta := p + \frac{1}{2}q$.
6. Démontrer que $Q^2 = 4PR$.
   Remarque. Cette égalité est appelée la relation de Hardy[1]-Weinberg[2]
7. Que se passe-t-il pour les générations suivantes ?

---

1. Godfrey Harold Hardy est un mathématicien britannique né 1877 et mort en 1947.
2. Wilhelm Weinberg est un médecin allemand né en 1862 et mort en 1937.