

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2002

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Les premières questions de chacune des trois premières parties de ce problème sont indépendantes des autres parties. Il n'est donc pas obligatoire de commencer l'étude dans l'ordre indiqué, à condition d'indiquer la question traitée en respectant l'indexation du texte.

Les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

* * *

Dans tout le problème, un triangle ABC est la figure déterminée par les trois points A, B, C supposés non alignés. Conformément à la tradition, les longueurs de ses côtés seront notées $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$, et \widehat{A} , \widehat{B} et \widehat{C} sont les mesures en radians, comprises entre 0 et π , de ses angles.

Les trois premières parties se déroulent dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ associé aux coordonnées (x, y) (ou (X, Y)).

Tournez la page, S. V. P.

Première Partie

Soit ABC un triangle. On note P le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) et D le symétrique du point C par rapport à la droite (AP) .

On dit que ce triangle est *pseudo-rectangle* en A si $|\widehat{B} - \widehat{C}| = \frac{\pi}{2}$.

On précise qu'il est *pseudo-rectangle* en A , *obtus* en B dans le cas où $\widehat{B} - \widehat{C} = \frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que le triangle ABC est pseudo-rectangle en A si et seulement si le triangle ABD est rectangle en A .
2. Montrer que $PA^2 = PB.PC$ si et seulement si le triangle ABC est rectangle en A ou pseudo-rectangle en A .
3. Montrer que le triangle ABC est pseudo-rectangle en A si et seulement si son orthocentre est le symétrique du point A par rapport à la droite (BC) .
4. Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC . Montrer que $PB + PC = 2R$ si et seulement si ABC est rectangle en A ou pseudo-rectangle en A .
5. Montrer que le triangle ABC est pseudo-rectangle en A si et seulement si la droite (AP) est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC .
6. Dans le plan complexe associé au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on note α, β, γ les affixes des points non alignés A, B, C .
 - a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\frac{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}{(\beta - \gamma)^2}$ pour que le triangle ABC soit pseudo-rectangle en A .
 - b) On suppose $\beta = -\gamma = e^{i\frac{\pi}{4}}$. Déterminer l'ensemble (E_1) des points A du plan tels que le triangle ABC soit pseudo-rectangle en A .
 - c) On suppose $\beta = -\gamma = 1$. Déterminer l'ensemble (E_2) des points A du plan tels que le triangle ABC soit pseudo-rectangle en A .
 - d) Par quelle transformation géométrique simple passe-t-on de (E_2) à (E_1) ?

Deuxième Partie

1. Soit (a, b, c) un triplet de réels strictement positifs. Établir l'équivalence des conditions suivantes :

[i] il existe un triangle ABC pseudo-rectangle en A et obtus en B tel que $AB = c, BC = a$ et $CA = b$;

[ii] $b^2 - c^2 = a\sqrt{b^2 + c^2}$;

[iii] il existe deux réels ρ et θ vérifiant $\rho > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ et $a = \rho \cos 2\theta, b = \rho \cos \theta$ et $c = \rho \sin \theta$.

Ces conditions étant réalisées, montrer que θ mesure l'un des angles du triangle ABC . Comment peut-on interpréter géométriquement ρ ?

2. Soit ABC un triangle pseudo-rectangle en A , obtus en B et dont les longueurs des côtés sont des nombres rationnels ; soit ρ et θ les deux réels définis au 1. [iii].

Dans cette question, on pourra utiliser sans justification les formules trigonométriques suivantes vérifiées par tout réel φ pour lequel $\tan \varphi$ est définie :

$$\cos 2\varphi = \frac{1 - \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}, \quad \sin 2\varphi = \frac{2 \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}.$$

a) Montrer que ρ est rationnel et en déduire que $\tan \frac{\theta}{2}$ est rationnel. Soient p et q les entiers strictement positifs et premiers entre eux tels que $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{p}{q}$.

b) Vérifier que $0 < p < q(\sqrt{2} - 1)$ et établir l'existence d'un rationnel strictement positif r tel que

$$\begin{aligned} a &= r(p^4 - 6p^2q^2 + q^4), \\ b &= r(q^4 - p^4), \\ c &= 2pqr(p^2 + q^2). \end{aligned}$$

3. Montrer réciproquement que les formules du 2. b) définissent les longueurs des côtés d'un triangle pseudo-rectangle en A , obtus en B et dont les longueurs des côtés sont rationnelles.

4. a) Soient p et q deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Déterminer le plus grand diviseur commun aux trois entiers $p^4 - 6p^2q^2 + q^4$, $q^4 - p^4$, $2pq(p^2 + q^2)$ (on discutera suivant la parité de p et q).

b) Décrire les triplets d'entiers (a, b, c) tels qu'il existe un triangle ABC , pseudo-rectangle en A obtus en B , tel que $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$.

5. Résoudre dans \mathbb{N}^* l'équation $x^2(y^2 + z^2) = (y^2 - z^2)^2$.

6. Résoudre dans \mathbb{Q}^* l'équation $x^2(y^2 + z^2) = (y^2 - z^2)^2$.

7. Résoudre dans \mathbb{N}^* l'équation $x^2(y^2 - z^2)^2 = (y^2 + z^2)^3$.

Troisième Partie

Soit \mathcal{H} la courbe définie par $x \geq 1$ et $y = \sqrt{x^2 - 1}$. Soient A un point de \mathcal{H} et (r, s) le couple de ses coordonnées. On note \mathcal{A} l'aire de la partie du plan définie par les relations $1 \leq x \leq r$ et $y^2 \leq x^2 - 1$.

1. Calculer \mathcal{A} en fonction de r et de s (on pourra par exemple effectuer une rotation du repère d'angle $-\pi/4$).

2. Le but de cette question est de retrouver le résultat précédent en utilisant une méthode dont le principe remonte à Fermat, sans doute peu après 1658 : « De æquationum localium transmutatione et emendatione ad ultimodam curvilinearum inter se vel cum rectilineis comparationem, cui annectitur proportionis geometricæ in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usu » (Œuvres complètes, Tome I, pages 225-285).

Soit n un entier naturel non nul et u un réel positif tel que $u^n = r + s$. Pour tout entier k entre 1 et n , on considère le trapèze rectangle T_k (éventuellement réduit à un triangle) dont le côté oblique est le segment ayant pour extrémités les points de coordonnées $(u^{k-1}, 0)$ et $(u^k, 0)$, dont les bases ont pour pente -1 et dont l'un des angles droits a pour sommet le point de \mathcal{H} d'abscisse $\frac{u^{k-1} + u^{1-k}}{2}$.

Tournez la page, S. V. P.

a) On définit bien ainsi, pour chaque valeur de k , un unique trapèze T_k (réduit à un triangle lorsque $k = 1$) : illustrer par un croquis.

b) Pourquoi peut-on conjecturer que la somme des aires de ces trapèzes admet $\frac{\mathcal{A} + s^2}{2}$ comme limite lorsque n tend vers l'infini ?

c) Démontrer la conjecture précédente en utilisant une autre suite de trapèzes combinée à la première.

d) Retrouver la valeur de \mathcal{A} .

3. Soient B et C les points de coordonnées respectives $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ et A un point de coordonnées (x, y) avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$ tel que le triangle ABC soit pseudo-rectangle en A .

On note S l'aire du triangle ABC et S' l'aire de la partie du plan constituée des points de la plaque triangulaire définie par le triangle ABC dont les coordonnées (X, Y) vérifient $Y^2 \leq X^2 - 1$.

Étudier une éventuelle limite lorsque x tend vers l'infini du rapport $\frac{S'}{S}$.

Quatrième Partie

Cette partie se déroule dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ associé aux coordonnées (x, y, z) .

Dans le plan d'équation $z = 0$, soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et soient T et P deux points distincts tels que la droite (TP) soit tangente au cercle (C) en T . Soient B et C les intersections de la droite (OP) avec le cercle (C) et (D) la droite perpendiculaire au plan d'équation $z = 0$ passant par P .

1. a) Montrer qu'il existe deux points A et A' appartenant à la droite (D) tels que les triangles ABC et $A'BC$ soient pseudo-rectangles respectivement en A et A' ; donner une construction simple de ces deux points.

b) Montrer que les coordonnées de ces deux points vérifient l'égalité $x^2 + y^2 = z^2 + 1$.

2. Soit (H) l'ensemble des points A et A' quand T et P varient.

a) Quelle est l'intersection de l'ensemble (H) avec un plan orthogonal à \vec{w} ?

b) Quelle est l'intersection de l'ensemble (H) avec un plan contenant la droite $(O; \vec{w})$?

c) Montrer que l'ensemble (H) est inclus dans une réunion de droites que l'on précisera.

3. On s'intéresse dans cette dernière question aux points entiers de l'ensemble (H) , c'est-à-dire aux éléments de (H) dont les trois coordonnées sont des nombres entiers.

a) Soit (x, y, z) le triplet des coordonnées d'un tel point. Montrer que x ou y est impair.

On note désormais \mathcal{S} l'ensemble des triplets (x, y, z) d'entiers naturels strictement positifs tels que x est impair et $x^2 + y^2 = z^2 + 1$.

b) Soit d un entier strictement positif fixé. Démontrer que l'ensemble des éléments (x, y, z) de \mathcal{S} tels que $\text{PGCD}(x + 1, y + z) = d$ est l'ensemble vide si d est impair et un ensemble infini si d est pair.

c) Soit m un entier naturel impair supérieur ou égal à 3. Combien y a-t-il d'éléments (x, y, z) de \mathcal{S} tels que $x = m$? Déterminer ces éléments lorsque $m = 3, 5, 7, 9$.

*

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES
—SESSION DE 2003
—**COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES****(Classe terminale S)**DURÉE : 5 heures
—

La calculatrice de poche est autorisée.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Le problème comporte deux questions préliminaires dont les résultats sont utiles tout au long du problème, et cinq parties ; les quatre premières sont très largement indépendantes les unes des autres. Il n'est donc pas obligatoire de traiter systématiquement les questions dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement la question traitée en respectant l'indexation du texte.

De même, pour poursuivre, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le problème étudie des configurations du plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . On pourra aussi se placer dans le plan complexe associé, i étant l'affixe du point de coordonnées $(0, 1)$.

On appelle **triangle** tout ensemble de **trois points non alignés** du plan.

Questions préliminaires

1. Soit ABC un triangle et M un point quelconque du plan. Montrer que :

$$\vec{MA} \cdot \vec{BC} + \vec{MB} \cdot \vec{CA} + \vec{MC} \cdot \vec{AB} = 0$$

En déduire que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes en un point H appelé **orthocentre** de ce triangle.

2. Soit ABC un triangle, Ω le centre de son cercle circonscrit et H le point tel que $\vec{\Omega H} = \vec{\Omega A} + \vec{\Omega B} + \vec{\Omega C}$. Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC .

Étant donnée une partie X du plan, supposée non incluse dans une droite, on note $\mathcal{H}(X)$ l'ensemble des orthocentres des triangles dont les sommets appartiennent à X .

On dira qu'une partie X du plan est **orthocentrique** si elle n'est pas incluse dans une droite et si $\mathcal{H}(X)$ est inclus dans X , c'est-à-dire si tout orthocentre d'un triangle de points de X appartient à X .

Première partie

- Déterminer les parties orthocentriques à 3 éléments.
- Déterminer les parties orthocentriques à 4 éléments.
- Soit X un ensemble de quatre points d'un cercle et $Y = \mathcal{H}(X)$.
 - Montrer que Y se déduit de X par une transformation simple.
 - Déterminer $\mathcal{H}(Y)$.
- Soit Γ un cercle de rayon strictement positif ; déterminer $\mathcal{H}(\Gamma)$.
 - Soit D un disque de rayon strictement positif ; déterminer $\mathcal{H}(D)$.

Deuxième partie

Dans cette partie, R est un nombre réel strictement positif, n est un entier au moins égal à 2 et X est l'ensemble des $2n$ sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon R .

On considère l'ensemble \mathcal{T} des triangles dont les sommets appartiennent à X . On choisit au hasard, avec équiprobabilité, un élément de \mathcal{T} .

- Quelle est la probabilité de choisir un triangle rectangle ?
- Quelle est la probabilité de choisir un triangle dont les trois angles sont aigus ?
- On note L la variable aléatoire qui à tout élément de \mathcal{T} associe le carré de la distance de O à son orthocentre. Déterminer, en fonction de n et R , l'espérance de la variable aléatoire L .

Troisième partie

- Soit a, b, c trois réels tels que $a(b - c) \neq 0$ et A, B, C les points de coordonnées respectives $(0, a), (b, 0), (c, 0)$. Calculer les coordonnées de l'orthocentre D du triangle ABC .
- Soit X la partie obtenue en prenant la réunion d'une droite Δ et d'un point M n'appartenant pas à Δ . Déterminer $\mathcal{H}(X)$. Montrer que $\mathcal{H}(X) \cup X$ est une partie orthocentrique.
- Soit X une partie orthocentrique incluse dans la réunion des axes (O, \vec{u}) et (O, \vec{v}) et contenant au moins trois points de (O, \vec{u}) distincts de O .
 - Montrer que X contient au moins trois points de (O, \vec{u}) d'abscisses non nulles et de même signe.
 - Montrer que X contient au moins trois points de (O, \vec{u}) d'abscisses strictement positives.
- Déterminer les parties orthocentriques finies, contenant au plus cinq points et incluses dans la réunion des axes (O, \vec{u}) et (O, \vec{v}) .

b) Soit X une partie orthocentrique incluse dans la réunion des axes (O, \vec{u}) et (O, \vec{v}) et contenant au moins six points. Montrer qu'il existe deux suites (x_n) et (x'_n) de réels non nuls telles que, pour tout entier n , les points de coordonnées $(x_n, 0)$ et $(x'_n, 0)$ appartiennent à X , et telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0.$$

Une partie orthocentrique incluse dans la réunion des axes (O, \vec{u}) et (O, \vec{v}) et contenant au moins six points peut-elle être finie ?

Quatrième partie

L'objectif de cette partie est la construction de parties orthocentriques remarquables.

1. Soit k un réel non nul et soit Y l'hyperbole d'équation $xy = k$.

a) Soit A, B, C, D quatre points distincts de Y , d'abscisses respectives a, b, c, d . Montrer que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont orthogonaux si et seulement si $abcd = -k^2$.

b) Soit A, B, C trois points distincts de Y , d'abscisses respectives a, b, c . Déterminer l'orthocentre de ABC .

c) Montrer que Y est orthocentrique.

Dans toute la suite de la quatrième partie, on considère un entier relatif non nul q et on note X l'ensemble d'équation $x^2 + qxy - y^2 = 1$.

2. a) Montrer que l'équation $t^2 - qt - 1$ possède deux racines réelles distinctes. Montrer que ces racines sont irrationnelles.

Dans toute la suite de la quatrième partie, on note r et r' ces deux racines et s la similitude définie par la représentation complexe $z \mapsto (1 - ri)z$.

b) Montrer que $s(X)$ est une hyperbole, d'équation $xy = k$, où k est un réel à déterminer. En déduire que X est un ensemble orthocentrique.

3. Soit G l'ensemble des points de X à coordonnées entières et Γ l'ensemble des abscisses des éléments de $s(G)$.

a) Vérifier que Γ est l'ensemble des nombres réels de la forme $x + ry$, où x et y sont deux entiers tels que $(x + ry)(x + r'y) = 1$.

b) Montrer que $-1 \in \Gamma$; montrer que $r^2 \in \Gamma$.

c) Montrer que le produit de deux éléments de Γ est élément de Γ et que l'inverse d'un élément de Γ est élément de Γ . Montrer que Γ possède une infinité d'éléments.

4. Déduire de ce qui précède que l'ensemble G des points à coordonnées entières de X est une partie orthocentrique infinie.

Cinquième partie

On note Y_1 l'hyperbole d'équation $xy = 1$ et Y_0 l'ensemble d'équation $xy = 0$, c'est-à-dire la réunion des axes (O, \vec{u}) et (O, \vec{v}) .

On admet le résultat suivant :

« Étant donnés quatre points A, B, C et D du plan, il existe une similitude s telle que $s(A), s(B), s(C)$ et $s(D)$ appartiennent tous à Y_1 ou bien appartiennent tous à Y_0 ».

Soit A_0, B_0, C_0 et D_0 quatre points, trois à trois non alignés, et soit $X_0 = \{A_0, B_0, C_0, D_0\}$.

On définit par récurrence $X_{n+1} = \mathcal{H}(X_n)$ pour tout entier naturel n . On suppose qu'il existe un entier n strictement positif tel que $X_n = X_0$ et on note m le plus petit entier ayant cette propriété.

1. Montrer que $m = 1$ ou $m = 2$.

2. Déterminer les ensembles X_0 tels que $m = 1$, puis ceux tels que $m = 2$.

* * *
*

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2004

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Le problème comporte six parties qui sont très largement indépendantes.

Il n'est donc pas obligatoire de traiter systématiquement les questions dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement la question traitée en respectant l'indexation du texte.

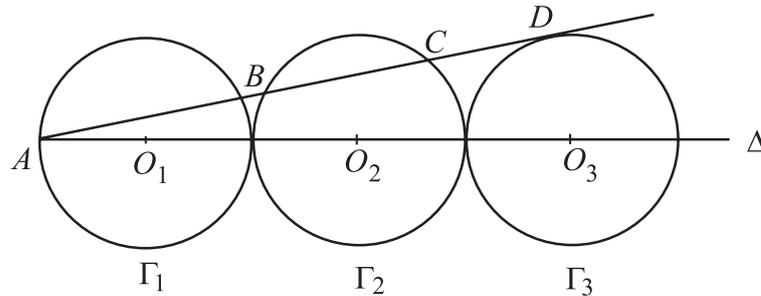
De même, pour poursuivre, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Partie I : une famille de cercles tangents

Dans le plan, soit A un point et Δ une demi-droite d'origine A .

1- On considère trois cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ de même rayon r non nul, de centres respectifs O_1, O_2, O_3 distincts et alignés dans cet ordre sur la demi-droite Δ . Le cercle Γ_1 passe par A et le cercle Γ_2 est tangent aux cercles Γ_1 et Γ_3

Les diamètres des cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ sur la demi-droite Δ sont notés respectivement $[AA_1], [A_1A_2]$ et $[A_2A_3]$.



Par le point A , on mène une droite (AD) tangente en D au cercle Γ_3 .

a) Montrer que la droite (AD) coupe le cercle Γ_2 en deux points distincts B et C . Calculer la longueur BC .

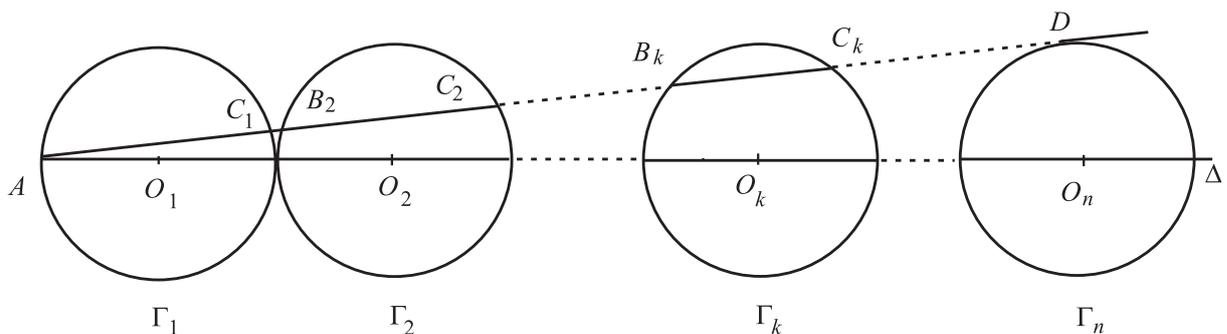
b) Montrer que les droites (BA_1) et (CA_2) sont sécantes ; on note P leur point d'intersection.

Montrer de même que les droites (CA_1) et (BA_2) sont sécantes ; on note Q leur point d'intersection.

Que peut-on dire de la direction de la droite (PQ) ?

2- **Plus généralement**, on considère un entier n strictement supérieur à 1 et n cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ de même rayon r strictement positif, de centres respectifs O_1, O_2, \dots, O_n distincts et alignés dans cet ordre sur la demi-droite Δ . Le cercle Γ_1 passe par A et, pour tout $k > 1$, le cercle Γ_k est tangent au cercle Γ_{k-1} .

Les diamètres des cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ sur la droite Δ sont notés respectivement $[AA_1], [A_1A_2], \dots, [A_{n-1}A_n]$.



Par le point A , on mène une droite (AD) tangente en D au cercle Γ_n . Montrer que, pour tout k entier tel que $1 \leq k \leq n - 1$, cette droite coupe le cercle Γ_k en deux points distincts B_k et C_k (on remarque que $B_1 = A$).

a) Calculer la longueur $B_k C_k$ en fonction de n , de k et de r .

Dans toute la suite du problème, on prend $r = 1$. On pose $L(n, k) = B_k C_k$.

b) Montrer que pour que $L(n, k)$ soit rationnel il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :

$$(C_1) \quad \text{il existe } a \in \mathbb{N} \text{ tel que } n(n-1) - k(k-1) = 4a^2$$

Partie II : étude d'une surface

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les coordonnées (respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la cote) d'un point sont notées x, y et z .

On considère l'ensemble Σ des points M de coordonnées (x, y, z) vérifiant

$$z^2 = x(x-1) - y(y-1)$$

1- Soit λ un réel et P_λ le plan d'équation $x = \lambda$.

Montrer que l'intersection de Σ et de P_λ est un cercle C_λ dont on déterminera, en fonction de λ , le centre et le rayon.

2- Soit I le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ et (d) la droite passant par I de vecteur directeur \vec{i} .

Montrer que la droite (d) est un axe de symétrie de Σ . Déterminer et dessiner l'intersection de Σ et du plan d'équation $y = \frac{1}{2}$.

3- Reconnaître la nature de l'ensemble Σ .

4- Soit un entier n strictement supérieur à 2 et un entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$. Montrer que $L(n, k)$ est rationnel si, et seulement si, les points de Σ d'abscisse n et d'ordonnée k ont pour cote un nombre entier pair.

Partie III : étude d'une limite

À partir de la configuration étudiée au I.2, on définit λ_n comme la proportion du segment $[AD]$ située à l'intérieur des cercles (Γ_k) , pour $1 \leq k \leq n-1$. Ainsi, on a $\lambda_n = \frac{1}{AD} \sum_{k=1}^{n-1} B_k C_k$.

1- Calculs d'intégrales

On définit la fonction f , de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , par : pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt$,

puis la fonction F , de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans \mathbb{R} , par : pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $F(x) = f(\sin x)$.

a) Montrer que la fonction F est dérivable et calculer sa dérivée, notée F' .

b) Montrer que, pour tout x dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, $F(x) = \int_0^x \cos^2 t dt$.

c) Sans chercher à calculer les intégrales, démontrer l'égalité $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt$ et en déduire la valeur commune des deux intégrales.

d) En déduire que $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{4}$; interpréter géométriquement ce résultat.

2- a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\lambda_n = \frac{2}{2n-1} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1}}$.

b) Montrer que si $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n$, on a : $(\frac{k-1}{n})^2 \leq \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} \leq (\frac{k}{n})^2$

c) On pose $I_{n,k} = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \sqrt{1-t^2} dt$.

Montrer que pour des valeurs convenables de n et k , que l'on précisera, on a :

$$nI_{n,k+1} \leq \sqrt{1 - \frac{k-1}{n-1} \cdot \frac{k}{n}} \leq nI_{n,k-1}$$

3- Démontrer, à partir des résultats des questions 1 et 2 ci-dessus, que la suite (λ_n) est convergente et calculer sa limite.

Partie IV : étude de la condition (\mathcal{C}_1)

On considère deux entiers n et k tels que $1 \leq k \leq n - 1$.

1- On pose $p = 2n - 1$ et $q = 2k - 1$. Montrer que le couple (n, k) vérifie la condition \mathcal{C}_1 si, et seulement si, (p, q) est un couple d'entiers naturels impairs tels que $q < p$, vérifiant la condition (\mathcal{C}_2) suivante :

$$(\mathcal{C}_2) \quad \text{il existe } a \in \mathbb{N} \text{ tel que } p^2 - q^2 = 16a^2$$

2- Soit (p, q) un couple de nombres entiers naturels, tel qu'il existe deux entiers $u > 0$ et $v > 0$, de parités différentes, pour lesquels $p = u^2 + v^2$ et $q = u^2 - v^2$. Montrer que (p, q) est un couple d'entiers naturels impairs tels que $q < p$ vérifiant la condition (\mathcal{C}_2) .

3- On considère un couple (p, q) , d'entiers naturels impairs et premiers entre eux, tels que $q < p$ et vérifiant la condition (\mathcal{C}_2) . Montrer qu'il existe deux entiers naturels u et v de parités différentes tels que $p = u^2 + v^2$ et $q = u^2 - v^2$. Calculer alors, en fonction de u et de v , la valeur de l'entier a qui intervient dans la condition (\mathcal{C}_2) .

Partie V : nombre premier somme de deux carrés

On se propose dans cette partie de déterminer tous les nombres premiers qui peuvent s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers naturels. On désignera plus simplement un tel nombre comme étant « somme de deux carrés ».

1- a) Montrer que si n est un entier naturel impair somme de deux carrés, il est congru à 1 modulo 4.

b) Écrire 2 et 5 comme somme de deux carrés.

Dans la suite de la partie V, p désigne un nombre premier congru à 1 modulo 4 et strictement supérieur à 5. On l'écrit sous la forme $p = 4m + 1$ (avec $m > 2$).

On définit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid 4xy + z^2 = p\}$.

2- a) Montrer que S est un ensemble fini non vide et que l'intersection de S et de l'ensemble d'équation $x = y + z$ est vide.

b) À tout triplet (x, y, z) de S , on associe le triplet (x', y', z') défini par

$$(x', y', z') = \begin{cases} (x - y - z, y, 2y + z) & \text{si } x > y + z \\ (y + z - x, x, 2x - z) & \text{si } x < y + z \end{cases}$$

Montrer que pour tout (x, y, z) de S , (x', y', z') est aussi élément de S .

On considère désormais la suite de triplets dans S définie en itérant le procédé précédent de la manière suivante :

- On part du triplet $(x_0, y_0, z_0) = (m, 1, 1)$;
- (x_k, y_k, z_k) ayant été défini dans S , on prend $x_{k+1} = x'_k$, $y_{k+1} = y'_k$, $z_{k+1} = z'_k$.

3- a) Étude d'un cas particulier. Dans cette question seulement, on prend $m = 10$. Déterminer les triplets (x_k, y_k, z_k) pour $0 \leq k \leq 11$.

b) Montrer que si $(a, b, c) = (x_k, y_k, z_k)$, avec $k \geq 2$, alors le triplet $(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1})$ est :

$$\begin{cases} (a - b + c, b, c - 2b) & \text{si } a - 4b + 2c > 0 \\ (b, a - b + c, 2b - c) & \text{si } a - 4b + 2c < 0 \end{cases}$$

Montrer que ce résultat est encore vrai pour $k = 1$.

c) Montrer qu'il existe deux entiers distincts k et ℓ tels que $(x_k, y_k, z_k) = (x_\ell, y_\ell, z_\ell)$.

En déduire qu'il existe un entier n strictement positif tel que $(x_n, y_n, z_n) = (m, 1, 1)$.

On note désormais n le plus petit entier strictement positif tel que

$$(x_n, y_n, z_n) = (m, 1, 1).$$

4- a) Calculer $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ et $(x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2})$.

b) Montrer que, pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n$:

$$(x_{j-1}, y_{j-1}, z_{j-1}) = \begin{cases} (x_{n-j}, y_{n-j}, -z_{n-j}) & \text{si } x_{j-1} > y_{j-1} + z_{j-1} \\ (y_{n-j}, x_{n-j}, z_{n-j}) & \text{si } x_{j-1} < y_{j-1} + z_{j-1} \end{cases}$$

c) Montrer que n est impair. On pose désormais $n = 2r + 1$.

d) Montrer que $x_r = y_r$. En déduire qu'il existe une décomposition de p en somme de deux carrés.

5- a) Déduire des questions précédentes un algorithme permettant de décomposer p en somme de deux carrés.

b) Donner le plus petit nombre premier supérieur à 40 qui est somme de deux carrés et, à l'aide de cet algorithme, en préciser une décomposition (on indiquera les triplets calculés aux différentes étapes de l'itération).

Partie VI : retour au problème initial

1- Soit n et m deux entiers naturels somme de deux carrés, $n = a^2 + b^2$, $m = c^2 + d^2$. En introduisant les nombres complexes $a + ib$ et $c + id$ et en considérant $n = |a + ib|^2$ et $m = |c + id|^2$, montrer que le produit mn est un entier somme de deux carrés et en donner explicitement une décomposition en fonction de a, b, c et d .

2- On se propose de démontrer, pour tout entier n strictement positif, la proposition $\mathcal{P}(n)$ suivante :

$\mathcal{P}(n)$: « tout nombre premier qui divise $n^2 + 1$ est somme de deux carrés ».

Pour cela, on procède par récurrence sur n .

a) Montrer que $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ et $\mathcal{P}(3)$ sont vraies.

b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. On suppose la proposition $\mathcal{P}(i)$ vraie pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n - 1$ et on considère un nombre premier p qui divise $n^2 + 1$.

i) Montrer que p est différent de n .

ii) On suppose $p < n$. Montrer que p divise $(n - p)^2 + 1$.

iii) On suppose $p > n$ et $p < n^2 + 1$. Montrer que les autres diviseurs premiers de $n^2 + 1$ sont strictement inférieurs à n . En déduire, en discutant selon la parité de n , que p est congru à 1 modulo 4.

iv) Montrer que p est somme de deux carrés.

c) Conclure.

3- a) Pour s entier supérieur ou égal à 2, on note p_s le plus petit diviseur premier du nombre $(s!)^2 + 1$.

Montrer que $p_s > s$ et que p_s est somme de deux carrés.

b) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers somme de deux carrés.

4- a) Montrer qu'il existe une infinité de couples d'entiers (n, k) avec $1 \leq k < n$ tels que $L(n, k)$ soit rationnel.

b) Déterminer un entier n tel qu'il existe plusieurs valeurs de k pour lesquelles $L(n, k)$ est rationnel.

*

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2005

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte quatre exercices indépendants.

Il n'est pas obligatoire de traiter systématiquement les questions dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement la question traitée en respectant l'indexation du texte.

Pour poursuivre, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Exercice 1

Dans cet exercice, on se place dans un plan \mathcal{P} muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

I- Préliminaires de géométrie élémentaire

1. Soit D et D' deux droites sécantes en un point I , s et s' les symétries axiales respectivement d'axes D et D' .

Montrer que $s' \circ s$ est une rotation, et déterminer ses éléments caractéristiques.

2. Soit ABC un triangle équilatéral direct, O le centre du cercle circonscrit à ABC .

On désigne par s_1 , s_2 et s_3 les symétries axiales respectivement par rapport aux droites (OA) , (OB) et (OC) et par r la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Soit M un point du plan, $M_1 = s_1(M)$, $M_2 = s_2(M)$, $M_3 = s_3(M)$.

- (a) Montrer que : $M_2 = r^2(M_1)$ et $M_3 = r(M_1)$ (où r^2 désigne $r \circ r$).
- (b) Quelle est la nature du triangle $M_1M_2M_3$?

II- Nombres complexes

L'affixe du vecteur \vec{u} étant 1 et celle du vecteur \vec{v} étant notée i (avec $i^2 = -1$), comme il est d'usage,

on pose $j = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On considère, dans le plan \mathcal{P} , les points O , A , B et C d'affixes respectives 0, 1, j et j^2 .

On désigne par s_1 , s_2 et s_3 les symétries axiales respectivement par rapport aux droites (OA) , (OB) et (OC) .

Soit enfin M un point quelconque du plan \mathcal{P} , d'affixe $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Soit $M_1 = s_1(M)$, $M_2 = s_2(M)$, $M_3 = s_3(M)$.

Montrer que les points M_1 , M_2 et M_3 ont pour affixes respectives \bar{z} , $j^2\bar{z}$ et $j\bar{z}$.

2. Soit M_4 la symétrique de M par rapport à la droite (BC) .

Montrer que le point J d'affixe $-\frac{1}{2}$ est le milieu du segment $[M_1M_4]$.

En déduire l'affixe de M_4 .

3. (a) À quelle condition les points M_2 , M_3 et M_4 sont-ils alignés ?

On suppose désormais que M_2 , M_3 et M_4 ne sont pas alignés; on note Ω le centre du cercle circonscrit au triangle $M_2M_3M_4$.

- (b) Justifier le fait que Ω appartient à la droite (OM_1) .

Dans la suite, on note son affixe $\lambda e^{-i\theta}$, avec λ réel.

- (c) Montrer que : $\lambda = -\frac{1 + 2\rho \cos \theta}{\rho + 2 \cos \theta}$.

(d) En déduire une expression du rayon R du cercle circonscrit au triangle $M_2M_3M_4$.

(e) Montrer que ce rayon est égal à 1 si et seulement si : « $\rho = 1$ ou $(\rho + \cos \theta)^2 = 1 - 3 \cos^2 \theta$ ».

4. Montrer que le cercle circonscrit au triangle $M_2M_3M_4$ est de même rayon que le cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$ si et seulement si M appartient à un ensemble Γ que l'on précisera géométriquement. Que peut-on dire dans ce cas des deux cercles circonscrits ?

III- Étude de fonctions

On considère l'application s définie pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$ par $s(\theta) = 1 - 3 \cos^2 \theta$.

1. (a) Étudier les variations de s . Préciser ses extremums, les valeurs de θ pour lesquelles $s(\theta)$ est nul, l'ensemble E des $\theta \in [-\pi, \pi]$ tels que $s(\theta) \geq 0$.

- (b) En déduire l'allure de la courbe décrite par le point d'affixe $s(\theta)e^{i\theta}$ lorsque θ varie.
 On précisera les points d'intersection avec les axes et éventuellement quelques points particuliers (pour $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$, par exemple).
 On pourra aussi justifier les symétries de la courbe.
2. Soit la fonction r_1 définie pour tout $\theta \in E$ par $r_1(\theta) = \sqrt{1 - 3 \cos^2 \theta} - \cos \theta$.
- (a) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles $r_1(\theta)$ est nul.
 (b) En déduire l'allure de la courbe décrite par le point d'affixe $r_1(\theta)e^{i\theta}$ lorsque θ varie.
3. Dessiner, sans chercher à être extrêmement précis, l'ensemble des points M tels que le triangle $M_2M_3M_4$ défini à la partie II ait un cercle circonscrit de rayon 1.

Exercice 2

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie et continue sur l'intervalle $[0, 1]$.

On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et que pour tout x réel de l'intervalle $\left[0, \frac{7}{10}\right]$, $f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x)$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins sept solutions sur $[0, 1]$.
2. Donner un exemple de fonction f vérifiant les hypothèses ; on pourra se contenter d'une représentation graphique claire.

Exercice 3

On considère dans le plan trois points A_0, B, C non alignés.

1. On désigne par A_1 le centre du cercle inscrit dans le triangle A_0BC (c'est-à-dire le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle A_0BC).
 On poursuit le processus en considérant A_2 , centre du cercle inscrit dans le triangle A_1BC , etc. Ainsi, pour tout i entier naturel, A_{i+1} est le centre du cercle inscrit dans le triangle A_iBC .
 Démontrer qu'il existe un point A , limite de la suite (A_n) , c'est-à-dire tel que AA_n tende vers 0 et préciser sa position.
2. Que devient le résultat précédent si, à chaque étape, pour $i = 0, 1, 2, \dots$, on prend pour A_{i+1} l'orthocentre du triangle A_iBC au lieu du centre du cercle inscrit ?

Exercice 4

Si m_1 et m_2 sont deux entiers tels que $m_1 \leq m_2$, on désigne par $\llbracket m_1, m_2 \rrbracket$ l'ensemble des entiers k tels que $m_1 \leq k \leq m_2$.

Si a, b et n sont trois entiers, on note $a = b \pmod{n}$ (modulo n) lorsque a et b sont congrus modulo n , c'est-à-dire lorsque $b - a$ est multiple de n .

Dans tout cet exercice, p désigne un nombre premier.

I- Définition du logarithme discret

Pour tout $A \in \mathbb{N}$, on note $(A \bmod p)$ le reste de la division euclidienne de A par p . C'est l'unique entier de $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$ congru à A modulo p .

Un entier $x \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ est appelé une racine primitive modulo p lorsque l'ensemble des $(x^k \bmod p)$ pour $k \in \mathbb{N}$ est l'ensemble $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$, c'est-à-dire lorsque les puissances de x , calculées modulo p , décrivent $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$ tout entier.

Ainsi pour $p = 5$:

- 1 n'est pas racine primitive modulo 5 puisque ses puissances valent toujours 1.
- 2 est racine primitive modulo 5 puisque :
 $(2^0 \bmod 5) = 1, (2^1 \bmod 5) = 2, (2^2 \bmod 5) = 4, (2^3 \bmod 5) = 3$.
- 3 est racine primitive modulo 5 puisque :
 $(3^0 \bmod 5) = 1, (3^1 \bmod 5) = 3, (3^2 \bmod 5) = 4, (3^3 \bmod 5) = 2$.

- 4 n'est pas racine primitive modulo 5 puisque $(4^k \bmod 5)$, $k \in \mathbb{N}$, vaut alternativement 1 ou 4.

1. On prend dans cette question $p = 7$. Déterminer les racines primitives modulo 7.

On admet désormais que, quel que soit le nombre premier p , il existe au moins une racine primitive modulo p . Dans la suite, on désigne par g une racine primitive modulo p .

2. (a) Montrer que l'ensemble des $(g^k \bmod p)$ pour $k \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket$ est $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$.

(b) Soit $A \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$.

Justifier l'existence et l'unicité d'un entier $a \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket$ tel que $A = (g^a \bmod p)$.

a est appelé logarithme de base g modulo p de A ; on le note $\ell(A)$.

(c) Soit b un entier naturel congru à a modulo $p-1$. Calculer $(g^b \bmod p)$.

3. Une solution élémentaire pour déterminer $\ell(A)$ consiste à calculer les entiers $(g^k \bmod p)$, pour $k = 0, 1, \dots$, jusqu'à trouver A .

(a) Décrire un algorithme qui réalise ce travail.

(b) Dans cette question, on prend : $p = 53$, $A = 40$, $g = 20$ (on admettra que 20 est bien une racine primitive modulo 53).

En programmant l'algorithme précédent sur une calculatrice, déterminer $\ell(A)$.

II- Calcul du logarithme discret par la méthode d'Adleman

Cette partie exploite le fait que la connaissance des logarithmes de quelques entiers permet de déterminer rapidement le logarithme de tout entier.

1. On se place dans le cas $p = 113$, $g = 55$ et on donne $\ell(2) = 60$, $\ell(3) = 5$. Trouver $\ell(54)$.

On suppose choisis, pour toute la suite de cette partie, des nombres premiers distincts p_1, \dots, p_n strictement inférieurs à p et des entiers a_1, \dots, a_n tels que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les facteurs premiers de $(g^{a_i} \bmod p)$ appartiennent à $\{p_1, \dots, p_n\}$.

Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a ainsi une relation $(g^{a_i} \bmod p) = p_1^{e_{i,1}} p_2^{e_{i,2}} \dots p_n^{e_{i,n}}$ où les $e_{i,j}$, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, sont des entiers naturels.

2. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$a_i = e_{i,1}\ell(p_1) + e_{i,2}\ell(p_2) + \dots + e_{i,n}\ell(p_n) \pmod{(p-1)}.$$

3. On prend dans cette question $p = 53$, $g = 20$, $n = 2$, $p_1 = 2$, $p_2 = 5$.

(a) À l'aide de g et g^3 , déterminer $\ell(2)$ et $\ell(5)$.

(b) En déduire $\ell(40)$.

(c) Combien d'entiers de $\llbracket 1, 52 \rrbracket$ peuvent-ils s'écrire sous la forme $2^\alpha 5^\beta$, avec α et β entiers naturels ?

4. Soit $A \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$.

(a) Montrer que l'ensemble des $(g^s A \bmod p)$ pour $s \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket$ est $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$.

(b) On suppose connu $s \in \mathbb{N}$ tel que $(g^s A \bmod p)$ se factorise à l'aide de p_1, \dots, p_n uniquement. Si on suppose connus $\ell(p_1), \dots, \ell(p_n)$, en déduire $\ell(A)$.

(c) Avec $p = 53$ et $g = 20$, déterminer $\ell(30)$.

5. On revient au cas général.

(a) Quel est le nombre d'entiers de $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$ qui sont une puissance de p_1 ?

(b) En déduire la probabilité pour qu'un entier $s \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket$ soit tel que $(g^s A \bmod p)$ soit une puissance de p_1 .

(c) Montrer que la probabilité P pour qu'un entier $s \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket$ soit tel que $(g^s A \bmod p)$ se factorise à l'aide de p_1 et p_2 uniquement vérifie :

$$\frac{(\ln(p-1))^2}{2(p-1)(\ln p_1)(\ln p_2)} \leq P \leq \frac{1}{p-1} \left(\frac{\ln(p-1)}{\ln p_1} + 1 \right) \left(\frac{\ln(p-1)}{\ln p_2} + 1 \right).$$

(d) Généraliser le résultat au cas de n nombres premiers p_1, \dots, p_n .

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2006

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

L'énoncé comporte trois exercices indépendants.

Il n'est pas obligatoire de traiter les exercices dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement l'exercice et la question traitée en respectant l'indexation du texte.

Pour poursuivre la résolution d'un exercice, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Exercice 1

Si n est un entier naturel strictement positif, on note $\overline{a_i a_{i-1} \dots a_1 a_0}$ son écriture décimale. On a donc $n = 10^i a_i + 10^{i-1} a_{i-1} + \dots + 10 a_1 + a_0$, les entiers $a_j, 0 \leq j \leq i$, sont compris entre 0 et 9, et $a_i \neq 0$.

On désigne par q un entier compris, au sens large, entre 1 et 9, on pose $p = 10q - 1$ et l'on considère la fonction f_q qui à l'entier $n = \overline{a_i a_{i-1} \dots a_1 a_0}$ associe l'entier

$$f_q(n) = \overline{a_i a_{i-1} \dots a_1} + q a_0 \quad (\text{si } i = 0, \text{ alors } f_q(n) = q a_0).$$

Enfin, l'entier q étant fixé, on associe à tout entier n la suite (n_k) définie par les relations $n_0 = n$ et, pour tout entier naturel k , $n_{k+1} = f_q(n_k)$. Par exemple, si l'on fixe $q = 5$, la suite associée à 4 907 est 4 907, 525, 77, 42, 14, 21, 7, 35, 28, 42, 14,...

1. Vérifier que $f_q(n) = \frac{n + p a_0}{10}$. En déduire que $f_q(p) = p$.
2. (a) Montrer que, si $m > p$, alors $f_q(m) < m$.
(b) En déduire que pour tout entier n , il existe un entier j tel que $n_j \leq p$.
3. (a) Montrer que, si $m < p$, alors $f_q(m) < p$.
(b) En déduire que pour tout entier n , la suite (n_k) est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il existe des entiers k et T ($T > 0$) tels que $n_{j+T} = n_j$ pour tout $j \geq k$.
4. Établir que, pour tout entier n , $f_q(n)$ est congru à $q \times n$ modulo p .
5. Pour quelles valeurs de q la fonction f_q a-t-elle des points fixes (c'est-à-dire des entiers m tels que $f_q(m) = m$) autres que p ? Quels sont alors ces points fixes?
6. Montrer que, pour des choix convenables de q , l'étude de la suite (n_k) associée à un entier n fournit des critères de divisibilité de n par 9, 19, 29, 13, 49 et 7. Énoncer ces critères.

Exercice 2

Partie I

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, soit \mathcal{H} l'ensemble d'équation $(1-x)(1-y) = a$ et soit \mathcal{H}_1 l'ensemble des points de coordonnées (x, y) de \mathcal{H} tels que $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$.

1. Préciser la nature de \mathcal{H} . Représenter \mathcal{H} et \mathcal{H}_1 .
2. Montrer que, quand le point de coordonnées (x, y) décrit \mathcal{H}_1 , la somme $x + y$ décrit un intervalle que l'on précisera.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs de $x^2 + y^2$ quand le point de coordonnées (x, y) décrit \mathcal{H}_1 .
Indication. On pourra montrer que si (x, y) sont les coordonnées d'un point de \mathcal{H} et si $s = x + y$, alors

$$x^2 + y^2 = s^2 - 2s + 2 - 2a.$$

Les résultats des deux questions suivantes n'interviennent pas dans le reste de l'exercice.

4. Déterminer, en discutant selon la valeur de a , le nombre de points d'intersection de \mathcal{H}_1 et du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}(1 - \sqrt{a})$.
5. Déterminer l'aire du domaine limité par \mathcal{H}_1 et les axes de coordonnées.

En déduire, pour $a \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$, l'inégalité

$$\frac{\pi}{2}(1 - \sqrt{a})^2 \leq 1 - a + a \ln a.$$

L'équation

$$\frac{\pi}{2}(1 - \sqrt{a})^2 = 1 - a + a \ln a$$

admet-elle une solution appartenant à $]0, 1[$?

Partie II

Étant donné deux points distincts P et Q du plan, on note $]PQ[$ l'ensemble des points du segment $[PQ]$ distincts de P et Q .

Dans le plan, on considère un triangle ABC et on désigne par h la longueur de la hauteur issue de A .

On note Γ le cercle inscrit dans le triangle, I son centre et r son rayon.

On rappelle que I est le point d'intersection des bissectrices intérieures de ABC , c'est-à-dire le point intérieur au triangle vérifiant $\widehat{IAB} = \widehat{IAC}$, $\widehat{IBC} = \widehat{IBA}$ et $\widehat{ICA} = \widehat{ICB}$.

On note Δ_B (respectivement Δ_C) la droite passant par B et orthogonale à (BI) (respectivement passant par C et orthogonale à (CI)).

1. Soit J le point d'intersection de Δ_B et Δ_C .
Montrer que les distances de J aux trois droites (AB) , (BC) , (CA) sont égales. En déduire que J appartient à la droite (AI) et est le centre d'un cercle Γ' tangent aux droites (AB) , (BC) , (CA) .
Le cercle Γ' est le *cercle exinscrit* dans l'angle A du triangle ABC .
2. En examinant les angles des triangles en question, montrer que AIC est semblable à ABJ et que AIB est semblable à ACJ .
En déduire $AI \cdot AJ = AB \cdot AC$.
3. Soit f l'homothétie de centre A qui envoie J sur I .
Préciser l'image par f du cercle Γ' et de la droite (BC) . En déduire

$$\frac{AI}{AJ} = \frac{h - 2r}{h}.$$

Soit D un point de $]BC[$.

On note I_1 et I_2 les centres des cercles inscrits dans les triangles ABD et ACD et on note r_1 et r_2 leurs rayons ; on note enfin J_1 et J_2 les centres des cercles exinscrits dans l'angle A des triangles ABD et ACD .

4. Montrer que les triangles AI_1J_2 et AIC sont semblables. De même, les triangles AI_2J_1 et AIB sont semblables.
5. En exprimant $\frac{AI_1}{AJ_2} \frac{AI_2}{AJ_1}$ de deux façons différentes, établir la relation

$$h(h - 2r) = (h - 2r_1)(h - 2r_2).$$

Partie III

On conserve les notations ABC , h , r données dans la deuxième partie.

Dans les questions **1** et **2**, pour tout point D de $]BC[$, les rayons des cercles inscrits dans les triangles ABD et ACD sont notés $r_1(D)$ et $r_2(D)$, ou simplement r_1 et r_2 s'il n'y a pas d'ambiguïté.

1. Montrer qu'il existe un unique point E de $]BC[$ tel que $r_1(E) = r_2(E)$.
2. (a) Montrer que E est le point de $]BC[$ pour lequel $r_1 + r_2$ est maximal.
(b) Montrer que E est le point de $]BC[$ pour lequel $r_1^2 + r_2^2$ est minimal si et seulement si $8r \leq 3h$.
3. Dans cette question, n désigne un entier naturel non nul et on note $N = 2^n$.

On considère $N + 1$ points distincts $D_0, D_1, \dots, D_{N-1}, D_N$ placés dans cet ordre sur le segment $[BC]$: autrement dit, pour tout entier i de $[1, N - 1]$, le point D_i appartient à $]D_{i-1}D_{i+1}[$.

On suppose de plus que $D_0 = B$ et $D_N = C$.

Pour tout entier i de $[1, N]$, on note r_i le rayon du cercle inscrit dans le triangle $AD_{i-1}D_i$.

- (a) L'entier n étant donné, déterminer la valeur maximale de $r_1 + r_2 + \dots + r_N$ quand D_1, \dots, D_{N-1} varient dans $]BC[$ en respectant les conditions décrites ci-dessus.

On montrera, par exemple par récurrence sur n , que cette valeur maximale est atteinte lorsque $r_1 = r_2 = \dots = r_N$.

- (b) On note u_n la valeur maximale trouvée au (a).

Exprimer u_n en fonction de r , h , n .

Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on exprimera en fonction de r et h .

- (c) On suppose $8r \leq 3h$.

L'entier n étant donné, déterminer la valeur minimale v_n de $r_1^2 + \dots + r_N^2$.

Montrer que la suite $(2^n v_n)$ converge.

Exercice 3

Le but de cet exercice est d'étudier les intersections d'un cube avec des plans passant par son centre, et d'encadrer l'aire des sections planes ainsi obtenues.

Partie I. Une formule pour calculer des aires planes

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit \mathcal{P} un plan, de vecteur normal unitaire \vec{n} . On pose $\vec{n} \cdot \vec{k} = \cos \gamma$, et l'on désigne par \mathcal{P}_0 le plan de repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. On suppose dans cette question que \mathcal{P} et le plan \mathcal{P}_0 ne sont pas parallèles.
Soit \mathcal{D} la droite d'intersection des plans \mathcal{P} et \mathcal{P}_0 , A et B des points de \mathcal{D} , C un point de \mathcal{P} , C' le projeté orthogonal de C sur le plan \mathcal{P}_0 et enfin H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) .
 - (a) Justifier le fait que H est également le projeté orthogonal de C' sur la droite (AB) .
 - (b) En déduire une relation entre les longueurs CH , $C'H$ et l'angle γ , puis entre les aires S et S' des triangles ABC et ABC' .

- (c) Soit Q un polygone contenu dans le plan \mathcal{P} , Q' son projeté orthogonal sur le plan \mathcal{P}_0 , S et S' leurs aires respectives. Montrer que

$$S' = S |\cos \gamma|.$$

2. Que dire dans le cas particulier où \mathcal{P} et le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) sont parallèles ?
3. On pose $\vec{n} \cdot \vec{i} = \cos \alpha$ et $\vec{n} \cdot \vec{j} = \cos \beta$.
 - (a) Montrer que les valeurs absolues des coordonnées de \vec{n} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont $|\cos \alpha|$, $|\cos \beta|$ et $|\cos \gamma|$.
 - (b) Soit Q un polygone contenu dans le plan \mathcal{P} , S son aire, S' , S'' et S''' les aires de ses projetés respectifs sur les plans de repères (O, \vec{i}, \vec{j}) , (O, \vec{j}, \vec{k}) et (O, \vec{k}, \vec{i}) .
Montrer que : $S^2 = S'^2 + S''^2 + S'''^2$.

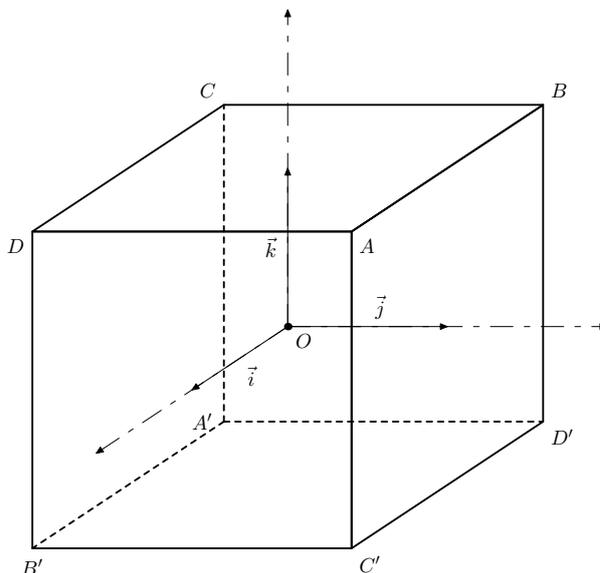
Partie II. Sections planes d'un cube

A. Généralités

L'espace étant rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le cube \mathcal{H} de centre O représenté ci-contre, dont les sommets ont pour coordonnées :

A	$(1, 1, 1)$
B	$(-1, 1, 1)$
C	$(-1, -1, 1)$
D	$(1, -1, 1)$
A'	$(-1, -1, -1)$
B'	$(1, -1, -1)$
C'	$(1, 1, -1)$
D'	$(-1, 1, -1)$

ainsi qu'un plan \mathcal{P} passant par O , dont l'intersection avec \mathcal{H} est un polygone \mathcal{A} .



1. Montrer que \mathcal{P} contient 0, 2 ou 4 sommets de \mathcal{H} .
2. Combien y a-t-il de plans \mathcal{P} contenant 4 sommets de \mathcal{H} ? Déterminer dans ce cas la nature de \mathcal{A} ainsi que son aire.
3. On suppose que \mathcal{P} contient exactement deux sommets de \mathcal{H} , A et A' .
 - (a) Montrer que \mathcal{P} rencontre une des trois arêtes $[BC]$, $[CD]$ ou $[BD']$.
 - (b) On suppose que \mathcal{P} rencontre l'arête $[BC]$ en un point N de coordonnées $(-1, y, 1)$. Déterminer, selon la valeur de y , la nature exacte de \mathcal{A} et calculer son aire.
 - (c) Donner, dans ce cas de figure, le meilleur encadrement possible de l'aire de \mathcal{A} lorsque y varie.
4. On suppose que \mathcal{P} ne contient aucun sommet de \mathcal{H} .
 - (a) Montrer que chacun des demi-espaces limités par \mathcal{P} contient exactement 4 sommets de \mathcal{H} .
 - (b) Prouver que \mathcal{P} rencontre 4 ou 6 arêtes de \mathcal{H} .

Dans toute la suite on ne considère que des plans \mathcal{P} ne contenant aucun sommet de \mathcal{H} .

B. Plans \mathcal{P} rencontrant 4 arêtes de \mathcal{H}

On considère un plan \mathcal{P} rencontrant l'arête $[AB]$ en un point M de coordonnées $(u, 1, 1)$ et l'arête $[CD]$ en un point N de coordonnées $(v, -1, 1)$.

1. Déterminer, selon la valeur de u et v , la nature exacte de \mathcal{A} et calculer son aire.
2. Donner, dans ce cas de figure, le meilleur encadrement possible de l'aire de \mathcal{A} lorsque u et v varient.

C. Plans \mathcal{P} rencontrant 6 arêtes de \mathcal{H}

On considère un plan \mathcal{P} rencontrant l'arête $[AB]$ en un point M de coordonnées $(x, 1, 1)$ et l'arête $[BC]$ en un point N de coordonnées $(-1, y, 1)$.

1. Montrer que \mathcal{P} rencontre l'arête $[CA']$ en un point R de coordonnées $(-1, -1, z)$. Donner, sur un croquis à main levée, la construction géométrique du point R , les points M et N étant donnés.
2. Établir que les trois nombres réels x , y et z sont liés par la relation :

$$(1) \quad x + y + z + xyz = 0.$$

3. Dessiner le polygone \mathcal{A} pour $x = y = z = 0$ et calculer son aire.
4. Montrer que l'aire S de \mathcal{A} vérifie la relation :

$$S^2 = (3 - x + y + xy)^2 + (3 + x - z + xz)^2 + (3 - y + z + yz)^2.$$

On pose désormais :

$$f(x, y, z) = (3 - x + y + xy)^2 + (3 + x - z + xz)^2 + (3 - y + z + yz)^2.$$

5. Déterminer l'ensemble des valeurs de S lorsque les points M et N varient de manière que $x + y = 0$.
6. Étant donné des réels strictement positifs u , v et w , on pose $x = \frac{u-1}{u+1}$, $y = \frac{v-1}{v+1}$ et $z = \frac{w-1}{w+1}$.

- (a) Vérifier que, lorsque le triplet (x, y, z) vérifie la relation (1), on a $uvw = 1$ et $z = \frac{1-uv}{1+uv}$.

- (b) On pose

$$g(u, v) = f\left(\frac{u-1}{u+1}, \frac{v-1}{v+1}, \frac{1-uv}{1+uv}\right)$$

et l'on admet que l'on a la relation :

$$g(u, v) = 32 \frac{(1+v+uv)^2(1+u+u^2+uv+u^2v+u^2v^2)}{(1+u)^2(1+v)^2(1+uv)^2}.$$

Montrer que l'on a, pour tout couple (u, v) de réels strictement positifs, l'encadrement

$$24 \leq g(u, v) \leq 32.$$

En déduire, dans ce cas de figure, le meilleur encadrement possible de l'aire de \mathcal{A} lorsque x et y varient.

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2007

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

L'énoncé comporte trois exercices indépendants.

Il n'est pas obligatoire de traiter les exercices dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement l'exercice et la question traitée en respectant l'indexation du texte.

Pour poursuivre la résolution d'un exercice, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Exercice 1

On appelle fonctions de type T_0 les fonctions « trinômes » sur $[-1, 1]$, définies par :

$$t : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto t(x) = ax^2 + bx + c,$$

a, b, c étant des réels quelconques. Pour tout entier naturel non nul n , on appelle fonctions de type T_n les fonctions de la forme $f + \lambda|g|$, λ étant un réel quelconque et f, g des fonctions quelconques de type T_{n-1} .

1. Établir que la fonction φ , définie par $\varphi(x) = 0$ pour tout x de $[-1, 0]$ et $\varphi(x) = x$ pour tout x de $[0, 1]$, est de type T_1 .
2. On considère deux fonctions trinômes t_1 et t_2 telles que $t_1(0) = t_2(0)$ et on définit la fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ telle que :
Pour tout réel x de $[-1, 0]$, $f(x) = t_1(x)$ et pour tout réel x de $[0, 1]$, $f(x) = t_2(x)$.
Démontrer qu'il existe un entier naturel N tel que la fonction f soit de type T_N .

Exercice 2

On considère dans cet exercice tous les tableaux carrés à 9 cases dans lesquelles sont placés dans un certain ordre tous les entiers de 1 à 9. Par exemple :

1	8	7
9	2	4
6	5	3

À un tel tableau on associe les produits des éléments de ses lignes (56, 72, 90 dans l'exemple ci-dessus) et les produits des éléments de ses colonnes (54, 80, 84 dans l'exemple ci-dessus).

1. (a) Étant donné un tel tableau, montrer qu'il a au moins une ligne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 72.
(b) Donner un tableau de ce type dont les trois lignes ont un produit de leurs éléments inférieur ou égal à 72.
2. Étant donné un tableau de ce type, montrer qu'il a au moins une ligne ou une colonne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 90.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, étant donné un triangle non aplati ABC , on note a , b et c les longueurs respectives des côtés BC , CA et AB . On dira que ce triangle est de type \mathcal{W} si ses médianes issues de A et B sont perpendiculaires.

Partie I : Géométrie

1. Montrer qu'il existe des triangles ABC tels que l'on ait les relations :

$$c^2 = \frac{b^2}{2} = \frac{a^2}{3}.$$

Établir qu'un tel triangle est rectangle en A et qu'il est de type \mathcal{W} .

2. Dans cette question on se fixe des points A et B et on considère l'ensemble Γ des points C tels que le triangle ABC soit de type \mathcal{W} .

- (a) Déterminer l'ensemble des points G , isobarycentres de A , B et C , lorsque C décrit Γ .
(b) En déduire l'ensemble Γ .

- (c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par le rapport $\frac{b}{c}$.

- (d) Représenter l'ensemble des points H , orthocentres des triangles ABC , lorsque C décrit Γ (on se placera dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ tel que A et B aient pour coordonnées respectives $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ et l'on déterminera une fonction f telle que l'ensemble des points H soit la réunion des deux courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = -f(x)$).

3. Dans cette question on se fixe des points A et C et on considère l'ensemble Γ' des points B tels que le triangle ABC soit de type \mathcal{W} .

- (a) Déterminer l'ensemble Γ' .

- (b) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par le rapport $\frac{a}{b}$.

- (c) Déterminer les triangles ABC de type \mathcal{W} ayant un rayon du cercle circonscrit minimal.

- (d) Représenter l'ensemble des points H , orthocentres des triangles ABC , lorsque B décrit Γ' (on se placera dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ tel que A et C aient pour coordonnées respectives $(-1, 0)$ et $(-5, 0)$).

4. (a) Montrer qu'un triangle ABC est de type \mathcal{W} si, et seulement si, l'on a la relation

$$(\star) \quad a^2 + b^2 = 5c^2.$$

- (b) Étant donné des réels strictement positifs a , b et c vérifiant la relation (\star) , donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le rapport $\frac{a}{b}$ pour que a , b et c soient les longueurs des côtés d'un triangle de type \mathcal{W} .

Partie II : Arithmétique

A. Deux familles de triangles

Dans la suite de l'exercice, on se propose de rechercher les triangles de type \mathcal{W} dont les côtés ont des longueurs entières, en commençant par rechercher l'ensemble \mathcal{T} des triplets (a, b, c) d'entiers naturels strictement positifs vérifiant la relation (\star) .

On remarque que pour qu'un triplet (a, b, c) d'entiers strictement positifs soit élément de \mathcal{T} , il suffit qu'il existe un entier strictement positif m tel que le triplet (ma, mb, mc) soit élément de \mathcal{T} , de sorte qu'on peut se limiter à rechercher l'ensemble \mathcal{T}_1 des éléments de \mathcal{T} sans facteur premier commun.

- (a) Montrer que si (a, b, c) est élément de \mathcal{T}_1 alors les entiers a , b et c sont premiers entre eux deux à deux.
(b) Établir que si (a, b, c) est élément de \mathcal{T}_1 alors a et b sont de parités différentes.
(c) Montrer que si (a, b, c) est élément de \mathcal{T}_1 alors a et b ne sont divisibles ni par 3, ni par 4, ni par 5.
(d) Soit (a, b, c) un élément de \mathcal{T}_1 . Montrer que $b^2 - 4a^2$ et $a^2 - 4b^2$ sont des multiples de 5.

En déduire qu'il existe un couple d'entiers (α, β) tels que l'on ait
$$\begin{cases} 2a + b &= 5\alpha \\ -a + 2b &= 5\beta \end{cases}$$
 ou
$$\begin{cases} 2a - b &= 5\alpha \\ a + 2b &= 5\beta \end{cases}$$
. Vérifier alors que l'on a $\alpha^2 + \beta^2 = c^2$, et que α et β sont premiers entre eux.

- (e) Si α et β sont des entiers premiers entre eux, les entiers a et b qui leur sont associés par les relations ci-dessus sont-ils premiers entre eux ?

On admet désormais le résultat suivant : les triplets (x, y, z) d'entiers strictement positifs sans facteur premier commun, vérifiant la relation $x^2 + y^2 = z^2$ et tels que y soit pair, sont donnés par $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ et $z = u^2 + v^2$, où u et v sont des entiers strictement positifs premiers entre eux, de parités différentes et tels que $u > v$, déterminés de manière unique.

- On dira qu'un triangle est de type \mathcal{W}_e s'il est de type \mathcal{W} et si les longueurs a , b et c de ses côtés sont des entiers sans facteur premier commun. Montrer que pour tout triangle de type \mathcal{W}_e , il existe des entiers strictement positifs u et v , premiers entre eux, de parités différentes et vérifiant $u > v$, tels que l'une des deux relations suivantes soit vérifiée :

$$(1) \quad (a, b, c) = (2(u^2 - uv - v^2), u^2 + 4uv - v^2, u^2 + v^2)$$

$$(2) \quad (a, b, c) = (2(u^2 + uv - v^2), -u^2 + 4uv + v^2, u^2 + v^2)$$

- Déterminer les ensembles de couples (u, v) d'entiers positifs tels que la relation (1) (respectivement (2)) conduise à un triangle de type \mathcal{W}_e .
- Établir qu'un triangle de type \mathcal{W}_e est donné par une seule des deux relations (1) ou (2).
On classe ainsi les triangles de type \mathcal{W}_e en deux catégories disjointes, que l'on notera \mathcal{W}_1 et \mathcal{W}_2 .
- Donner les longueurs des côtés des triangles de type \mathcal{W}_e dont le « petit » côté c a une longueur inférieure ou égale à 50.

B. Entiers de la forme $u^2 - uv - v^2$ et leurs diviseurs

On se propose d'étudier les facteurs premiers supérieurs ou égaux à 7 des entiers a et b , longueurs des côtés BC et CA d'un triangle de type \mathcal{W}_e .

1. On note ω et ω' les solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
Établir la relation $u^2 - uv - v^2 = (u - \omega v)(u - \omega' v)$. En déduire que l'ensemble des entiers de la forme $u^2 - uv - v^2$, où u et v sont des entiers relatifs arbitraires, est stable par multiplication.
Que peut-on dire de l'ensemble des entiers de la forme $u^2 + 4uv - v^2$, où u et v sont des entiers relatifs arbitraires?
2. Soit $p = 2q + 1$ un nombre premier strictement supérieur à 5 qui divise un entier de la forme $u^2 - uv - v^2$, où u et v sont des entiers relatifs premiers entre eux.
 - (a) Établir les congruences $(2u - v)^2 \equiv 5v^2$ modulo p et $(u + 2v)^2 \equiv 5u^2$ modulo p .
 - (b) En déduire que $5^q \equiv 1$ modulo p .
 - (c) Soit j un entier compris entre 1 et q , on note r_j le reste de la division de $5j$ par p . Si $r_j \leq q$ on pose $f(j) = r_j$ et $\varepsilon(j) = 1$; dans le cas contraire on pose $f(j) = p - r_j$ et $\varepsilon(j) = -1$, de sorte que l'on a dans tous les cas $1 \leq f(j) \leq q$ et $5j \equiv \varepsilon(j)f(j)$ modulo p .
Montrer que les entiers $f(1), f(2), \dots, f(q)$ sont deux à deux distincts et en déduire que le nombre d'entiers j , compris entre 1 et q et tels que $\varepsilon(j) = -1$, est pair.
 - (d) Pour tout nombre réel x , on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, à savoir le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .
Montrer que $\left\lfloor \frac{4p}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3p}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{p}{10} \right\rfloor$ est pair, puis que $p \equiv \pm 1$ modulo 10.
3. Soient (a, b, c) les longueurs des côtés d'un triangle de type \mathcal{W}_e .
 - (a) Montrer que tous les facteurs premiers impairs de a sont congrus à 1 ou à 9 modulo 10.
 - (b) Que peut-on dire des facteurs premiers de b ?

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2008

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

L'énoncé comporte trois exercices indépendants.

Il n'est pas obligatoire de traiter les exercices dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement l'exercice et la question traitée en respectant l'indexation du texte.

Pour poursuivre la résolution d'un exercice, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Exercice I

On munit le plan affine euclidien \mathcal{P} d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit S la courbe d'équation

$$y = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{2}.$$

1. Quelle est la nature géométrique de S ?
2. Pour tout couple (u, v) de nombre réels on note U le point de coordonnées (u, v) , et pour x dans \mathbf{R} on note $M(x)$ le point de S d'abscisse x . On pose

$$f_U(x) = UM(x), \quad g_U(x) = [f_U(x)]^2.$$

- (a) Calculer $g_U, g'_U,$ et g''_U . Résoudre l'équation $g''_U(x) = 0$.
 - (b) Donner le tableau des variations de f_U (on ne cherchera pas à calculer explicitement le ou les nombres réels où f_U admet un extremum relatif).
3. On dira qu'un cercle C de centre U et de rayon UM est tangent en M à S si M est un point de S et si les tangentes en M à C et S coïncident.

Soit U un point du plan n'appartenant pas à S , et soit a dans \mathbf{R} . Montrer que le cercle de centre U et de rayon $UM(a)$ est tangent en $M(a)$ à S si et seulement si $g'_U(a) = 0$.

4. (a) Montrer que tout point n'appartenant pas à S est centre d'au moins un et d'au plus 3 cercles tangents à S .
 - (b) Pour U n'appartenant pas à S , on note $n(U)$ le nombre de réels x pour lesquels le cercle de centre U et de rayon $UM(x)$ est tangent en $M(x)$ à S . Pour $1 \leq i \leq 3$, caractériser par une égalité ou une inégalité simple l'ensemble des points U n'appartenant pas à S tels que $n(U) = i$. On pourra être amené à discuter selon le signe de $81u^2 - 16v^3$.
Faire un croquis représentant S et les ensembles trouvés.
5. (a) Soit a dans \mathbf{R} . On note $D(a)$ la tangente en $M(a)$ à S . Donner une équation de $D(a)$.
 - (b) On note de nouveau U le point de \mathcal{P} de coordonnées (u, v) . Discuter en fonction de u et v l'ensemble des solutions a de l'équation $U \in D(a)$.
 - (c) On suppose que l'équation $U \in D(a)$ admet deux solutions distinctes a_1 et a_2 . Montrer que, si $UM(a_1) = UM(a_2)$, alors on a $u = 0$.
 - (d) Soit $U \in \mathcal{P}$. On suppose maintenant qu'il existe un cercle de centre U tangent à S en deux points distincts M et N de S . Montrer que les tangentes à S en M et N sont concourantes, et que si l'on note V leur point d'intersection on a $VM = VN$.
 - (e) Déterminer l'ensemble des points U n'appartenant pas à S pour lesquels il existe un cercle de centre U tangent à S en deux points distincts de S .

Exercice II

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On considère un triangle ABC dont aucun côté n'est parallèle à l'axe des ordonnées Oy . À toute droite \mathcal{D} non parallèle à Oy on associe les points A' , B' et C' intersections de \mathcal{D} avec les parallèles à Oy menées par A , B et C respectivement.
Montrer qu'il existe une unique droite \mathcal{D} pour laquelle la somme s des longueurs $AA' + BB' + CC'$ est minimale, et la caractériser.
2. Montrer qu'il existe une droite \mathcal{D} pour laquelle la somme s_1 des distances de A , B et C à \mathcal{D} est minimale. Montrer que cette droite est unique si ABC n'est pas isocèle, et la caractériser.

Exercice III

Les comptes « ronds »

Mon boucher ne compte jamais les centimes. Par exemple, j'ai pris 300g de filet à 34,3 euros le kilo, 240g de viande hachée à 8,6 euros le kilo, et 640g de blanc de poulet à 12,99 euros le kilo : j'ai payé 10 euros pour le filet, 2 euros pour la viande hachée et 8 euros pour le poulet, soit 20 euros en tout.

1. En ramassant deux tickets tombés par terre, le boucher lit :
 - 750g de côtelettes, 250g de rôti. Total : 18 euros ;
 - 250g de côtelettes, 500g de rôti. Total : 17 euros.Quels peuvent être les prix possibles pour le kilo de côtelettes et le kilo de rôti (on donnera toutes les solutions) ?
 2. Pourquoi est-ce que la donnée de tous les tickets de la journée ne peut en aucun cas permettre de déterminer le prix exact de chacun des produits vendus ?
-

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2009

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

L'énoncé comporte trois exercices indépendants.

Il n'est pas obligatoire de traiter les exercices dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement l'exercice et la question traitée en respectant l'indexation du texte.

Pour poursuivre la résolution d'un exercice, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Exercice I

Analyse

Le but de l'exercice est la recherche des fonctions f définies sur \mathbf{R} , à valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$, vérifiant pour tout réel x la relation $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$, telles que $f(0) = 1$ et que $\frac{1-f(x)}{x^2}$ admette une limite lorsque x tend vers 0, que l'on notera a .

On rappelle que tout x de $[-1, 1]$ s'écrit de façon unique $x = \cos(\theta)$ avec θ dans $[0, \pi]$.

1. (a) Vérifier $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} = \frac{1}{2}$. (On pourra utiliser une formule donnant $\cos(2\alpha)$).
- (b) Montrer, pour θ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, les relations : $\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin(\theta)$ et $\cos(\theta) \leq 1 - \frac{\theta^2}{\pi}$.
2. Soit f une fonction solution du problème On se donne un réel x et l'on pose, pour tout entier naturel n , $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos(\theta_n)$, avec θ_n dans $[0, \pi]$.
 - (a) Montrer que f est continue en 0 et que $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$.
 - (b) Vérifier l'existence d'un entier N tel que pour $n \geq N$ on ait $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.
 - (c) Établir que a est positif et que $f(x) = \cos(x\sqrt{2a})$.

Exercice II

Probabilités

Jouons aux dés

Je joue avec 4 dés à 20 faces. Chacun de ces dés, dont la forme est un icosaèdre, a ses faces numérotées de 1 à 20. Lorsqu'on le lance, chaque face apparaît sur le dessus avec la même probabilité de $\frac{1}{20}$.

Lorsque, parmi les 4 dés, une face apparaît au moins deux fois, je marque le nombre de points correspondant à cette face. Ainsi :

- avec la combinaison 3 - 4 - 12 - 16, je ne marque rien ;
- avec la combinaison 2 - 8 - 11 - 11, je marque 11 points ;
- avec la combinaison 4 - 9 - 9 - 9, je marque 9 points ;
- avec la combinaison 7 - 7 - 14 - 14, je marque 21 points ;
- avec la combinaison 2 - 2 - 2 - 2, je marque 2 points.

1. Quelle est la probabilité que je ne marque rien ?
2. Soit a compris entre 1 et 20. Déterminer pour tout $k \leq 4$ la probabilité d'avoir exactement k nombres a parmi les dés lancés.
3. Pour tout a on note X_a la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a au moins deux dés égaux à a parmi les quatre du lancer, et à 0 sinon.

Préciser la loi de X_a et exprimer le gain G à l'aide de ces variables.

Combien de points puis-je espérer en moyenne ?

4. Quelle est la probabilité que je marque exactement 8 points ?

On suppose à partir de maintenant qu'après avoir lancé les 4 dés, je sois autorisé à relancer entre 0 et 4 dés pour améliorer mon score.

5. J'ai obtenu 11 - 7 - 2 - 2. J'hésite entre tout relancer, garder le 11, et garder les deux 2. Que dois-je faire ?

6. On suppose que j'ai obtenu 4 dés différents $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$. Quels dés dois-je relancer ?

Exercice III Arithmétique

Étant donné deux entiers a et b , on désigne par $\llbracket a, b \rrbracket$ l'ensemble des nombres entiers compris au sens large entre a et b .

On considère une suite finie à n termes $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.

On dit qu'un entier strictement positif p est une période de U si l'on a $u_i = u_{i+p}$ pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n - p$. Une suite peut avoir plusieurs périodes.

1. On considère deux entiers strictement positifs a et b premiers entre eux.
 - (a) On définit r_k comme le reste de la division de ka par $a + b$. Montrer que lorsque k varie dans $\llbracket 1, a + b - 1 \rrbracket$, r_k prend toutes les valeurs de $\llbracket 1, a + b - 1 \rrbracket$.
 - (b) En déduire que si a et b sont périodes de U et si $n \geq a + b - 1$ alors U est constante.
2. On suppose à présent que a et b sont des entiers strictement positifs de PGCD d . Montrer que si U est périodique de périodes a et b et si $n \geq a + b - d$, alors U est de période d .
3. On considère deux entiers a et b strictement supérieurs à 1 et premiers entre eux.
 - (a) Montrer que l'on peut partager l'intervalle $\llbracket 1, a + b - 2 \rrbracket$ en deux sous-ensembles non vides A et B de manière que la suite V égale à 1 sur A et à 0 sur B soit de périodes a et b .
 - (b) Le partage obtenu à la question précédente est-il unique ? Montrer que, pour tout x de A , $a + b - 1 - x$ est dans A . Quelle propriété de la suite V traduit-on ainsi ?

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2010

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 HEURES

<p>La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.</p>

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.

Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

Exercice 1

Une configuration géométrique

Dans le plan, soit A, B, C trois points distincts tels que B soit sur le segment $[AC]$. Soit Γ le cercle de diamètre $[AC]$, γ le cercle de diamètre $[BC]$, et Δ la tangente en B à γ .

On suppose donné un cercle γ' qui est tangent extérieurement à γ en D , tangent à Δ en E , et tangent intérieurement à Γ en F .

1. Justifier que les droites Δ et (CF) ne sont pas parallèles.
On note G leur point d'intersection.
2. Montrer qu'il existe une homothétie de centre C qui transforme γ en Γ et une homothétie de centre F qui transforme Γ en γ' .
3. Déterminer les centres des homothéties qui transforment γ en γ' .
4. Soit I le milieu de $[BE]$.
Montrer que les points A, I, D sont alignés sur une droite orthogonale à (GD) .
5. Montrer que $AB = GD$.
6. Exprimer le rayon r' de γ' en fonction des rayons R et r de Γ et γ .

Exercice 2

Des configurations géométriques

Dans le plan, on considère n points ($n \geq 3$) tels que 3 quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. On construit des triangles de sommets choisis parmi ces points qui vérifient la condition suivante :

Deux triangles distincts quelconques ont zéro ou deux sommets en commun, jamais un seul.

On appelle $t(n)$ le nombre maximal de triangles que l'on peut ainsi former.

1. Vérifier que $t(4) = 4$ puis déterminer $t(5)$ et $t(6)$.
2. Montrer que $t(n) \leq n$, puis déterminer la valeur exacte de $t(n)$ en fonction de n .

On ajoute à présent la condition suivante sur les triangles que l'on cherche à former :

Deux triangles distincts quelconques n'ont pas de points intérieurs en commun, autrement dit ne peuvent pas se « chevaucher ». On note alors $u(n)$ le nombre maximal de triangles possibles (en tentant compte du positionnement des points initiaux).

3. Vérifier que $u(4) = 3$ et déterminer $u(5)$ et $u(6)$.
4. Déterminer $u(n)$ en fonction de n .

Problème

De la vie sur Mars !

La dernière sonde, envoyée sur Mars par l'Union Européenne, a enfin réussi à observer ce que l'on attendait depuis longtemps : des traces de vie sur la Planète Rouge ! Il s'agit évidemment d'une forme primitive de vie, et les êtres observés ne mesurent pas plus d'un millièème de millimètre, ce qui explique la difficulté que la sonde a eue à remarquer ce que nous appellerons des cellules.

Avec des informations aussi partielles, les scientifiques ont toutefois pu observer les faits suivants :

- Il y a trois espèces de cellules, que l'on désignera par A, B et C .
- La reproduction des cellules implique la participation de trois cellules « parents ».
- Il ne peut y avoir reproduction que lorsque les trois parents sont « compatibles », c'est-à-dire que au moins deux sont de la même espèce.

1. On a observé des proportions respectives a, b, c de cellules des différentes espèces, avec $a+b+c = 1$.
(a) Quelle est la probabilité p que trois cellules prises au hasard soient compatibles ?

- (b) Montrer que $p \geq \frac{7}{9}$. On pourra d'abord établir une inégalité à c fixé.

Les scientifiques ont établi que lorsque les trois espèces des parents sont les mêmes, la descendance est de la même espèce que ses parents. En revanche, lorsque deux parents sont d'une espèce α et que le troisième est d'une espèce β , les scientifiques hésitent entre deux modèles :

- Modèle 1 : le descendant est du type de l'espèce majoritaire α ,
- Modèle 2 : le descendant est du type de l'espèce minoritaire β .

Pour comparer ces modèles, on va estimer l'évolution des proportions de cellules des différentes espèces au cours du temps. On note $a_0 > b_0 > c_0$ les proportions des différentes espèces à la génération 0, et a_n, b_n, c_n les proportions des différentes espèces à la génération $n \in \mathbf{N}$. Pour déterminer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$, on prend trois cellules au hasard suivant les proportions a_n, b_n, c_n , et a_{n+1} sera la probabilité que la descendance soit de type A, sachant que les trois parents sont compatibles. Il en est de même pour b_{n+1} et c_{n+1} .

2. **Étude du premier scénario.** On suppose dans cette question que la génétique des cellules martiennes suit le premier scénario.

- (a) Vérifier que

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2(3 - 2a_n)}{1 - 6a_nb_nc_n}, \quad b_{n+1} = \frac{b_n^2(3 - 2b_n)}{1 - 6a_nb_nc_n}, \quad c_{n+1} = \frac{c_n^2(3 - 2c_n)}{1 - 6a_nb_nc_n}$$

- (b) On rappelle dans cette question et les suivantes que $a_0 > b_0 > c_0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $a_n > b_n > c_n$. En déduire que $a_n > \frac{1}{3}$, $b_n < \frac{1}{2}$ et $c_n < \frac{1}{3}$.

- (c) Vérifier que les suites $(a_n - b_n)_{n \geq 0}$ et $(a_n - c_n)_{n \geq 0}$ sont croissantes.

- (d) Prouver que $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ et $(c_n)_{n \geq 0}$ convergent et déterminer leurs limites.

3. **Étude du second scénario.** On suppose maintenant que c'est le deuxième scénario qui est privilégié.

- (a) Déterminer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n .

- (b) On suppose à partir de maintenant que $1 > a_0 > b_0 > c_0 > 0$. Montrer que pour tout n on a $1 > a_n > b_n > c_n > 0$.

- (c) On pose $f(c) = \frac{3}{2} - 3c + \frac{5}{2}c^2$ et $g(c) = 1 - 6c^2 + 12c^3$. Vérifier que $\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq \frac{f(c_n)}{g(c_n)}$.

- (d) Déterminer les limites de $(a_n), (b_n), (c_n)$.

- (e) Quel scénario vous semble le plus pertinent ?

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2011

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 HEURES

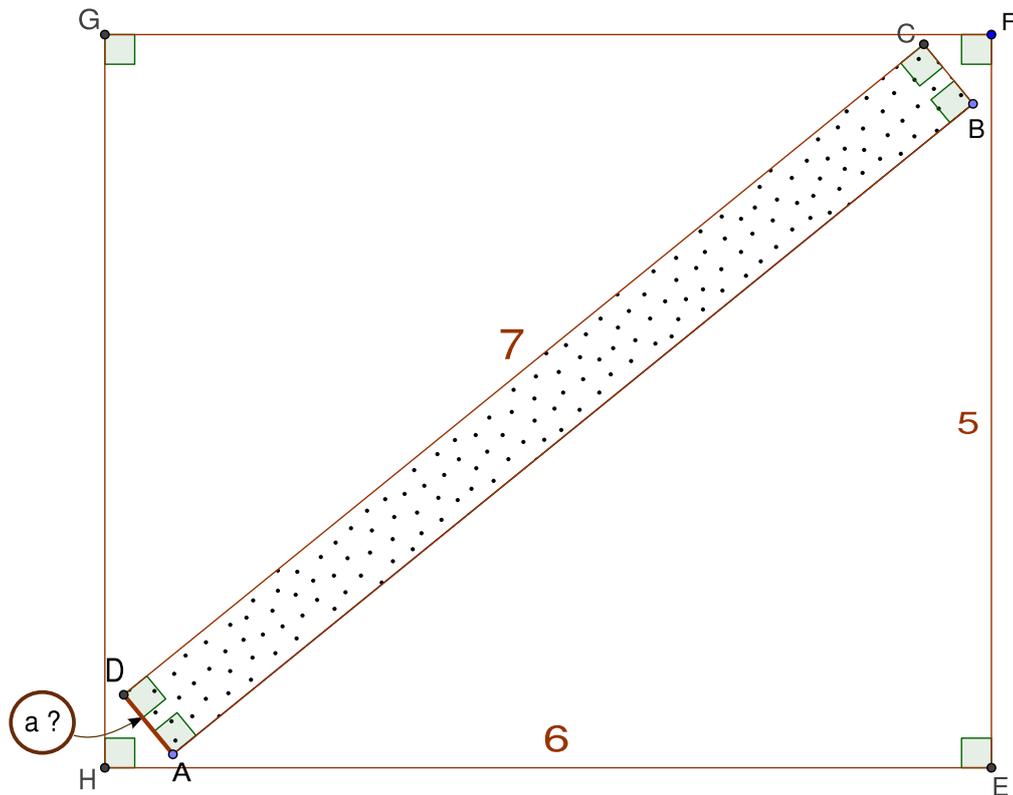
<p>La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.</p>

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.

Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

Exercice 1

C'est dans la boîte



Quelles valeurs de a conviennent ?

Exercice 2

Rendez la monnaie !

Un acheteur a dans son porte-monnaie n pièces. Notons a_1, \dots, a_n la valeur faciale de ces pièces – ce sont des nombres entiers strictement positifs. Convenons d'appeler *capacité* de ce porte-monnaie le plus grand nombre entier M tel que l'on puisse payer sans rendu de monnaie toute somme (entière) de 1 à M . Notons $C(a_1, \dots, a_n)$ la capacité du porte-monnaie contenant les pièces a_1, \dots, a_n .

- 1°) **Sans rendu.** On suppose dans cette question que l'on a $a_1 = 1$ et $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$.
 - (a) Calculer les capacités $C(1, 2, 4)$, $C(1, 2, 5)$ et $C(1, 2, 3, 4, 5)$.
 - (b) Soit j un nombre entier compris entre 1 et $n - 1$ et fixons les nombres a_1, \dots, a_j . À quelle condition sur a_{j+1} a-t-on $C(a_1, \dots, a_j) \neq C(a_1, \dots, a_j, a_{j+1})$?
 - (c) Donner une méthode pour calculer $C(a_1, \dots, a_n)$.
 - (d) On fixe n . Comment choisir les nombres entiers a_1, \dots, a_n pour que la capacité $C(a_1, \dots, a_n)$ soit la plus grande possible ?
- 2°) **Avec rendu de monnaie.** Le marchand chez qui notre acheteur va faire ses courses possède aussi un porte-monnaie, lui permettant de rendre la monnaie. Fixons des nombres entiers n et p . Nommons *capacité commune* le plus grand nombre entier M tel que l'on puisse payer (c'est-à-dire accomplir la transaction) toute somme qui soit un nombre entier de 1 à M . Comment choisir les porte-monnaies (a_1, \dots, a_n) de l'acheteur et (v_1, \dots, v_p) du vendeur afin qu'ils offrent la plus grande capacité commune possible ?

Exercice 3

La racine du carré

On considère l'ensemble $U_m = \left\{ \exp\left(\frac{2ik\pi}{m}\right) / 0 \leq k \leq m-1 \right\}$; on rappelle que c'est aussi l'ensemble des racines m -ièmes complexes de l'unité, c'est à dire l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $z^m = 1$.

On se donne un entier strictement positif n et on cherche s'il existe une fonction $f : U_{2n} \rightarrow U_{2n}$ vérifiant $f(f(z)) = z^2$ pour tout z dans U_{2n} .

- 1°) Montrer que l'ensemble $\{z^2 / z \in U_{2n}\}$ est égal à U_n et qu'il est inclus dans U_{2n} .
- 2°) On suppose qu'il existe une solution f au problème considéré.
 - (a) Vérifier que $f(z^2) = (f(z))^2$ pour tout z dans U_{2n} .
 - (b) Montrer que $f(z) = f(z') \Rightarrow z = \pm z'$ et que $f(1) = f(-1) = 1$.
- 3°) Selon la valeur de n , existe-t-il un élément de z de U_{2n} qui vérifie $z^2 = -1$? Si oui, vérifier qu'alors il n'y a pas de fonction f solution.
- 4°) Selon la valeur de n , existe-t-il un élément de z de U_{2n} qui vérifie $z^3 = 1$ avec $z \neq 1$? Si oui, vérifier qu'alors il n'y a pas de fonction f solution.
- 5°) On suppose dans toute la suite de l'énoncé que l'entier n est impair.
 - (a) Vérifier que la fonction g de U_n dans lui-même qui à z appartenant à U_n associe z^2 est bijective.
 - (b) On suppose qu'il existe une solution f au problème. Vérifier qu'il existe une application $\varphi : U_n \rightarrow U_n$ telle que $\varphi \circ \varphi = g$.
 - (c) Réciproquement, on suppose qu'il existe une fonction $\varphi : U_n \rightarrow U_n$ telle que $\varphi \circ \varphi = g$. Construire alors une solution f au problème.
 - (d) Exemple : on prend $n = 5$, dire s'il existe une solution au problème, si oui en construire une.
 - (e) Même question avec $n = 7$ puis $n = 9$.

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2012

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 HEURES

<p>La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.</p>

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.

Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

Problème 1

Les premiers sont les derniers

Pour tout entier $n \geq 2$, on dispose de la décomposition en facteurs premiers

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

où p_1, p_2, \dots, p_k , qu'on suppose distincts, sont les diviseurs premiers de n , et où les exposants a_1, a_2, \dots, a_k sont des entiers strictement positifs. On pose alors

$$f(n) = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_k^{p_k}.$$

Par exemple, si $n = 720 = 2^4 3^2 5^1$, on a $f(n) = 4^2 2^3 1^5 = 128$.

En posant de plus $f(1) = 1$, on obtient une fonction f de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* .

Enfin, pour tous entiers $n \geq 1$ et $i \geq 0$, on note

$$f^0(n) = n \quad \text{et} \quad f^{i+1}(n) = f(f^i(n)).$$

Par exemple :

$$f^0(720) = 720, \quad f^1(720) = f(720) = 128, \quad f^2(720) = f(128) = 49$$

Le but de ce problème est d'étudier le comportement de la fonction f et des suites $(f^i(n))_{i \in \mathbb{N}}$ pour n fixé.

- 1°) (a) Calculer $f(2012)$.
(b) Déterminer les nombres $f^i(36^{36})$ pour $0 \leq i \leq 3$. Que peut-on dire des suivants ?
- 2°) (a) Donner un exemple d'entier $n \geq 1$ tel que, pour tout entier naturel i , on ait

$$f^{i+2}(n) = f^i(n) \quad \text{et} \quad f^{i+1}(n) \neq f^i(n).$$

(b) Montrer que la fonction f n'est ni croissante ni décroissante.

3°) Résoudre : (a) l'équation $f(n) = 1$; (b) l'équation $f(n) = 2$; (c) l'équation $f(n) = 4$.

4°) (a) Pour tous entiers $a \geq 2$ et $b \geq 0$, montrer que $ab \leq a^b$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ des entiers tels que $a_i \geq 2$ et $b_i \geq 0$ pour tout i .
Montrer que

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k \leq a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdots a_k^{b_k}.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $f(f(n)) \leq n$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un entier naturel r que, pour tout entier $i \geq r$, on ait $f^{i+2}(n) = f^i(n)$.

5°) Soit E l'ensemble des entiers $n \geq 2$ n'ayant que des exposants strictement supérieurs à 1 dans leur décomposition en facteurs premiers.

(a) Montrer que, pour tout entier $a \geq 2$, il existe des entiers naturels α et β tels que $a = 2\alpha + 3\beta$.

(b) En déduire que si n appartient à E , alors il existe un élément m de E tel que $f(m) = n$.

(c) Donner un élément m de E tel que $f(m) = 2012^{2012}$.

(d) Que peut-on dire de la réciproque du (b) ?

Problème 2

Une suite majoritairement décroissante

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels positifs telle que $u_0 = 1$ et telle que, pour tout entier $n \geq 1$, au moins la moitié des termes u_0, u_1, \dots, u_{n-1} soient supérieurs ou égaux à $2u_n$.
Montrer que u_n tend vers 0.

Problème 3

Le facteur sonne toujours une fois (et une seule)

Un facteur doit distribuer le courrier dans une rue. Celle-ci ne comporte qu'une seule rangée de maisons régulièrement espacées et numérotées $1, 2, \dots, n$, où n est un entier supérieur ou égal à 2. Le facteur doit distribuer une lettre par maison. Pour cela, il laisse son vélo à la maison 1, y dépose le courrier correspondant, et ensuite distribue les lettres au hasard, puis revient à la maison 1 récupérer son vélo. Il effectue ainsi un trajet, représenté par les numéros successifs des maisons où il a déposé le courrier.

Par exemple, si $n = 5$, un trajet possible est $1, 5, 2, 4, 3, 1$. La distance totale parcourue, appelée longueur du trajet, vaut 12 dans ce cas car $|5 - 1| + |2 - 5| + |4 - 2| + |3 - 4| + |1 - 3| = 12$.

Un autre trajet possible est $1, 3, 5, 4, 2, 1$, de longueur 8.

- 1°) Combien y a-t-il de trajets possibles ?
- 2°) (a) Montrer que tout trajet est de longueur supérieure ou égale à $2(n - 1)$.
(b) Combien y a-t-il de trajets de longueur minimale ?
- 3°) (a) Dans les cas $n = 5$ et $n = 6$, déterminer la longueur maximale d'un trajet et donner un exemple de trajet de longueur maximale.
(b) Pour n quelconque, déterminer la longueur maximale d'un trajet.
- 4°) On tire un trajet au hasard (tous les trajets sont équiprobables). Quelle est l'espérance de la longueur du trajet ?

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2013

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 HEURES

<p>La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.</p>

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.

Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

PROBLÈME I

De superbes suites

Dans ce problème, on considère des suites finies (a_1, a_2, \dots, a_n) d'entiers strictement positifs, où n est un entier supérieur ou égal à 2, appelé *longueur* de la suite finie.

On dit qu'une suite finie d'entiers strictement positifs est *superbe* si chacun de ses termes divise la somme de tous les termes.

Par exemple, la suite $(1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2)$ est superbe de longueur 8 car $1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 = 12$, qui est divisible par 1 et par 2; la suite $(3, 3, 6, 12)$ est superbe de longueur 4 car la somme des termes vaut 24, qui est multiple de 3, 6, 12.

- 1° Déterminer les entiers strictement positifs b tels que la suite $(21, 7, b)$ soit superbe.
- 2° a) Déterminer les suites superbes de longueur 2, puis celles de longueur 3.
b) Déterminer les suites superbes de longueur 4 et dont la somme des termes vaut 2013.
- 3° a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, il existe une suite superbe de longueur n dont les termes sont tous distincts.
b) Montrer que, si $n \geq 2$, il n'existe pas de suite superbe de longueur n dont les termes sont des nombres premiers tous distincts.
- 4° Soit (a_1, a_2, \dots, a_n) une suite arithmétique finie de raison strictement positive.
Montrer que si cette suite est superbe alors $n = 3$.
- 5° On dit qu'une suite (infinie) $(a_k)_{k \geq 1}$ d'entiers strictement positifs est *magnifique* si, pour tout entier $n \geq 2$, la suite finie (a_1, a_2, \dots, a_n) est superbe.
Déterminer les suites magnifiques $(a_k)_{k \geq 1}$ vérifiant $a_k < a_{k+1}$ pour tout entier $k \geq 2$.
- 6° Soit n un entier supérieur ou égal à 4, et soit (a_1, a_2, \dots, a_n) une suite finie, pas forcément superbe, d'entiers strictement positifs tous distincts.
a) Montrer qu'il est possible de prolonger la suite de façon à obtenir une suite superbe.
b) Montrer qu'il est possible de prolonger la suite de façon à obtenir une suite superbe dont les termes sont tous distincts.

PROBLÈME II

Tiré à quatre épingles

- 1° Dans l'espace, soit D_1, D_2 deux droites non coplanaires et soit M un point n'appartenant ni à D_1 ni à D_2 . Montrer qu'il existe au plus une droite passant par M et coupant à la fois D_1 et D_2 . Dans quel cas n'en existe-t-il aucune ?

L'espace étant muni d'un repère orthonormé, soit $ABCDEFGH$ le cube dont les sommets ont pour coordonnées $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $E(0, 0, 1)$, $F(1, 0, 1)$, $G(1, 1, 1)$, $H(0, 1, 1)$. Soit respectivement D_1, D_2 et D_3 les droites (EF) , (BC) et (DH) .

Enfin, soit \mathcal{S} l'ensemble des points de coordonnées $M(x, y, z)$ tels que

$$xy + yz + zx - (x + y + z) + 1 = 0.$$

- 2° Donner une représentation paramétrique de chacune des droites D_1, D_2 et D_3 .
- 3° Montrer que les droites D_1, D_2 et D_3 sont incluses dans \mathcal{S} .
- 4° Montrer que toute droite de l'espace non incluse dans \mathcal{S} rencontre \mathcal{S} en 0, 1 ou 2 points.
- 5° En déduire que toute droite coupant les droites D_1, D_2 et D_3 est incluse dans \mathcal{S} .
- 6° Soit D_4 une droite qui ne rencontre aucune des droites D_1, D_2, D_3 et qui n'est pas incluse dans \mathcal{S} .
Montrer qu'il existe au plus deux droites de l'espace coupant les quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4 .

PROBLÈME III

Il faut passer les premiers

Pour ce problème, on donne la liste des vingt-cinq nombres premiers inférieurs à 100 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Pour faire une réussite, Sisyphe a dessiné au sol 106 cases numérotées de 0 à 105, et il dispose d'un jeton et d'un dé à six faces (équilibré).

Sisyphe commence la réussite en posant le jeton sur la case 0. Il fait ensuite une série de lancers du dé ; lorsque le dé affiche la valeur k , il avance le jeton de k cases et :

- s'il atteint ou dépasse la case numéro 100, Sisyphe a gagné ;
- s'il arrive à une case dont le numéro est un nombre premier inférieur à 100, Sisyphe a perdu ;
- dans les autres cas, Sisyphe relance le dé et continue la réussite.

1° Dans cette question, on suppose que Sisyphe recommence une réussite lorsqu'il a perdu.

On note p_n la probabilité de gagner au moins une réussite en au plus n lancers du dé.

- a) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $p_n > 0$.
- b) Étudier la convergence de la suite (p_n) .

Dans la suite du problème, Sisyphe ne recommence plus la réussite s'il perd.

Soit X la variable aléatoire représentant la position du jeton à la fin de la réussite.

On note $P(X = k)$ la probabilité de l'événement $X = k$.

2° a) Déterminer $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X \geq 4)$, $P(X = 5)$.

b) Proposer un algorithme pour calculer $P(X = k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, 105\}$.

3° Muni d'une calculatrice qui n'est pas assez performante pour exécuter l'algorithme précédent, Sisyphe cherche à estimer sa probabilité de gain. Pour cela, étant donné deux nombres premiers consécutifs $p < p'$, il considère α_p la probabilité conditionnelle de l'événement $X = p'$ sachant l'événement $X > p$.

- a) Que valent α_2 et α_3 ?
- b) Donner l'expression de la probabilité de gain, $P(G) = P(X \geq 100)$, en fonction des nombres réels α_p pour $p = 2, 3, 5, \dots$
- c) Donner un encadrement des nombres α_p et en déduire un encadrement de $P(G)$. (Dans cette question, la qualité de l'encadrement sera un élément d'appréciation.)

* *
*

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2014

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 HEURES

<p>La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.</p>

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.

Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

PROBLÈME I

Stabilité géométrique

Dans tout le problème, ε et q sont deux réels strictement positifs.

On considère une suite (x_n) de réels telle que $x_0 > 0$ et, pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq x_{n+1} - qx_n \leq \varepsilon.$$

1° Pour tout entier naturel n , on pose $b_n = x_{n+1} - qx_n$.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$x_n = q^n x_0 + q^{n-1} b_0 + q^{n-2} b_1 + \cdots + q b_{n-2} + b_{n-1}.$$

2° Dans cette question, on suppose que $0 < q < 1$.

a) Montrer qu'il existe une suite géométrique (y_n) telle que, pour tout $n \geq 0$,

$$|y_n - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{1-q}.$$

b) Montrer qu'il existe en fait une infinité de telles suites géométriques (y_n) .

3° Dans cette question, on suppose que $q > 1$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{b_0}{q} + \frac{b_1}{q^2} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{q^n}$.

a) Montrer que la suite (u_n) converge.

On note s sa limite.

b) Pour tout $n \geq 1$, montrer $0 \leq s - u_n \leq \frac{\varepsilon}{q^n(q-1)}$.

c) Montrer qu'il existe une unique suite géométrique (y_n) telle que, pour tout entier naturel n ,

$$|y_n - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{q-1}.$$

PROBLÈME II

Vite « pile »

Dans ce problème, k et n sont des entiers supérieurs ou égaux à 2.

Un groupe de k joueurs dispose d'une pièce de monnaie non supposée équilibrée, pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile » dans un lancer est notée p , avec $0 < p < 1$.

Chaque joueur lance la pièce au plus n fois en s'arrêtant s'il obtient « pile » : son score est alors le nombre d'échecs, c'est-à-dire le nombre de « face ». Ainsi, si un joueur obtient « pile » au premier lancer, son score est 0 et la partie s'arrête ; s'il obtient « pile » au deuxième lancer (après un « face »), son score est 1 ; s'il obtient « pile » au n -ième lancer (après $n-1$ « face »), son score est $n-1$; s'il n'obtient pas « pile » durant les n lancers, son score est n .

Après les lancers, chaque joueur a un score. Le ou les gagnants sont les joueurs qui ont réalisé le plus petit score.

1° Déterminer la loi de probabilité du score d'un joueur donné.

2° Déterminer la probabilité qu'il y ait un unique gagnant, puis la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini.

3° Déterminer l'espérance du nombre de gagnants, puis la limite de cette espérance quand n tend vers l'infini.

PROBLÈME III

Des chiffres pour des lettres

Un mot de longueur n est une suite de n lettres choisies parmi les 10 lettres $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$. Par exemple, $BEC, JJCD, AFFICHAGE, ABCDEFGHIJ$ sont des mots de longueurs respectives 3, 4, 9, 10. Une attribution du mot ω est un nombre dont l'écriture décimale est obtenue en remplaçant chaque lettre de ω par un des chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de sorte que des lettres identiques sont remplacées par le même chiffre et que deux lettres distinctes sont remplacées par des chiffres différents. Il est permis que le premier chiffre de l'attribution soit égal à 0. Par exemple, 121 et $040 = 40$ sont deux attributions pour le mot GAG , mais 333 et 452 n'en sont pas ; 555 et $000 = 0$ sont des attributions de AAA , mais pas 112 ou 789.

Soit d un entier strictement positif. On dit que le mot ω est un *bloqueur* de d si toute attribution de ω est un nombre non divisible par d . Ainsi le mot $\omega = AABCA$ n'est pas un bloqueur de $d = 4$, car 66716 est une attribution de ω qui est divisible par 4.

- 1° a) Montrer que le mot AB est un bloqueur de $d = 100$.
- b) Montrer que tout nombre d'au moins trois chiffres admet un bloqueur.

Le nombre $d > 0$ est dit *mauvais* s'il admet au moins un bloqueur. Sinon, on dit que d est *bon*. La question précédente montre que tout nombre d'au moins trois chiffres est mauvais.

- 2° a) Montrer que 10 est bon.
- b) Montrer que 8 est bon.
- c) Montrer que le mot AAB est un bloqueur de 27.
- d) Montrer que le mot $ABBAB$ est un bloqueur de 32.
- e) Un diviseur positif d'un nombre bon est-il forcément bon ? Un diviseur positif d'un nombre mauvais est-il forcément mauvais ?

Si k est un entier strictement positif et si X est une lettre, on note X^k le mot $XX \dots X$ formé de k lettres X .

- 3° a) Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 7 et soit ω le mot défini par :

$$\omega = AAA^{p-2}BA^{p-2}CA^{p-2}DA^{p-2}EA^{p-2}FA^{p-2}GA^{p-2}HA^{p-2}IA^{p-2}JA^{p-2}.$$

Montrer que ω est un bloqueur de p .

On pourra utiliser librement le petit théorème de Fermat : si x est un entier non divisible par p , alors p divise $x^{p-1} - 1$.

- b) Montrer qu'il existe au plus 27 nombres bons.
- 4° Soit ω un mot de longueur n , et a une attribution de ω .
On note a' l'attribution de ω obtenue à partir de a en permutant circulairement, dans cet ordre, les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sans toucher aux 9 : autrement dit, dans l'écriture décimale de a , les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sont respectivement remplacés par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0, 9. Par exemple, si $a = 1789$, alors $a' = 2809$.
Soit k le nombre d'apparitions du chiffre 9 dans l'écriture décimale de a .
 - a) Si a est congru à r modulo 9, à quoi est congru a' modulo 9 ?
 - b) En déduire que si k n'est pas congru à n modulo 3, alors il existe une attribution de ω divisible par 9.
 - c) Montrer qu'il en est de même si k est congru à n modulo 3, mais pas modulo 9.
 - d) Montrer que 9 est bon.
- 5° Montrer que 18 est bon.
 - 6° Montrer que si un nombre est mauvais, il admet une infinité de bloqueurs.

Pour information, on peut montrer qu'il existe exactement 22 nombres bons. Ce sont les diviseurs positifs des nombres 18, 24, 45, 50, 60, 80.

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2015

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 HEURES

<p>La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.</p>

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.

Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

PROBLÈME I

Petits poids

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, et toute suite finie de n réels (x_1, x_2, \dots, x_n) , on appelle *poids* de la suite la plus grande des valeurs $|x_1|, |x_1 + x_2|, \dots, |x_1 + x_2 + \dots + x_n|$.

Par exemple, pour $n = 4$ et $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 4, 0, -9)$, le poids de la suite est égal à 8, car

$$|x_1| = 4, |x_1 + x_2| = 8, |x_1 + x_2 + x_3| = 8 \quad \text{et} \quad |x_1 + x_2 + x_3 + x_4| = 1.$$

Pour $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-9, 4, 0, 4)$, le poids est égal à 9, car

$$|x_1| = 9, |x_1 + x_2| = 5, |x_1 + x_2 + x_3| = 5 \quad \text{et} \quad |x_1 + x_2 + x_3 + x_4| = 1.$$

On remarque que les deux suites finies ci-dessus sont formées des mêmes nombres dans un ordre différent et qu'elles ont des poids différents.

1° Déterminer le poids des suites finies suivantes :

- $(3, 5, -6, -8, 2)$ (et donc $n = 5$).
- $(1, 2, 3, \dots, 2014, 2015, -2015, -2014, \dots, -2, -1)$ (et donc $n = 4030$).
- Dans chacun des deux exemples précédents, réordonner les termes de façon à obtenir un poids plus petit.

On donne à Isabelle et Clara la même suite finie de n réels (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Isabelle veut la réordonner de façon à obtenir une suite finie de poids minimal. Pour cela, elle considère tous les ordres possibles de ces n réels, détermine pour chacun le poids de la suite correspondante, et choisit un ordre pour lequel le poids est minimal. On note I ce poids minimal.

De son côté, Clara, plus pressée qu'Isabelle, adopte l'algorithme suivant.

Elle commence par choisir parmi les n réels un nombre, noté c_1 , de sorte que la valeur de $|c_1|$ soit la plus petite possible. Elle choisit ensuite le nombre c_2 parmi les $n - 1$ réels qui restent, afin que la valeur de $|c_1 + c_2|$ soit la plus petite possible. Plus généralement, après avoir choisi les nombres c_1, \dots, c_i parmi les n réels donnés au départ, elle choisit c_{i+1} parmi les $n - i$ restants de sorte que la valeur de $|c_1 + \dots + c_i + c_{i+1}|$ soit la plus petite possible.

Elle obtient finalement une suite finie (c_1, \dots, c_n) de n réels. On note C son poids.

2° Déterminer I et C dans les deux cas suivants.

- $n = 3$ et $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -4$.
- $n = 4$ et $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$.

3° Si $n = 2$, montrer que $I = C$.

4° Si $n = 3$, montrer que $C \leq \frac{3}{2}I$.

5° Soit n un entier supérieur ou égal à 4 et soit (x_1, x_2, \dots, x_n) la suite finie donnée à Isabelle et Clara.

On pose

$$M = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \quad S = |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \quad N = \max(M, S).$$

Autrement dit, M est le plus grand des nombres $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$. De même, N est le plus grand des nombres M et S .

- Montrer que $S \leq I$.
- Montrer que $M \leq 2I$.
- Montrer que $C \leq N$.
- En déduire que $C \leq 2I$.
- Déterminer n réels x_1, x_2, \dots, x_n tels que $C = 2I$.

PROBLÈME II

Tétraèdres

On appelle *tétraèdre* la donnée, dans l'espace, de quatre points non coplanaires A, B, C, D . Les *arêtes* du tétraèdre sont les segments $[AB], [AC], [AD], [BC], [BD], [CD]$.

Dans les questions 1° à 3°, $ABCD$ désigne un tétraèdre.

- 1° a) Montrer qu'il existe un unique point G tel que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$.
- b) Montrer que $\vec{AG} = \frac{3}{4}\vec{AG}_A$, où G_A est le centre de gravité du triangle BCD .
- c) On appelle *médiane* issue de A la droite reliant A au centre de gravité du triangle BCD , et on définit de façon analogue les trois autres médianes, issues de B , de C et de D . Montrer que les médianes sont concourantes au point G .
- 2° Montrer qu'il existe une unique sphère qui passe par A, B, C, D . On l'appelle *sphère circonscrite* au tétraèdre $ABCD$ et on note O son centre.
- 3° On appelle *hauteur* issue de A la droite passant par A et orthogonale au plan BCD . On définit de façon analogue les trois autres hauteurs, issues de B , de C et de D . On dit qu'un tétraèdre de l'espace est *régulier* si toutes ses arêtes sont de même longueur.
 - a) Est-il vrai que les hauteurs sont concourantes en O si et seulement si le tétraèdre est régulier?
 - b) Les hauteurs sont-elles nécessairement concourantes?
 - c) Est-il vrai que les hauteurs sont concourantes en G si et seulement si le tétraèdre est régulier?
- 4° Dans ce qui suit, le produit scalaire de deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} est noté $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

Soit $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ quatre droites distinctes non coplanaires concourantes en un point H . Pour $1 \leq i \leq 4$, on choisit un vecteur directeur unitaire \vec{u}_i de Δ_i et, pour $1 \leq i, j \leq 4$, on note $c_{ij} = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j$.

 - a) On suppose qu'il existe un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ dont les hauteurs sont concourantes en H et tel que $A_j \in \Delta_j$ pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Montrer que $c_{12}c_{34} = c_{13}c_{24} = c_{14}c_{23}$.
 - b) Réciproquement, si $c_{12}c_{34} = c_{13}c_{24} = c_{14}c_{23} \neq 0$, montrer qu'il existe un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ dont les hauteurs sont concourantes en H et tel que $A_j \in \Delta_j$ pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

PROBLÈME III

Moyennes prévisionnelles

Dans ce problème, on considère des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (u_1, u_2, \dots)$ à valeurs réelles indexées par les entiers naturels non nuls. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de type \mathcal{M} si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est la moyenne des n termes suivants, c'est-à-dire

$$u_n = \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{2n-1} + u_{2n}}{n}.$$

- 1° Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de type \mathcal{M} et C un nombre réel. Que dire de la suite $(u_n - C)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
- 2° Montrer que toute suite croissante de type \mathcal{M} est constante.
- 3° Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de type \mathcal{M} . On suppose qu'il existe des réels a, b, c tels que $u_n = an^2 + bn + c$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a = b = 0$.
- 4° L'objectif de cette question 4° est de montrer que toute suite majorée ou minorée de type \mathcal{M} est constante.

Dans les questions a) et b), on suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de type \mathcal{M} à valeurs positives ou nulles, et on considère un entier $r \in \mathbb{N}^*$.

 - a) Soit p un entier tel que $p > r$. Montrer qu'il existe des entiers naturels non nuls q et q' tels que $q < p \leq q' \leq 2q$ et $u_{q'} \leq u_q \leq u_r$. En déduire que $u_p \leq 3u_r$.
 - b) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que $u_p \leq 3u_r$.

Dans les questions c) et d), on suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite minorée de type \mathcal{M} .

 - c) Soit D un réel strictement positif et soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $u_p - D$ n'est pas un minorant de la suite (u_n) , alors $u_p - \frac{3}{2}D$ n'est pas non plus un minorant.
 - d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.
 - e) Conclure.
- 5° Existe-t-il une suite non constante de type \mathcal{M} ?

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2016

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 HEURES

<p>La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.</p>

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.

Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

PROBLÈME I
Sommes de cubes

Si n est un entier, on appelle cube de n l'entier n^3 .

Dans tout le problème, on note :

S l'ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une somme de cubes d'entiers strictement positifs deux à deux distincts ;

S_0 l'ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une somme de cubes d'entiers pairs strictement positifs deux à deux distincts ;

S_1 l'ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une somme de cubes d'entiers impairs strictement positifs deux à deux distincts.

Par exemple, 8 et 190 sont dans S car $8 = 2^3$ et $190 = 1^3 + 4^3 + 5^3$; 216 et 1072 sont dans S_0 car $216 = 6^3$ et $1072 = 2^3 + 4^3 + 10^3$; 125 et 2568 sont dans S_1 car $125 = 5^3$ et $2568 = 1^3 + 3^3 + 7^3 + 13^3$.

L'objectif du problème est de démontrer que tout entier suffisamment grand appartient à S .

1° Montrer que 2016 appartient à S_0 .

2° (a) Montrer que, pour tout réel $x \geq 5$, on a $(2x + 1)^3 \leq 2(2x - 1)^3$.

(b) Soit k un entier supérieur ou égal à 5. Montrer, pour tout entier $p \geq k$,

$$(2p + 1)^3 \leq (2k - 1)^3 + \sum_{j=k}^p (2j - 1)^3,$$

où on rappelle que $\sum_{j=k}^p (2j - 1)^3$ désigne la somme $(2k - 1)^3 + (2k + 1)^3 + \dots + (2p - 1)^3$.

On rappelle que si t , u et v sont des entiers, la notation $t \equiv u \pmod{v}$ signifie que v divise $u - t$.

3° Montrer qu'il existe 288 entiers s_1, \dots, s_{288} appartenant à S_1 tels que, pour tout i dans $\{1, \dots, 288\}$, $s_i \equiv i \pmod{288}$.

Dans la suite du problème, on fixe des entiers s_1, \dots, s_{288} appartenant à S_1 tels que $s_i \equiv i \pmod{288}$ pour tout i , et on note m le plus grand des nombres s_i :

$$m = \max(s_1, s_2, \dots, s_{288}).$$

On rappelle que n réels u_1, \dots, u_n sont dits en progression arithmétique de raison r si $u_{i+1} - u_i = r$ pour tout entier i tel que $1 \leq i < n$.

4° Soit n un entier tel que $288n \geq m$, et soit u_1, \dots, u_n des entiers naturels en progression arithmétique de raison 288. Montrer que tout entier de l'intervalle $[m + u_1, 288n + u_1]$ peut s'écrire sous la forme $s_i + u_j$, avec $1 \leq i \leq 288$ et $1 \leq j \leq n$.

5° On admet la relation, pour tout réel x ,

$$(2x + 12)^3 + (2x + 4)^3 + (2x + 2)^3 - (2x + 10)^3 - (2x + 8)^3 - (2x)^3 = 288.$$

(a) Montrer qu'il existe un entier u tel que u , $u + 288$ et $u + 576$ appartiennent à S_0 .

(b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, il existe n éléments dans S_0 en progression arithmétique de raison 288.

6° Soit k un entier supérieur ou égal à 5 tel que $(2k + 1)^3 > m$.

(a) Montrer qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que tout entier de l'intervalle $[N, N + 2(2k - 1)^3]$ puisse s'écrire sous la forme $s_i + u$, avec $1 \leq i \leq 288$ et $u \in S_0$.

(b) Montrer que tout entier supérieur ou égal à N appartient à S .

Pour tout entier $p \geq k$, on pourra examiner le cas des entiers de l'intervalle $[N, N_p]$, où

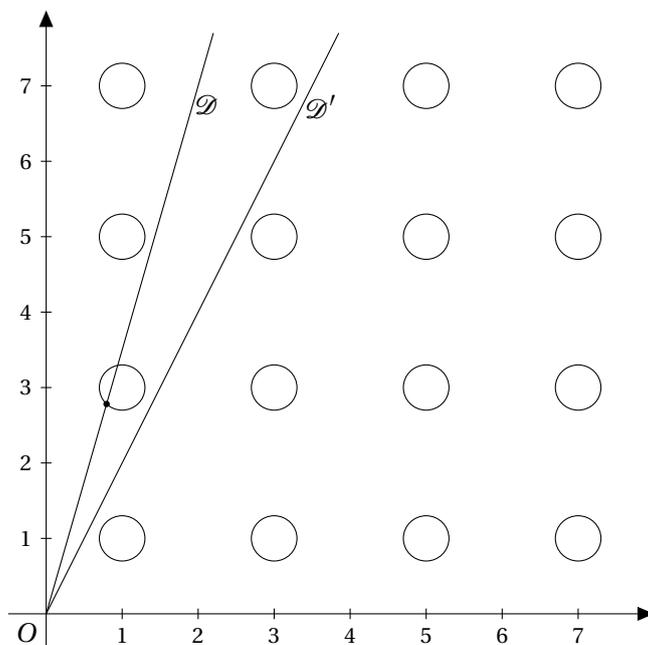
$$N_p = N + (2k - 1)^3 + \sum_{j=k}^p (2j - 1)^3.$$

PROBLÈME II

La rangée d'arbres qui cache la forêt

Un observateur se trouve dans une forêt parfaitement régulière, dans laquelle les troncs d'arbres ont tous même diamètre. On ne tient pas compte de la hauteur, ce qui permet de se ramener à un problème dans le plan, qu'on rapporte à un repère orthonormé. L'observateur se trouve à l'origine du repère et les troncs d'arbres sont représentés par des cercles de même rayon $R > 0$, centrés aux points de coordonnées (a, b) , où a et b sont des entiers impairs. Il s'agit d'étudier ce que voit l'observateur.

Pour des raisons de symétrie, on peut se restreindre au quart de plan $x > 0, y > 0$. On dira que l'observateur « voit à travers la forêt » s'il existe une demi-droite issue de l'origine, contenue dans le quart de plan considéré et ne rencontrant aucun des cercles.



Par exemple, dans la figure ci-dessus, la demi-droite \mathcal{D} rencontre un arbre, mais pas la demi-droite \mathcal{D}' . Pour $m \in]0, +\infty[$, on note \mathcal{D}_m la demi-droite définie par les conditions $y = mx$ et $x > 0$.

Dans ce problème, on admettra que si m est un nombre irrationnel positif, alors, pour tout réel strictement positif ε , il existe deux entiers naturels impairs a et b tels que $|b - ma| \leq \varepsilon$.

1° Soit a, b, m des réels strictement positifs. Montrer que \mathcal{D}_m rencontre le cercle de rayon $R > 0$ centré en (a, b) si et seulement si $|b - ma| \leq R\sqrt{1 + m^2}$.

2° En déduire que si m est irrationnel, alors \mathcal{D}_m rencontre un arbre.

3° On suppose que $m = \frac{b}{a}$, où a et b sont des entiers naturels non nuls premiers entre eux.

(a) On suppose que a et b sont impairs. La demi-droite \mathcal{D}_m rencontre-t-elle un arbre?

(b) On suppose que a et b sont de parités différentes et que \mathcal{D}_m rencontre un arbre.

Montrer que $1 \leq R\sqrt{a^2 + b^2}$.

4° En déduire que si toutes les demi-droites \mathcal{D}_m , avec $m > 0$, rencontrent un arbre, alors $R \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$.

5° On suppose réciproquement que $R \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$. Montrer que toute demi-droite \mathcal{D}_m , avec $m > 0$, rencontre un arbre planté en $(\alpha, 1)$ ou en $(1, \alpha)$, où α est un entier naturel impair.

On appelle première rangée d'arbres l'ensemble des arbres plantés aux points $(\alpha, 1)$ ou $(1, \alpha)$, où α est un entier naturel impair.

6° Conclure que si l'observateur voit à travers la première rangée, alors il voit à travers la forêt.

PROBLÈME III

Allons dans \mathbb{C}

Dans tout le problème, j désigne le nombre complexe $e^{2\pi i/3}$.
La probabilité d'un évènement A est notée $P(A)$.

- 1° (a) Vérifier que $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.
(b) Que peut-on dire du triangle dont les sommets ont pour affixes $1, j, j^2$?
(c) Montrer que si a, b, c sont des nombres réels, alors $a + bj + cj^2 = 0$ si et seulement si $a = b = c$.

On lance un dé équilibré (six faces numérotées de 1 à 6). On note F la variable aléatoire donnant le nombre obtenu, et on note Z la variable aléatoire j^F .

- 2° Montrer que Z est à valeurs dans $\{1, j, j^2\}$ et que $P(Z = 1) = P(Z = j) = P(Z = j^2) = \frac{1}{3}$.

On considère un entier $n \geq 1$ et on lance le dé n fois (lancers indépendants). On note F_k le résultat du k -ième lancer et $Z_k = j^{F_k}$. On note $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$ et $p_n = P(S_n = 0)$. On note U_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'entiers $k \in [1, n]$ tels que $Z_k = 1$; on note V_n celle qui donne le nombre d'entiers $k \in [1, n]$ tels que $Z_k = j$ et W_n celle qui donne le nombre d'entiers $k \in [1, n]$ tels que $Z_k = j^2$.

- 3° (a) Déterminer $U_n + V_n + W_n$.
(b) Montrer que $S_n = U_n + jV_n + j^2W_n$.
(c) Montrer que $S_n = 0$ si et seulement si $U_n = V_n = W_n$.
(d) En déduire que si n n'est pas multiple de 3, alors $p_n = 0$.

4° On suppose qu'il existe un entier naturel non nul m tel que $n = 3m$.

- (a) Montrer que la variable aléatoire U_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
(b) En déduire que $P(U_n = m) = \binom{3m}{m} \frac{2^{2m}}{3^{3m}}$.

On note $P_{U_n=m}(V_n = m)$ la probabilité conditionnelle de $V_n = m$ sachant $U_n = m$.

- (c) Montrer $P_{U_n=m}(V_n = m) = 2^{-2m} \binom{2m}{m}$.
(d) En déduire $p_{3m} = 3^{-3m} \binom{3m}{m} \binom{2m}{m}$.

La question précédente, combinée à une expression classique des coefficients binomiaux, entraîne pour m entier naturel non nul la relation suivante, qu'on ne demande pas de démontrer :

$$\frac{p_{3m+3}}{p_{3m}} = \frac{(3m+2)(3m+1)}{9(m+1)^2}.$$

- 5° Pour tout entier $m \geq 1$, montrer que $\frac{m}{m+1} \leq \frac{p_{3m+3}}{p_{3m}}$ et en déduire que $p_{3m} \geq \frac{2}{9m}$.

Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'entiers $k \in [1, n]$ tels que $S_k = 0$.

- 6° (a) Déterminer des variables de Bernoulli Y_k , avec $1 \leq k \leq n$, telles que $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$.
(b) On note $E(X_n), E(Y_1), \dots, E(Y_n)$ les espérances de X_n, Y_1, \dots, Y_n .
En admettant que $E(X_n) = E(Y_1) + \dots + E(Y_n)$, montrer que $E(X_n) = p_1 + \dots + p_n$.
(c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = +\infty$.

Soit q_n la probabilité que l'un des S_k soit nul pour $1 \leq k \leq n$, c'est-à-dire $q_n = P(X_n > 0)$.

L'objectif de la question suivante est de montrer que la suite (q_n) converge vers 1.

- 7° (a) Montrer que la suite (q_n) converge vers un réel q et que $q_n \leq q \leq 1$ pour tout n .
(b) Pour r, n entiers naturels non nuls, montrer que $P(X_n \geq r) \leq q^r$.
(c) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, que $E(X_n) \leq q + q^2 + \dots + q^n$.
(d) Conclure.

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2017

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Classes de terminale S

DURÉE : 5 HEURES

<p>La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.</p>

*Le sujet comporte trois problèmes indépendants et 5 pages numérotées 1 à 5.
Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer
clairement dans la copie.*

PROBLÈME I
Parties de \mathbb{C} de type S

Une partie \mathcal{A} non vide de \mathbb{C} (ensemble des nombres complexes) est dite de type S, si pour tout $z_1 \in \mathcal{A}$ et $z_2 \in \mathcal{A}$ le produit $z_1 z_2$ et la somme $z_1^2 + z_2^2$ sont encore dans \mathcal{A} .

Dans tout le problème \mathcal{A} désigne une partie de \mathbb{C} de type S.

On note $b(\mathcal{A})$ le nombre de nombres complexes z de \mathcal{A} dont le module $|z|$ est inférieur ou égal à 1.
On note $b(\mathcal{A}) = \infty$ si ce nombre est infini.

Partie A : Quelques exemples simples

1° Les ensembles suivants sont des parties de \mathbb{C} de type S (on ne demande pas de le vérifier), préciser pour chacun d'eux la valeur de $b(\mathcal{A})$:

- (a) $\mathcal{A} = \{0\}$.
- (b) $\mathcal{A} = \mathbb{C}$.
- (c) $\mathcal{A} = \mathbb{N}$.
- (d) $\mathcal{A} = \mathbb{N}^*$.

2° (a) Donner une partie \mathcal{A} de type S telle que $b(\mathcal{A}) = 0$.

(b) Donner une partie \mathcal{A} de type S telle que $b(\mathcal{A}) = 3$.

3° On note $\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{z}, z \in \mathcal{A}\}$, c'est-à-dire la partie de \mathbb{C} constituée des nombres complexes conjugués des éléments de \mathcal{A} . Montrer que $\overline{\mathcal{A}}$ est de type S et préciser $b(\overline{\mathcal{A}})$.

Partie B : Deux exemples de parties de \mathbb{C} de type S

1° On définit le complexe j par $j = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ et on note $\mathbb{Z}[j] = \{a + bj, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$, c'est-à-dire la partie de \mathbb{C} constituée de tous les nombres complexes de la forme $a + bj$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.

- (a) Calculer $1 + j + j^2$.
- (b) Justifier que $\mathbb{Z}[j]$ est de type S.
- (c) Montrer que $b(\mathbb{Z}[j]) = 7$.
- (d) On note $\mathbb{Z}[j]^* = \mathbb{Z}[j] \setminus \{0\}$ (les éléments non nuls de $\mathbb{Z}[j]$). Justifier que $\mathbb{Z}[j]^*$ est de type S et déterminer $b(\mathbb{Z}[j]^*)$.

2° On définit la partie \mathcal{R} de \mathbb{C} par

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C}, z^2 \in \mathbb{Z}[j]\}.$$

Ainsi un nombre complexe z est dans \mathcal{R} si et seulement si son carré est dans $\mathbb{Z}[j]$.

- (a) Montrer que \mathcal{R} est de type S.
- (b) Déterminer $b(\mathcal{R})$.

Partie C : À la recherche des valeurs possibles de $b(\mathcal{A})$

- 1° On suppose qu'il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $0 < |a| < 1$. Montrer que $b(\mathcal{A}) = \infty$.
- 2° On considère, dans cette question, un nombre complexe a de module 1. On note $\text{Arg}(a)$ l'unique argument de a inclus dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On suppose de plus que $\text{Arg}(a)$ n'est ni un multiple de $\frac{\pi}{6}$, ni un multiple de $\frac{\pi}{4}$.
- (a) Montrer que si $\text{Arg}(a) \in]\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}[$, alors l'un des deux nombres complexes $a^2 + a^4$ ou $a^4 + a^8$ possède un module non nul et strictement inférieur à 1.
- (b) De même montrer que si $\text{Arg}(a) \in]0, \frac{\pi}{6}[$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < |a^{2n} + a^{4n}| < 1$.
- (c) Montrer que si $\text{Arg}(a) \in]-\frac{2\pi}{3}, 0[$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < |a^{2n} + a^{4n}| < 1$.
- (d) Conclure qu'il existe toujours $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < |a^{2n} + a^{4n}| < 1$.
- 3° On suppose, dans cette question, que $b(\mathcal{A})$ est fini et supérieur ou égal à 2.
- (a) Montrer qu'il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $|a| = 1$.
- (b) Quelles sont alors les valeurs possibles pour $\text{Arg}(a)$?
- (c) En déduire que $b(\mathcal{A}) \leq 17$.
- 4° Donner une partie \mathcal{A} de type S telle que $b(\mathcal{A}) = 5$.
- 5° Donner une partie \mathcal{A} de type S telle que $b(\mathcal{A}) = 9$.
- 6° Quelles sont les valeurs possibles de $b(\mathcal{A})$?

PROBLÈME II

C'est probablement bon

Partie A : Franck passe un premier examen

Franck doit réussir un examen qui consiste en un Q.C.M. (questionnaire à choix multiples) de dix questions numérotées de 1 à 10. Il doit répondre à ces questions dans l'ordre et s'il ne répond pas à une question, *on ne prendra pas en compte les réponses qu'il pourrait apporter aux questions suivantes*.

Chaque bonne réponse rapporte un point, chaque mauvaise réponse fait perdre un point et ne pas répondre à une question ne rapporte aucun point.

Franck réussira son premier examen si sa note finale est d'au moins *sept* points.

Franck connaît les bonnes réponses des *six* premières questions. Par contre, pour chacune des quatre questions suivantes, il a une probabilité p de trouver la bonne réponse, avec $0 < p < 1$.

- 1° Prouver que si Franck ne répond pas à la question numérotée 9, il a intérêt à ne pas répondre à la question numérotée 8 pour réussir son examen.
- 2° Franck a-t-il intérêt à répondre à la question numérotée 10 ?
- 3° Déterminer, selon la valeur de p , quelle est la meilleure stratégie pour Franck.

Partie B : Franck passe un second examen

Franck passe maintenant un second examen, consistant encore en un Q.C.M, formé cette fois de 50 questions. Les modalités de cet examen sont les mêmes que celles du précédent. Ainsi Franck doit répondre à ces questions dans l'ordre et s'il ne répond pas à une question, *on ne prendra pas en compte les réponses qu'il pourrait apporter aux questions suivantes*. Chaque bonne réponse rapporte un point, chaque mauvaise réponse fait perdre un point et ne pas répondre à une question ne rapporte aucun point.

Cependant, pour réussir cette fois, Franck doit obtenir une note finale d'au moins 25 points. Franck connaît les réponses aux 24 premières questions. Par contre, pour chacune des 26 questions suivantes, il a une probabilité p de trouver la bonne réponse, avec $0 < p < 1$.

Pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq 26$, on note P_k la probabilité que Franck réussisse son examen en ne répondant qu'aux seules $24 + k$ premières questions.

1° Prouver que, pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq 13$, on a $P_{2k-1} > P_{2k}$.

2° Prouver que, pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq 12$, on a

$$P_{2k+1} = \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} p^i (1-p)^{2k+1-i}.$$

3° Démontrer que, pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq 11$, on a

$$P_{2k+3} - P_{2k+1} = \binom{2k+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{k+1} (2p-1).$$

On pourra utiliser librement la formule de Pascal pour $0 < m < n$: $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$.

4° Déterminer, selon la valeur de p , quelle est la meilleure stratégie pour Franck.

PROBLÈME III

Dans l'espace tout entier

On rappelle qu'un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers, avec $b \neq 0$. En particulier, la somme, la différence, le produit et le quotient de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.

L'espace usuel \mathcal{E} est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un point $M(x; y; z)$ de \mathcal{E} est dit *entier* lorsque ses trois coordonnées x , y et z sont des entiers.

De même, un point $M(x; y)$ du plan \mathcal{P} rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sera dit *entier* lorsque ses deux coordonnées x et y sont des entiers.

Dans tout le problème, les triangles seront supposés *non aplatis*.

Partie A : Quelques résultats préliminaires

1° Soit ABC un triangle du plan \mathcal{P} rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, et H le pied de sa hauteur issue de A (c'est-à-dire H est le point d'intersection entre la droite (BC) avec la perpendiculaire passant par A).

(a) Prouver que :

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BC^2} \times \overrightarrow{BC}.$$

- (b) En déduire que si A, B et C sont des points entiers du plan \mathcal{P} alors les coordonnées de H sont des nombres rationnels.
- (c) Si ABC est un triangle de l'espace \mathcal{E} , les résultats établis aux questions (a) et (b) ci-dessus sont-ils encore valables ?
- 2° Existe-t-il un triangle équilatéral dont les sommets sont trois points entiers du plan \mathcal{P} rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$?
- 3° Soit n un entier naturel. Prouver que si \sqrt{n} est un nombre rationnel alors il existe un entier m tel que $n = m^2$.
- 4° (a) Prouver que si x est un entier alors il existe un entier t tel que x^2 soit égal à $8t$ ou à $8t + 1$ ou à $8t + 4$.
- (b) Prouver que si a, b, c et d sont des entiers tels que $7a^2 = b^2 + c^2 + d^2$, alors $a = b = c = d = 0$.

Partie B : Étude des triangles de l'espace \mathcal{E} à sommets entiers

On rappelle que si θ est la mesure en radian d'un angle non droit d'un triangle (non aplati), on a $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Un entier $k \geq 1$ est dit *sans facteur carré*, si $k = 1$ ou s'il peut se décomposer en un produit de nombres premiers deux à deux distincts.

- 1° Donner un triangle équilatéral dont les sommets sont trois points entiers de l'espace \mathcal{E} .
- 2° Soit T un triangle dont les trois sommets sont des points entiers de l'espace \mathcal{E} .
- (a) Prouver que, pour tout angle θ non droit de T , le nombre $\tan^2(\theta)$ est rationnel.
- (b) Prouver qu'il existe un unique entier $k \geq 1$, sans facteur carré, tel que pour tout angle θ non droit de T , le nombre $\tan(\theta)$ puisse s'écrire sous la forme $r\sqrt{k}$, où r est un nombre rationnel non nul.
- (c) En utilisant la question A-1°, prouver qu'il existe des entiers a_1, a_2, a_3, u_1, u_2 et u_3 non tous nuls vérifiant le système :

$$E(3, k) \begin{cases} k(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \\ a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0 \end{cases}.$$

(Remarque : L'entier k est celui trouvé à la question 2°-(b).)

- 3° Soit k un entier strictement positif et sans facteur carré. On suppose qu'il existe des entiers a_1, a_2, a_3, u_1, u_2 et u_3 non tous nuls vérifiant le système $E(3, k)$.
- Soit T un triangle de l'espace \mathcal{E} . On suppose que, pour tout angle θ non droit de T , le nombre $\tan(\theta)$ peut s'écrire sous la forme $r\sqrt{k}$, où r est un nombre rationnel non nul.
- Montrer qu'il existe un triangle dont les trois sommets sont entiers et ayant les mêmes angles que T .
- 4° (a) Soit T un triangle isocèle de l'espace \mathcal{E} dont les côtés sont de longueurs 3, 3 et 2. Existe-t-il un triangle de l'espace \mathcal{E} dont les trois sommets sont entiers et ayant les mêmes angles que T ?
- (b) Soit T un triangle isocèle de l'espace \mathcal{E} dont les côtés sont de longueurs 2, 2 et 3. Existe-t-il un triangle de l'espace \mathcal{E} dont les trois sommets sont entiers et ayant les mêmes angles que T ?

Remarque : On pourra librement utiliser l'identité suivante, valable pour tous réels a, b, c, d, e et f :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(d^2 + e^2 + f^2) - (ad + be + cf)^2 = (ae - bd)^2 + (af - cd)^2 + (bf - ce)^2.$$

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2018

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 HEURES

<p>La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.</p>

Le sujet comporte trois problèmes indépendants et 7 pages numérotées 1 à 7.

Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

PROBLÈME I
Approximations de courbes

Partie A : Les polynômes de Bernstein

Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel i compris entre 0 et n , on note $B_{n,i}$ le polynôme défini pour p variant dans l'intervalle $[0; 1]$ par

$$B_{n,i}(p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},$$

avec $\binom{n}{i}$ le coefficient binomial, i parmi n . Ainsi $B_{0,0}(p) = 1$; $B_{1,0}(p) = 1 - p$ et $B_{1,1}(p) = p$.

Ces polynômes sont appelés **polynômes de Bernstein**.

- 1° (a) Donner l'expression de $B_{2,0}(p)$, $B_{2,1}(p)$ et $B_{2,2}(p)$.
(b) Déterminer l'expression des polynômes de Bernstein pour $n = 3$, à savoir $B_{3,0}(p)$, $B_{3,1}(p)$, $B_{3,2}(p)$ et $B_{3,3}(p)$.
- 2° (a) Quelle est l'expression de $B_{n,0}(p)$ et de $B_{n,n}(p)$?
(b) Démontrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout i compris entre 1 et $n - 1$,

$$B_{n,i}(p) = (1-p)B_{n-1,i}(p) + pB_{n-1,i-1}(p).$$

- 3° (a) En quelle(s) valeur(s) $p \in [0; 1]$ s'annule un polynôme de Bernstein?
On raisonnera en distinguant les cas selon les valeurs de n et de i .
(b) Qu'en est-il de son signe sur $[0; 1]$?
- 4° Démontrer que les polynômes de Bernstein d'un même degré n forment une partition de l'unité : c'est-à-dire, pour tout entier naturel n ,

$$\sum_{i=0}^n B_{n,i}(p) = B_{n,0}(p) + B_{n,1}(p) + \dots + B_{n,n-1}(p) + B_{n,n}(p) = 1.$$

- 5° Déterminer la valeur des sommes

$$\sum_{i=0}^n i B_{n,i}(p) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^n i^2 B_{n,i}(p).$$

Que représentent ces sommes en termes probabilistes?

Partie B : Des courbes de Bézier

On munit le plan d'un repère orthonormé (O, I, J) . Soit n un entier naturel. On se donne $n + 1$ points non alignés du plan $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n$.

On appelle **courbe de Bézier** de degré n et de points de contrôle $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n$ l'ensemble des points $M(p)$ du plan avec p variant dans l'intervalle $[0; 1]$ tels que

$$\overrightarrow{OM(p)} = \sum_{i=0}^n B_{n,i}(p) \overrightarrow{OP_i}.$$

Dans la suite on va s'intéresser à des courbes de Bézier de degré 0, 1 ou 2.
On se fixe donc A, B, C trois points du plan non alignés.

1° Reconnaître la nature géométrique

(a) de la courbe de Bézier de degré 0 et de point de contrôle A .

(b) de la courbe de Bézier de degré 1 et de points de contrôle B et C .

2° On s'intéresse à la courbe de Bézier de degré 2 et de points de contrôle A , B et C .

(a) Justifier que les points A et C appartiennent à cette courbe. Le point B y appartient-il?

(b) Dans cette question on prend les points de coordonnées $A(-2;5)$, $B(2;1)$ et $C(4;3)$. Proposer une construction des points de cette courbe pour $p = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{2}$ et $p = \frac{3}{4}$. Tracer la courbe à main levée.

3° Démontrer que cette courbe est nécessairement inscrite dans le triangle ABC .

4° Quelle pourrait être la nature géométrique de cette courbe de Bézier de degré 2? Justifier votre réponse.

PROBLÈME II

Un si discret Monsieur Dirichlet

Soit \mathcal{S} un ensemble fini non vide de points du plan. Certaines paires de points de \mathcal{S} sont reliées par des traits, de sorte qu'en suivant ces traits, éventuellement en plusieurs étapes, il est toujours possible de passer d'un point de \mathcal{S} à n'importe quel autre (les intersections éventuelles entre les traits ne sont pas considérées et un point n'est jamais relié à lui-même).

Deux points de \mathcal{S} reliés par un trait sont dits *voisins*.

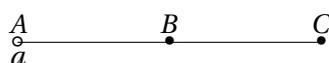
Si M est un point de \mathcal{S} , on note $V(M)$ l'ensemble des voisins de M , et on note $d(M)$ le nombre de voisins de M , appelé le *degré* de M .

Chaque point de \mathcal{S} a été colorié soit en bleu soit en jaune, et il y a au moins un point jaune dans l'ensemble \mathcal{S} . À chaque point jaune, Gustav a attribué un nombre réel de son choix. La mathématicienne Maryam voudrait alors attribuer un réel à chaque point bleu (pas forcément le même nombre d'un point bleu à l'autre) de façon à satisfaire la propriété (\mathcal{P}) suivante :

(\mathcal{P}) *Le nombre attribué à tout point bleu est la moyenne des nombres attribués à ses voisins.*

Partie A : Quelques exemples pour commencer

1° Dans cette question uniquement, on suppose que $\mathcal{S} = \{A, B, C\}$, avec A voisin de B , lui-même voisin de C comme sur dessin ci-dessous.

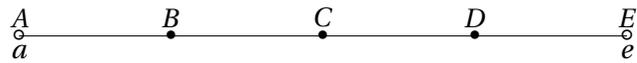


De plus, A est le seul point jaune et Gustav lui a attribué le réel a .

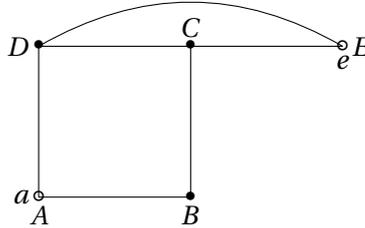
Quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à B et à C afin de satisfaire la propriété (\mathcal{P})?

2° Pour les trois questions suivantes on suppose que $\mathcal{S} = \{A, B, C, D, E\}$. Les points A et E sont les seuls points jaunes, et Gustav leur a attribué respectivement les réels a et e .

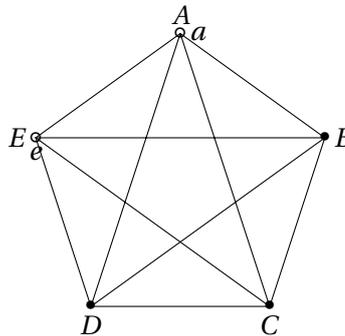
- (a) Les liaisons étant indiquées selon le schéma suivant, quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à chacun des points B, C et D afin de satisfaire la propriété (\mathcal{P}) ?



- (b) Même question pour le schéma suivant :



- (c) Même question pour le schéma suivant :



- 3° Dans cette question uniquement on généralise le schéma de la question 2-(c) avec un nombre quelconque de points.

On suppose que $n \geq 1$ est un entier, que $\mathcal{S} = \{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}\}$ et que tout point de \mathcal{S} est voisin de chaque autre point de \mathcal{S} . De plus, P_0 et P_{n+1} sont les seuls points jaunes, et Gustav leur a attribué respectivement les réels a et b . Quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à chacun des points P_i pour $i = 1, \dots, n$ afin de satisfaire la propriété (\mathcal{P}) ?

Partie B : Étude du cas général

On note respectivement \mathcal{J} l'ensemble des points jaunes, et \mathcal{B} l'ensemble des points bleus. Ainsi

$$\mathcal{S} = \mathcal{J} \cup \mathcal{B}.$$

Quand Gustav attribue un réel à chaque point jaune, cela consiste à définir une fonction k de \mathcal{J} dans \mathbb{R} . L'objectif de Maryam est donc de construire une fonction $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f(M) = k(M) \text{ si } M \text{ est jaune (1)} \\ f(M) = \frac{f(P_1) + \dots + f(P_d)}{d} \text{ si } M \text{ est bleu (2)} \\ \text{où } d = d(M) \text{ est le degré de } M \text{ (qui dépend de } M \text{) et } P_1, \dots, P_d \text{ les voisins de } M. \end{cases}$$

On dira alors que f est une solution **pour l'attribution** k .

Dans cette partie, on suppose donc donnée une telle attribution k .

On note K le plus grand des nombres $k(M)$ lorsque M décrit l'ensemble \mathcal{J} .

Existence d'une solution.

1° On suppose dans cette question que $k(M) \geq 0$ pour tout point $M \in \mathcal{J}$. On construit alors, par récurrence, la suite (f_n) de fonctions suivante :

On pose $f_0(M) = k(M)$ si M est jaune, et $f_0(M) = 0$ si M est bleu.

Puis, pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$\begin{cases} f_{n+1}(M) = k(M) \text{ si } M \text{ est jaune,} \\ f_{n+1}(M) = \frac{f_n(P_1) + \dots + f_n(P_d)}{d} \text{ si } M \text{ est bleu,} \\ \text{où } d = d(M) \text{ est le degré de } M \text{ (qui dépend de } M \text{) et } P_1, \dots, P_d \text{ les voisins de } M. \end{cases}$$

(a) Prouver que, pour tout $n \geq 0$ et tout point $M \in \mathcal{S}$, on a $0 \leq f_n(M) \leq f_{n+1}(M) \leq K$.

(b) En déduire l'existence d'une solution pour l'attribution k .

2° Prouver que si f est une solution pour l'attribution k et si α est une constante, alors la fonction $f + \alpha$ est aussi une solution pour l'attribution $k + \alpha$.

3° En déduire qu'il existe une solution à notre problème en général, c'est-à-dire sans l'hypothèse de la question 1° : $k(M) \geq 0$ pour tout point $M \in \mathcal{J}$.

Unicité de la solution.

On suppose dans cette sous-partie que l'on dispose d'une solution f pour cette attribution k .

4° Prouver que, pour tout point $M \in \mathcal{S}$, on a $f(M) \leq K$.

5° Supposons que g soit également une solution pour l'attribution k .

(a) Justifier que la fonction $f - g$ vérifie la condition (2).

(b) Que vaut $f - g$ sur \mathcal{J} ?

(c) En déduire que $f = g$.

6° Que peut-on dire de f s'il n'y a qu'un seul point jaune ?

PROBLÈME III
Les nombres en or

On note φ la plus grande racine réelle de l'équation $x^2 = x + 1$. Le nombre φ , connu depuis l'Antiquité, est appelé *nombre d'or*. Un réel x est dit un **nombre en or** s'il existe :

- deux entiers naturels p et q
- des entiers $a_p, a_{p-1}, \dots, a_0, \dots, a_{-q}$ ne prenant que les valeurs 0 ou 1 tels que

$$x = a_p \varphi^p + a_{p-1} \varphi^{p-1} + \dots + a_1 \varphi + a_0 + a_{-1} \varphi^{-1} + \dots + a_{-q} \varphi^{-q}.$$

Dans ce cas, on notera $x \triangleright a_p a_{p-1} \dots a_0, a_{-1} \dots a_{-q}$.

Par exemple si $x = \varphi^3 + \varphi^2 + 1 + \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^4}$, on notera $x \triangleright 1101, 1001$. On dira que alors 1101,1001 est une **représentation en or** de x .

Il est clair que l'on peut ajouter, au début, ou la fin de la représentation autant de 0 que l'on souhaite.

Une séquence de la représentation est une suite de 0 et de 1 qui apparaît dans la représentation. Dans l'exemple précédent, 10110 est une séquence de la représentation **1101, 1001**.

Partie A : Tous les entiers naturels sont en or

1° Montrer que, dans la représentation en or de x , on peut remplacer toute séquence 011 par 100 et réciproquement afin d'obtenir une autre représentation en or de x .

Par exemple le réel dont la représentation en or est 1101,1001 admet également 1110,0001 et 1101,0111 comme représentation en or.

On dira que les deux séquences 011 et 100 sont équivalentes.

2° Plus généralement, donner une séquence dans laquelle il n'y a jamais deux 1 consécutifs et qui soit équivalente à $011 \dots 1$ où il y a n occurrences du chiffre 1.

3° Montrer que les entiers 2 et 3 sont des nombres en or et en donner une représentation en or.

4° Montrer que tous les entiers naturels admettent une représentation en or.

Partie B : Représentation en or pur

On dira qu'une représentation $x \triangleright a_p a_{p-1} \dots a_0, a_{-1} \dots a_{-q}$ d'un nombre en or est en **or pur** si pour tout i ,

$$a_i a_{i+1} = 0.$$

En d'autres termes, une représentation de x est en or pur si elle ne contient jamais deux 1 consécutifs.

Soit x un réel non nul, si $x \triangleright a_p a_{p-1} \dots a_0, a_{-1} \dots a_{-q}$, on définit la **teneur en or** de la représentation comme étant égale à l'exposant de la plus grande puissance de φ dont le coefficient vaut 1, dans l'égalité $x = a_p \varphi^p + \dots + a_{-q} \varphi^{-q}$.

Par exemple la teneur de la représentation 1101,1001 est égale à 3 et celle de 0,0010 est égale à -3 .

1° Donner une représentation en or pur des entiers 2, 3, 4 et 5.

2° Soit x un réel ayant une représentation en or pur de teneur en or égale à n .

(a) Montrer que

$$\varphi^n \leq x < \varphi^{n+1}.$$

(b) Montrer que la représentation en or pur d'un réel, si elle existe, est unique.

3° Soit x un réel non nul ayant une représentation en or pur.

(a) Exprimer la teneur en or de la représentation en or pur de x à l'aide des fonctions logarithme népérien et partie entière.

(b) Écrire un algorithme permettant de déterminer cette représentation.

(c) Appliquer votre algorithme pour $x = 2018$.

4° Montrer qu'un réel en or possède forcément une représentation en or pur.

5° Montrer qu'il existe des réels strictement positifs qui ne sont pas en or.

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2019

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Classes de terminales S

DURÉE : 5 HEURES

<p>La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.</p>

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.

Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

Problème 1 : Ensembles remarquables de fonctions

On note \mathcal{P} l'ensemble des fonctions définies sur $[0, +\infty[$ et à valeurs dans $[0, +\infty[$.

Pour f et g dans \mathcal{P} , on définit la fonction $h = f \circ g$ en posant, pour tout nombre réel $x \geq 0$,

$$h(x) = f(g(x)).$$

Si, pour tout nombre réel $x \geq 0$, on a $f(x) \geq g(x)$, on note $f \geq g$.

On note u et v les fonctions de \mathcal{P} définies, pour tout nombre réel $x \geq 0$, par

$$u(x) = e^x - 1 \text{ et } v(x) = \ln(x + 1).$$

La fonction f est une *fonction polynomiale* si f est nulle ou s'il existe un entier $d \geq 0$ et des nombres réels a_0, a_1, \dots, a_d avec $a_d \neq 0$ tels que, pour tout nombre réel $x \geq 0$,

$$f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Les nombres réels a_0, a_1, \dots, a_d sont alors appelés coefficients de la fonction polynomiale f .

Si \mathcal{S} est un ensemble de fonctions de \mathcal{P} , on définit les propriétés :

- (P1) \mathcal{S} contient u et v .
- (P2) \mathcal{S} contient toutes les fonctions constantes positives.
- (P3) Si f et g sont dans \mathcal{S} , alors $f + g$ est dans \mathcal{S} .
- (P4) Si f et g sont dans \mathcal{S} , alors $f \circ g$ est dans \mathcal{S} .
- (P5) Si f et g sont dans \mathcal{S} avec $f \geq g$, alors $f - g$ est dans \mathcal{S} .
- (P6) Si f et g sont dans \mathcal{S} , alors $f \times g$ est dans \mathcal{S} .

- 1) Soit \mathcal{T} un ensemble de fonctions de \mathcal{P} qui vérifie les propriétés (P1), (P2), (P3), (P4), (P5) et (P6).
 - a) Soit ℓ la fonction définie, pour tout nombre réel $x \geq 0$, par $\ell(x) = x$. Démontrer que la fonction ℓ est dans \mathcal{T} .
 - b) Déterminer toutes les fonctions affines qui sont dans \mathcal{T} .
 - c) Soit p la fonction polynomiale définie, pour tout nombre réel $x \geq 0$, par $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Démontrer que la fonction p est dans \mathcal{T} .
 - d) Une fonction polynomiale de \mathcal{P} est-elle toujours dans \mathcal{T} ?
- 2) Dans cette question, on suppose que \mathcal{U} est un ensemble de fonctions de \mathcal{P} qui vérifie les propriétés (P1), (P2), (P3), (P4) et (P5), mais on ne suppose pas qu'il vérifie la propriété (P6). La réponse donnée à la question d) est-elle encore valable ?
- 3) Dans cette question, on suppose que \mathcal{V} est un ensemble de fonctions de \mathcal{P} qui vérifie les propriétés (P1), (P2), (P4), (P5) et (P6), mais on ne suppose pas qu'il vérifie la propriété (P3).
 - a) Soit d un entier naturel non nul. On note Q_d la fonction définie, pour tout nombre réel $x \geq 0$, par

$$Q_d(x) = (x + 1)^d - 1.$$

Montrer que $Q_d \in \mathcal{V}$.

- b) Soit d un entier naturel non nul. Démontrer qu'il existe des nombres entiers a_1, \dots, a_d supérieurs ou égaux à 1 tels que, pour tout nombre réel $x \geq 0$,

$$(x + 1)^d = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + 1.$$

Étant donné un nombre réel $x \geq 0$, on introduira une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres d et $\frac{x}{1+x}$.

- c) Soit f une fonction polynomiale telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel $c \geq 0$ et un entier naturel non nul d tels que la fonction qui, à tout nombre réel $x \geq 0$, associe

$$c(x + x^2 + \dots + x^d) - f(x)$$

est une fonction polynomiale dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

- d) En déduire que, si f est une fonction polynomiale de \mathcal{P} telle que $f(0) = 0$, alors f est dans \mathcal{V} .
e) Soit f une fonction dans \mathcal{P} .

- On dit que f est *segmentée* si elle vérifie la propriété :
pour tout nombre réel $a \geq 0$, il existe un nombre réel $b \geq 0$ tel que, pour tout x vérifiant $0 \leq x \leq a$,

$$0 \leq f(x) \leq b.$$

- On dit que f est *bornée* si elle vérifie la propriété :
il existe un nombre réel $b \geq 0$ tel que pour tout nombre réel $x \geq 0$,

$$0 \leq f(x) \leq b.$$

On note alors \mathcal{A} l'ensemble des fonctions segmentées et \mathcal{B} l'ensemble des fonctions segmentées qui sont nulles en 0 ou bornées.

- Soit f une fonction dans \mathcal{P} . On suppose f bornée. Démontrer que f est segmentée. La réciproque est-elle vraie?
 - Montrer que \mathcal{A} satisfait les propriétés (P1) à (P6).
 - Montrer que \mathcal{B} satisfait les propriétés (P1), (P2), (P4), (P5) et (P6), mais ne satisfait pas la propriété (P3).
- f) Une fonction polynomiale dans \mathcal{P} est-elle nécessairement dans \mathcal{V} ?

Problème 2 : Les nombres joviaux

Soient n et p deux entiers tels que $p \geq 2$ et $n \geq 1$. On dit que p est *jovial d'ordre n* s'il existe des entiers a_1, \dots, a_n tels que

$$2 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n, \quad a_n = p \quad \text{et} \quad \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1.$$

Ainsi, 12 est jovial d'ordre 4 car $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1$.

Un entier $p \geq 2$ est dit *jovial* s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que p soit jovial d'ordre n .

I – Quelques exemples

- Montrer que, si l'entier p est jovial d'ordre n , alors $n \leq p - 1$.
- Existe-t-il des entiers joviaux d'ordre 2? Montrer que 2 et 4 ne sont pas joviaux.
- Montrer qu'un entier premier n'est pas jovial.
- Quel est le plus petit entier jovial?
- Déterminer tous les entiers joviaux d'ordre 3.
- Soit p un entier jovial. Montrer que $2p$ et $p(p+1)$ sont joviaux.
- Montrer que le produit de deux entiers joviaux est jovial.

II – Deux suites d'entiers

On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $u_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 1$,

$$v_n = 1 + u_n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n(1 + u_n).$$

- Montrer, pour tout $n \geq 3$, que u_n est un entier jovial d'ordre n .
- Montrer, pour tout $n \geq 1$, que $v_{n+1} = v_1 v_2 \dots v_n + 1$.

III – Un majorant optimal pour les nombres joviaux d'ordre fixé.

Soit n un entier naturel non nul. On note \mathcal{H}_n la propriété suivante :

si x_1, \dots, x_n sont des entiers strictement positifs et a un nombre rationnel strictement positif tels que

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq a \quad \text{et} \quad \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{a} = 1,$$

alors $a + 1 \leq v_{n+1}$ et $x_1 \cdots x_n (a + 1) \leq v_1 \cdots v_n v_{n+1}$.

On se propose de démontrer par récurrence sur n que la propriété \mathcal{H}_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

1) Démontrer que la propriété \mathcal{H}_1 est vraie.

Dans les questions suivantes, on considère un entier $n \geq 2$, et on suppose que la propriété \mathcal{H}_{n-1} est vraie.

On considère des entiers strictement positifs x_1, \dots, x_n et un nombre rationnel strictement positif a tels que

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq a \quad \text{et} \quad \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{a} = 1.$$

2) Montrer que $x_1 \geq 2$ et que $a \leq x_1 x_2 \cdots x_n$.

3) On suppose dans cette question que $\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n - 1} \geq 1$ et que $x_n > x_{n-1}$.

a) Montrer qu'il existe un unique nombre rationnel q , strictement positif, tel que

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{q} = 1.$$

b) Montrer que $x_n - 1 \leq q$.

c) En déduire que $q + 1 \leq v_n$ puis que $x_1 x_2 \cdots x_n \leq v_1 v_2 \cdots v_n$.

d) En déduire que $a + 1 \leq v_{n+1}$ et $x_1 \cdots x_n (a + 1) \leq v_1 \cdots v_n v_{n+1}$.

4) On suppose dans cette question que $\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n - 1} \geq 1$ et que $x_n = x_{n-1}$.

a) Montrer que $x_n \geq 4$.

b) Montrer qu'il existe deux uniques nombres rationnels, strictement positifs, r et t tels que

$$\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - 1} = \frac{1}{x_n - 2} + \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_{n-2}} + \frac{1}{x_n - 2} + \frac{1}{t} = 1.$$

c) Montrer que $r = x_n + 1 + \frac{4x_n - 2}{x_n^2 - 4x_n + 2}$ puis que $(x_n - 2)(r + 1) \geq x_n^2$.

d) Montrer que $t \geq r \geq x_n$.

e) En déduire que $a + 1 \leq v_{n+1}$ et $x_1 \cdots x_n (a + 1) \leq v_1 \cdots v_n v_{n+1}$.

5) On suppose dans cette question que $\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n - 1} < 1$.

a) Montrer qu'il existe un unique nombre rationnel, strictement positif, b tel que

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n - 1} + \frac{1}{b} = 1.$$

b) Montrer que $(x_n - 1)(b + 1) \geq x_n(a + 1)$.

6) En déduire que la proposition \mathcal{H}_n est vraie.

Indication : dans le cas où

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n - 1} < 1,$$

on pourra chercher à remplacer x_n par $x_n - 1$ et a par b .

7) Montrer, pour tout entier $n \geq 3$, que u_n est le plus grand entier jovial d'ordre n .

Problème 3 : Plus d'une chance sur deux pour tout le monde

I – Des urnes et des dés

- 1) Dans cette question, on suppose que l'on dispose de trois urnes A , B et C qui contiennent chacune quatre jetons indiscernables au toucher. Les jetons de A portent les numéros 12, 10, 3 et 1, ceux de B portent les numéros 9, 8, 7 et 2, et ceux de C portent les numéros 11, 6, 5 et 4.

On tire indépendamment un jeton dans chacune des trois urnes, et on note respectivement X_A , X_B et X_C les numéros des jetons tirés dans A , B et C .

Montrer que $P(X_A > X_B) = \frac{9}{16}$ et que $P(X_B > X_C) = \frac{9}{16}$. Que vaut $P(X_C > X_A)$?

- 2) Dans cette question, on suppose que l'on dispose de trois dés cubiques et équilibrés D_1 , D_2 et D_3 . Les faces de D_1 portent les numéros 6, 3, 3, 3, 3, 3, celles de D_2 portent les numéros 5, 5, 5, 2, 2, 2, et celles de D_3 portent les numéros 4, 4, 4, 4, 4, 1.

- a) On lance indépendamment chacun de ces trois dés et on note respectivement X_1 , X_2 et X_3 les numéros indiqués par la face supérieure des dés D_1 , D_2 et D_3 .

Calculer les trois probabilités $P(X_1 > X_2)$, $P(X_2 > X_3)$ et $P(X_3 > X_1)$.

- b) Claire et Paul jouent au jeu suivant : l'un d'eux choisit un des trois dés. Puis l'autre joueur choisit un des deux dés restants. Ils lancent chacun leur dé et celui qui obtient le plus grand numéro gagne.

Claire a-t-elle intérêt à choisir son dé avant Paul ou à le laisser choisir en premier ?

- c) Finalement, il est décidé que c'est Paul qui choisit en premier. Quel(s) dé(s) a-t-il intérêt à choisir ?

- d) Claire et Paul décident alors de modifier les règles. L'un d'eux choisit un des trois dés. Puis l'autre joueur choisit un des deux dés restants. Ils lancent chacun leur dé deux fois de suite et celui dont la somme des numéros est la plus grande gagne.

Paul choisit en premier et il prend le dé D_2 . Quel dé Claire a-t-elle intérêt à choisir ?

De façon générale, avec ces nouvelles règles, Claire a-t-elle intérêt à choisir son dé avant Paul ou à le laisser choisir en premier ?

II – La suite de Fibonacci et des urnes

La suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

- 1) Montrer, pour tout entier $n \geq 3$, que $\sqrt{2}F_n < F_{n+1} < 2F_n$.
- 2) Soit $k \geq 4$ un entier. Dans cette question, on suppose que l'on dispose de trois urnes A , B et C ainsi que de $3F_k$ jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à $3F_k$. On répartit ces jetons de la façon suivante :

- les F_{k-2} jetons de plus grands numéros sont placés dans A ;
- les F_{k-1} jetons de plus grands numéros restants sont placés dans B ;
- les F_k jetons de plus grands numéros restants sont placés dans C ;
- les F_{k-1} jetons de plus grands numéros restants sont placés dans A ;
- les F_{k-2} derniers jetons sont placés dans B .

On tire indépendamment un jeton dans chacune des trois urnes, et on note respectivement X_A , X_B et X_C les numéros des jetons tirés dans A , B et C .

- a) Démontrer les trois inégalités :

$$P(X_A > X_B) > \frac{1}{2}, P(X_B > X_C) > \frac{1}{2} \text{ et } P(X_C > X_A) > \frac{1}{2}.$$

- b) Claire et Paul jouent au jeu suivant : l'un commence par choisir une des trois urnes ci-dessus et pioche un des jetons qu'elle contient. Puis l'autre joueur choisit une des deux autres urnes et pioche un des jetons qu'elle contient. Celui des deux qui obtient le jeton de plus grand numéro gagne.

Claire a-t-elle intérêt à choisir son dé avant Paul ou à le laisser choisir en premier?

III – Urnes non transitives

Soit $n \geq 3$ un entier. On dispose de trois urnes A , B et C et de $3n$ jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à $3n$. On répartit alors les jetons dans les trois urnes de sorte que chaque urne contienne n jetons. On tire alors indépendamment un jeton dans chacune des trois urnes, et on note respectivement X_A , X_B et X_C les numéros des jetons tirés dans A , B et C .

- 1) On suppose, dans cette question uniquement, que chacune des trois probabilités $P(X_A > X_B)$, $P(X_B > X_C)$ et $P(X_C > X_A)$ est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.

On dispose de trois autres urnes, D , E et F et de $3n+6$ jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à $3n+6$. Les $3n$ jetons numérotés de 1 à $3n$ ont été répartis comme précédemment dans les urnes A , B et C . Les urnes D , E et F sont alors remplies de la façon suivante :

- l'urne D reçoit le contenu de l'urne A , ainsi que les jetons numérotés $3n+1$ et $3n+6$;
- l'urne E reçoit le contenu de l'urne B , ainsi que les jetons numérotés $3n+4$ et $3n+5$;
- l'urne F reçoit le contenu de l'urne C , ainsi que les jetons numérotés $3n+2$ et $3n+3$.

Chacune des urnes D , E et F contient ainsi $n+2$ jetons. On tire alors indépendamment un jeton dans chacune des urnes D , E et F , et on note respectivement X_D , X_E et X_F les numéros des jetons tirés dans D , E et F .

- a) Exprimer $P(X_D > X_E)$ en fonction de n et $P(X_A > X_B)$.
 b) Montrer que chacune des probabilités $P(X_D > X_E)$, $P(X_E > X_F)$ et $P(X_F > X_D)$ est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.

- 2) Soit $n \geq 3$ un entier. On note \mathcal{H}_n la propriété suivante :

Il est possible de répartir $3n$ jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à $3n$, dans trois urnes A , B et C de sorte que les deux conditions ci-dessous soient satisfaites.

- Chacune des trois urnes contient n jetons.
- Si l'on tire indépendamment un jeton dans chacune de ces urnes et si l'on note respectivement X_A , X_B et X_C les numéros des jetons tirés dans A , B et C , alors chacune des probabilités $P(X_A > X_B)$, $P(X_B > X_C)$ et $P(X_C > X_A)$ est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.

- a) Montrer que les propriétés \mathcal{H}_3 et \mathcal{H}_4 sont vraies.
 b) Montrer, pour tout entier $n \geq 3$, que l'affirmation \mathcal{H}_n est vraie.