THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

LUNDI 2 JUILLET 1979

Temps: 4 heures.

(1) Soient p et q des entiers strictement positifs vérifiant :

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Montrer que 1979 divise p.

(2) On se donne un prisme dont les deux bases $A_1A_2A_3A_4A_5$ et $B_1B_2B_3B_4B_5$ sont des pentagones. Chaque côté de ces deux bases ainsi que chaque segment A_iB_j, pour i et j vérifiant $1 \leqslant i \leqslant 5$ et $1 \leqslant j \leqslant 5$, est coloré soit en rouge soit en vert.

On suppose que tout triangle dont les trois sommets sont des sommets du prisme et dont les trois côtés sont colorés, a deux côtés de couleurs differentes.

Montrer que les dix côtés des deux bases de ce prisme sont tous de la même couleur.

(3) Dans un plan on se donne deux cercles sécants C_1 et C_2 ; A est un de leurs points communs. Les points M_1 et M_2 parcourent respectivement, dans le même sens, les cercles C_1 et C_2, chacun avec une vitesse constante. A chaque tour les points M_1 et M_2 passent simultanément au point A.

Montrer qu'il existe un point fixe du plan qui est constamment équidistant de M_1 et M_2.

THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

MARDI 3 JUILLET 1979

Temps : 4 heures.

(4) On se donne un plan π , un point P appartenant a π et un point Q n'appartenant pas a π.
Trouver tous les points R du plan π tels que le quotient $(QP + PR)/QR$ soit maximum.

(5) Determiner toutes les valeurs du reel a pour lesquelles il existe cinq reels positifs ou nuls x_1, x_2, x_3 , x_4, x_5 verifiant les relations suivantes :

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3 .$$

(6) Soient A et E deux sommets diametralement opposes d'un octogone regulier convexe. Un pion qui peut occuper tous les huit sommets de cet octogone se deplace, a chaque coup, d'un sommet a l'un des deux sommets voisins; le pion part de A et le jeu se termine lorsqu'il atteint pour la premiere fois le point E .
On designe par a_n le nombre de "parties" distinctes de exactement n coups se terminant en E. Prouver que pour tout entier k, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_{2k-1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{k-1} - y^{k-1})$$

avec $x = 2+\sqrt{2}$ $\quad y = 2-\sqrt{2}$.
(Une "partie" de n coups est une suite de sommets $(P_0, \ldots P_n)$ verifiant les conditions suivantes :

(i) $P_0 = A$, $P_n = E$;

(ii) Pour tout i, $0 \leq i \leq n-1$, P_i est distinct de E;

(iii) Pour tout i, $0 \leq i \leq n-1$, P_i et P_{i+1} sont des sommets voisins.)

Premier Jour

Mar del Plata, Argentine - 24 Juillet 1997

1. Dans le plan, les points à coordonnées entières sont les sommets de carrés unités. Les carrés sont coloriés alternativement en blanc et en noir (comme sur un échiquier).

Pour tout couple d'entiers strictement positifs m et n, on considère un triangle rectangle dont les sommets sont des points à coordonnées entières et dont les côtés de l'angle droit, de longueurs m et n, suivent les côtés des carrés.

Soit S_1 l'aire totale de la partie noire du triangle et S_2 l'aire totale de sa partie blanche. On pose:

$$f(m,n) = |S_1 - S_2|.$$

(a) Calculer $f(m,n)$ pour tous les entiers strictement positifs m et n qui sont tous deux pairs ou tous deux impairs.

(b) Montrer que pour tout m et n : $\quad f(m,n) \leq \frac{1}{2}\max(m,n)$.

(c) Montrer qu'il n'existe pas de constante C telle que, pour tous m et n, $f(m,n) < C$.

2. L'angle $\hat{A}$ est le plus petit dans le triangle ABC.

Les points B et C divisent le cercle circonscrit au triangle en deux arcs. Soit U un point intérieur à l'arc limité par B et C qui ne contient pas A.

Les médiatrices des segments AB et AC rencontrent la droite AU respectivement en V et W. Les droites BV et CW se coupent au point T.

Montrer que:

$$AU = TB + TC.$$

3. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels vérifiant les conditions suivantes:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$$

et

$$|x_i| \leq \frac{n+1}{2} \qquad \text{pour} \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Montrer qu'il existe une permutation $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ telle que:

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

Chaque problème vaut 7 points.
Temps accordé: 4 heures et demie.

Deuxième Jour

Mar del Plata, Argentine - 25 Juillet 1997

4. Une matrice carrée à n lignes et n colonnes, à éléments dans l'ensemble $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$, est appelée une matrice *d'argent* si, pour tout $i = 1, \ldots, n$, la réunion de la i-ème ligne et de la i-ème colonne contient tous les éléments de S.
Montrer que:

(a) il n'existe pas de matrice d'argent pour $n = 1997$;

(b) il existe des matrices d'argent pour une infinité de valeurs de n.

5. Trouver tous les couples (a, b) d'entiers $a \geq 1$, $b \geq 1$ vérifiant l'équation:

$$a^{(b^2)} = b^a.$$

6. Pour tout entier strictement positif n, $f(n)$ désigne le nombre de façons de représenter n comme une somme de puissances de 2 à exposants entiers positifs ou nuls. Deux représentations qui ne diffèrent que par l'ordre des termes de la somme sont considérées comme les mêmes. Par exemple $f(4) = 4$ car le nombre 4 peut être représenté par les quatre façons suivantes: 4; $2+2$; $2+1+1$; $1+1+1+1$.
Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$:

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

Chaque problème vaut 7 points.
Temps accordé: 4 heures et demie.

12 juillet 2006

Problème 1. Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Un point P intérieur au triangle vérifie

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Montrer que $AP \geq AI$ et que l'égalité a lieu si et seulement si $P = I$.

Problème 2. Soit P un polygone régulier à 2006 côtés. Une diagonale de P est appelée *bonne* si ses extrémités partagent le contour de P en deux parties ayant chacune un nombre impair de côtés de P. Les côtés de P sont aussi appelés *bons*.

On suppose que P a été subdivisé en triangles par 2003 diagonales n'ayant deux à deux aucun point commun à l'intérieur de P. Trouver le nombre maximum de triangles isocèles ayant deux côtés bons qui peuvent apparaître dans une telle subdivision.

Problème 3. Trouver le plus petit réel M tel que l'inégalité

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

soit vérifiée pour tous nombres réels a, b et c.

Temps accordé: 4 heures et demie
Chaque problème vaut 7 points

13 juillet 2006

Problème 4. Trouver tous les couples (x, y) d'entiers vérifiant

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problème 5. Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients entiers, de degré $n > 1$ et k un entier strictement positif. On considère le polynôme $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, dans lequel P apparaît k fois. Montrer qu'il existe au plus n entiers t tels que $Q(t) = t$.

Problème 6. A tout côté b d'un polygone convexe P on associe le maximum de l'aire d'un triangle contenu dans P et ayant b comme côté. Montrer que la somme des aires associées à tous les côtés de P est au moins le double de l'aire de P.

Temps accordé: 4 heures et demie
Chaque problème vaut 7 points

Version: French

Premier jour
Mercredi 25 juillet 2007

Problème 1. Soit n nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pour chaque i $(1 \leq i \leq n)$ on définit

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

et on pose

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Montrer que pour tous nombres réels $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$,

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) Montrer qu'il existe des nombres réels $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ tels que $(*)$ soit une égalité.

Problème 2. On donne cinq points A, B, C, D et E tels que $ABCD$ soit un parallélogramme et $BCED$ un quadrilatère convexe, inscriptible. Soit ℓ une droite passant par A. On suppose que ℓ coupe l'intérieur du segment DC en F et coupe la droite BC en G. On suppose aussi que $EF = EG = EC$. Montrer que ℓ est la bissectrice de l'angle $\widehat{DAB}$.

Problème 3. Dans une compétition mathématique certains participants sont des amis. L'amitié est toujours réciproque. Un groupe de participants est appelé une *clique* si toute paire d'entre eux est formée de deux amis. (En particulier, chaque groupe d'au plus un participant constitue une clique.) Le nombre de participants dans une clique est appelé sa *taille*.

On suppose que, dans cette compétition, la plus grande taille des cliques est paire. Montrer que les participants peuvent être répartis dans deux pièces de telle sorte que la plus grande taille des cliques contenues dans une de ces pièces soit égale à la plus grande taille des cliques contenues dans l'autre.

Temps accordé : 4 heures 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Version: French

Deuxième jour
Jeudi 26 juillet 2007

Problème 4. Dans un triangle ABC la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$ recoupe le cercle circonscrit en R, coupe la médiatrice de BC en P et la médiatrice de AC en Q. Le milieu de BC est K et le milieu de AC est L. Montrer que les triangles RPK et RQL ont la même aire.

Problème 5. Soit a et b deux entiers strictement positifs. Montrer que si $4ab-1$ divise $(4a^2-1)^2$, alors $a=b$.

Problème 6. Soit n un entier strictement positif. Dans l'espace on considère l'ensemble

$$S = \Big\{(x, y, z) \ : \ x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, \ x + y + z > 0\Big\},$$

constitué de $(n+1)^3 - 1$ points. Trouver le plus petit nombre de plans dont la réunion contient S mais ne contient pas $(0, 0, 0)$.

Temps accordé : 4 heures 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Mercredi 16 juillet 2008

Problème 1. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus, et soit H son orthocentre. Le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de $[BC]$ coupe la droite (BC) en A_1 et A_2. De même, le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de $[CA]$ coupe la droite (CA) en B_1 et B_2, et le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de $[AB]$ coupe la droite (AB) en C_1 et C_2.

Montrer que A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont cocycliques.

Problème 2. (a) Montrer que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1$$

pour tous nombres réels x, y, z, différents de 1 et vérifiant $xyz = 1$.

(b) Montrer qu'il existe une infinité de triplets de nombres rationnels x, y, z, différents de 1 et vérifiant $xyz = 1$, pour lesquels l'inégalité ci-dessus est une égalité.

Problème 3. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers strictement positifs n tels que n^2+1 possède un diviseur premier strictement supérieur à $2n + \sqrt{2n}$.

Durée : 4 heures 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Jeudi 17 juillet 2008

Problème 4. Trouver toutes les fonctions f de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ telles que

$$\frac{\big(f(w)\big)^2+\big(f(x)\big)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

pour tous nombres réels strictement positifs w, x, y, z, vérifiant $wx=yz$.

Problème 5. Soient n et k des entiers strictement positifs tels que $k \geqslant n$ et $k-n$ est pair.

On suppose données $2n$ lampes numérotées de 1 à $2n$; chacune peut être *allumée* ou *éteinte*.

Au début, toutes les lampes sont éteintes.

Une *opération* consiste à allumer une lampe éteinte ou bien à éteindre une lampe allumée. On considère des séquences constituées d'opérations successives.

Soit N le nombre de séquences constituées de k opérations et aboutissant à l'état où les lampes de 1 à n sont allumées et les lampes de $n+1$ à $2n$ sont éteintes.

Soit M le nombre de séquences constituées de k opérations et aboutissant à l'état où les lampes de 1 à n sont allumées et les lampes de $n+1$ à $2n$ sont éteintes, mais où les lampes de $n+1$ à $2n$ n'ont jamais été allumées.

Déterminer le rapport N/M.

Problème 6. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $BA \neq BC$. Les cercles inscrits dans les triangles ABC et ADC sont notés respectivement ω_1 et ω_2. On suppose qu'il existe un cercle ω qui est tangent à la demi-droite $[BA)$ au-delà de A, tangent à la demi-droite $[BC)$ au-delà de C, et qui est aussi tangent aux droites (AD) et (CD).

Montrer que les tangentes communes extérieures à ω_1 et à ω_2 se coupent en un point de ω.

Durée : 4 heures 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Mercredi 15 juillet 2009

Problème 1. Soit n un entier strictement positif et soit $a_1, \dots, a_k$, avec $k \geqslant 2$, des entiers strictement positifs distincts appartenant à l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ tels que n divise $a_i(a_{i+1} - 1)$ pour $i = 1, \dots, k-1$.

Montrer que n ne divise pas $a_k(a_1 - 1)$.

Problème 2. Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Les points P et Q sont des points intérieurs aux côtés CA et AB respectivement. Soit K, L et M les milieux respectifs des segments BP, CQ et PQ, et soit Γ le cercle passant par K, L et M. On suppose que la droite (PQ) est tangente au cercle Γ.

Montrer que $OP = OQ$.

Problème 3. Soit $s_1, s_2, s_3, \dots$ une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs telle que les sous-suites

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \qquad \text{et} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

soient deux progressions arithmétiques.

Montrer que la suite $s_1, s_2, s_3, \dots$ est aussi une progression arithmétique.

Durée : 4 heures 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Jeudi 16 juillet 2009

Problème 4. Soit ABC un triangle tel que $AB = AC$. Les bissectrices de $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABC}$ rencontrent respectivement les côtés BC et CA en D et E. Soit K le centre du cercle inscrit dans le triangle ADC. On suppose que $\widehat{BEK} = 45°$.

Trouver toutes les valeurs possibles de $\widehat{CAB}$.

Problème 5. Déterminer toutes les fonctions f de l'ensemble des entiers strictement positifs dans l'ensemble des entiers strictement positifs telles que, pour tous entiers strictement positifs a et b, il existe un triangle non aplati dont les longueurs des côtés sont

$$a, \ f(b) \ \text{ et } \ f(b + f(a) - 1).$$

Problème 6. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers strictement positifs distincts et soit M un ensemble de $n-1$ entiers strictement positifs ne contenant pas $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Une sauterelle doit faire des sauts le long de l'axe réel ; partant du point 0, elle doit effectuer n sauts vers la droite de longueurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans l'ordre de son choix.

Montrer que la sauterelle peut choisir l'ordre de ses sauts de façon à ne passer par aucun point de M.

Mercredi 7 juillet 2010

Problème 1. Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f\big(\lfloor x \rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y) \big\rfloor.$$

(On note $\lfloor z \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à z.)

Problème 2. Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC et soit Γ son cercle circonscrit. La droite (AI) recoupe Γ en D. Soit E un point de l'arc $\widehat{BDC}$ et F un point du côté $[BC]$ tels que

$$\widehat{BAF} = \widehat{CAE} < \tfrac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Soit enfin G le milieu du segment $[IF]$.

Montrer que les droites (DG) and (EI) se coupent en un point de Γ.

Problème 3. $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers strictement positifs.

Déterminer toutes les fonctions $g\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que, pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

soit un carré parfait.

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Jeudi 8 juillet 2010

Problème 4. Soit P un point intérieur au triangle ABC. Les droites (AP), (BP) et (CP) recoupent Γ, cercle circonscrit au triangle ABC, respectivement aux points K, L et M. La tangente en C à Γ coupe la droite (AB) en S. On suppose que $SC = SP$.

Montrer que $MK = ML$.

Problème 5. Au début, chacune des six boîtes $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ contient un jeton. Deux types d'opération sont possibles :

Type 1 : Choisir une boîte non vide B_j avec $1 \leqslant j \leqslant 5$; ôter un jeton de la boîte B_j et ajouter deux jetons à la boîte B_{j+1}.

Type 2 : Choisir une boîte non vide B_k avec $1 \leqslant k \leqslant 4$; ôter un jeton de la boîte B_k et échanger les contenus des boîtes (éventuellement vides) B_{k+1} et B_{k+2}.

Est-il possible, à la suite d'un nombre fini de telles opérations, que les boîtes B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 soient vides et que la boîte B_6 contienne exactement $2010^{2010^{2010}}$ jetons ? (Noter que $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Problème 6. Soit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe un entier s strictement positif tel que, pour tout $n > s$, on ait :

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leqslant k \leqslant n-1\}.$$

Montrer qu'il existe des entiers strictement positifs ℓ et N, avec $\ell \leqslant s$, tels que, pour tout $n \geqslant N$:

$$a_n = a_\ell + a_{n-\ell}.$$

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Lundi 18 juillet 2011

Problème 1. Pour tout ensemble $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de quatre entiers strictement positifs deux à deux distincts, on note s_A la somme $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ et on note n_A le nombre de couples (i, j), avec $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, tels que $a_i + a_j$ divise s_A.

Déterminer les ensembles A pour lesquels n_A est maximal.

Problème 2. Soit $\mathcal{S}$ un ensemble fini de points du plan, contenant au moins deux points. On suppose que trois points quelconques de $\mathcal{S}$ ne sont pas alignés.

On appelle *moulin à vent* le processus suivant : le processus commence avec une droite ℓ contenant un unique point P de $\mathcal{S}$; la droite ℓ tourne, dans le sens des aiguilles d'une montre, autour du point P, appelé *pivot*, jusqu'à ce qu'elle rencontre pour la première fois un autre point de $\mathcal{S}$; ce point, Q, devient le nouveau pivot ; la droite continue alors sa rotation dans le sens des aiguilles d'une montre autour de Q, jusqu'à rencontrer un nouveau point de $\mathcal{S}$; ce processus continue indéfiniment.

Montrer qu'on peut choisir un point P de $\mathcal{S}$ et une droite ℓ contenant P, de façon que le moulin à vent commençant par ℓ utilise chaque point de $\mathcal{S}$ comme pivot une infinité de fois.

Problème 3. On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tous réels x, y,

$$f(x + y) \leqslant y f(x) + f(f(x)).$$

Montrer que $f(x) = 0$ pour tout réel $x \leqslant 0$.

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Mardi 19 juillet 2011

Problème 4. Soit n un entier strictement positif. On dispose d'une balance à deux plateaux et de n poids, de masses respectives $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$.
On doit placer, l'un après l'autre, chacun des n poids sur la balance de telle sorte que le plateau de droite ne soit jamais plus lourd que le plateau de gauche ; dans ce but, à chaque étape, on doit choisir un poids qui n'est pas déjà sur la balance et le placer soit sur le plateau de gauche, soit sur le plateau de droite ; on continue ainsi jusqu'à ce que tous les poids soient placés.
Déterminer le nombre de façons de procéder.

Problème 5. On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs.
Soit f une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que, quels que soient les entiers m, n, la différence $f(m) - f(n)$ est divisible par $f(m-n)$.
Quels que soient les entiers m, n vérifiant $f(m) \leqslant f(n)$, montrer que $f(n)$ est divisible par $f(m)$.

Problème 6. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et soit Γ son cercle circonscrit. Soit ℓ une droite tangente à Γ. Soit ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c les droites symétriques de ℓ par rapport respectivement aux droites (BC), (CA), (AB).
Montrer que le cercle circonscrit au triangle déterminé par les droites ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c est tangent à Γ.

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Mardi 10 juillet 2012

Problème 1. Soit ABC un triangle et J le centre de son cercle exinscrit opposé au sommet A. Ce cercle est tangent au côté $[BC]$ en M et aux droites (AB) et (AC), respectivement, en K et L. Les droites (LM) et (BJ) se coupent en F et les droites (KM) et (CJ) se coupent en G. Soit S le point d'intersection des droites (AF) et (BC) et soit T le point d'intersection des droites (AG) et (BC).

Montrer que M est le milieu du segment $[ST]$.

(Le cercle *exinscrit* du triangle ABC opposé au sommet A est le cercle tangent au segment $[BC]$, à la demi-droite $[AB)$ au-delà de B et à la demi-droite $[AC)$ au-delà de C)

Problème 2. Soit $n \geq 3$ un entier et soit $a_2, a_3, \ldots, a_n$ des nombres réels strictement positifs tels que $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Montrer que :

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \ > \ n^n.$$

Problème 3. La *devinette du menteur* est un jeu joué par deux joueurs A et B. Les règles du jeu dépendent de deux entiers strictement positifs k et n, connus par chacun des deux joueurs.

Au début du jeu, le joueur A choisit deux entiers x et N vérifiant $1 \leq x \leq N$. Le joueur A garde x secret et, honnêtement, communique N au joueur B. Le joueur B essaye d'obtenir des informations concernant x en posant au joueur A des questions comme suit : pour chaque question, B choisit un ensemble arbitraire d'entiers strictement positifs S (éventuellement déjà choisi pour une question antérieure) et demande à A si x appartient à S ; le joueur B peut poser autant de telles questions qu'il le souhaite. Après chaque question, le joueur A doit immédiatement répondre par *oui* ou *non*, mais il a le droit de mentir autant de fois qu'il le souhaite ; la seule restriction étant que parmi toutes $k+1$ réponses consécutives, au moins l'une de ces réponses doit être la vérité.

Après que B ait posé autant de questions qu'il le souhaite, il doit proposer un ensemble X contenant au plus n entiers strictement positifs. Si x appartient à X, alors B gagne, sinon, il perd. Montrer que :

1. Si $n \geq 2^k$, alors B dispose d'une stratégie gagnante.
2. Pour tout entier suffisamment grand k, il existe un entier $n \geq 1.99^k$ tel que B ne dispose pas de stratégie gagnante.

Temps accordé : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Mercredi 11 juillet 2012

Problème 4. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tous entiers a, b, c vérifiant $a+b+c=0$, on ait l'égalité suivante :

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

($\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs)

Problème 5. Soit ABC un triangle dans lequel $\widehat{BCA} = 90°$, et soit D le pied de la hauteur issue de C. Soit X un point intérieur au segment $[CD]$. Soit K le point du segment $[AX]$ tel que $BK = BC$. De même, soit L le point du segment $[BX]$ tel que $AL = AC$. Finalement, soit M le point d'intersection des droites (AL) et (BK).

Montrer que $MK = ML$.

Problème 6. Trouver tous les entiers strictement positifs n pour lesquels il existe des entiers positifs ou nuls $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que :

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Temps accordé : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Mardi 23 juillet 2013

Problème 1. Montrer que pour toute paire d'entiers strictement positifs, k et n, il existe k entiers strictement positifs $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (non nécessairement distincts) tels que

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Problème 2. Une configuration de 4027 points du plan est appelée *colombienne* si elle est constituée de 2013 points de couleur rouge et de 2014 points de couleur bleue, et si trois quelconques de ces points ne sont pas alignés. En traçant des droites, le plan est divisé en régions. Un tracé de droites est appelé *bon* pour une configuration colombienne si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- aucune droite tracée ne passe par un point de la configuration ;
- aucune région ne contient des points de couleurs différentes.

Trouver la plus petite valeur de k telle que, pour chaque configuration colombienne de 4027 points, il existe un bon tracé de k droites.

Problème 3. Soit ABC un triangle. Le cercle exinscrit au triangle ABC opposé au sommet A est tangent au côté BC au point A_1. Les points B_1 sur CA et C_1 sur AB sont définis de la même façon, en utilisant les cercles exinscrits opposés à B et C respectivement. On suppose que le centre du cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$ est un point du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Le cercle exinscrit *au triangle ABC opposé au sommet A est le cercle tangent au segment $[BC]$, à la demi-droite $[AB)$ au-delà de B et à la demi-droite $[AC)$ au-delà de C. Les cercles exinscrits opposés à B et à C sont définis de la même manière.*

Temps accordé: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Mercredi 24 juillet 2013

Problème 4. Soit ABC un triangle d'orthocentre H dont tous les angles sont aigus ; soit W un point du côté BC, compris strictement entre B et C. Les points M et N sont, respectivement, les pieds des hauteurs issues de B et de C. On note ω_1 le cercle circonscrit au triangle BWN et X le point de ω_1 tel que $[WX]$ en soit un diamètre. De la même façon, on note ω_2 le cercle circonscrit au triangle CWM et Y le point de ω_2 tel que $[WY]$ en soit un diamètre. Montrer que les points X, Y et H sont alignés.

Problème 5. On note $\mathbb{Q}_{>0}$ l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs. Soit $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant les trois conditions suivantes :

(i) pour tous $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, on a $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) pour tous $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, on a $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) il existe un nombre rationnel $a > 1$ tel que $f(a) = a$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}_{>0}$, on a $f(x) = x$.

Problème 6. Soit $n \geq 3$ un entier. On considère un cercle et $n+1$ points de ce cercle également espacés.
Lors d'un *étiquetage*, chaque point reçoit une étiquette portant l'un des nombres $0, 1, \ldots, n$ de telle sorte que chaque nombre soit exactement utilisé une fois et une seule. Deux étiquetages sont considérés comme les mêmes si l'un peut être obtenu à partir de l'autre par une rotation du cercle. Un étiquetage est appelé *beau* si pour quatre nombres quelconques $a < b < c < d$ figurant sur des étiquettes avec $a + d = b + c$, la corde joignant les points étiquetés a et d ne coupe pas la corde joignant les points étiquetés b et c.

Soit M le nombre d'étiquetages qui sont beaux, et soit N le nombre de couples (x, y) d'entiers strictement positifs tels que $x + y \leq n$ et $\text{pgcd}(x, y) = 1$. Montrer que

$$M = N + 1.$$

Temps accordé: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Mardi 8 juillet 2014

Problème 1. Soit $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ une suite infinie d'entiers strictement positifs. Prouver qu'il existe un unique entier $n \geq 1$ tel que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Problème 2. Soit $n \geq 2$ un entier. On considère un échiquier $n \times n$ divisé en n^2 cases. Une configuration de n jetons répartis dans ces cases est dite *paisible* si chaque ligne et chaque colonne de l'échiquier contient exactement un jeton. Déterminer le plus grand entier strictement positif k tel que, pour toute configuration paisible de n jetons, il existe un carré $k \times k$ qui ne contient aucun jeton dans ses k^2 cases.

Problème 3. Le quadrilatère convexe $ABCD$ est tel que $\widehat{ABC} = \widehat{CDA} = 90°$. Le point H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABD. Les points S et T appartiennent respectivement aux côtés AB et AD, de sorte que H soit à l'intérieur du triangle SCT et que

$$\widehat{CHS} - \widehat{CSB} = 90°, \quad \widehat{THC} - \widehat{DTC} = 90° .$$

Prouver que la droite BD est tangente au cercle circonscrit au triangle TSH.

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Mercredi 9 juillet 2014

Problème 4. Les points P et Q appartiennent au côté BC du triangle ABC dont les angles sont aigus, de sorte que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC}$. Les points M et N appartiennent respectivement aux droites AP et AQ, avec P milieu de $[AM]$ et Q milieu de $[AN]$. Prouver que le point d'intersection des droites BM et CN est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Problème 5. Pour tout entier n strictement positif, la Banque du Cap émet des pièces de valeur $\frac{1}{n}$. Étant donné un nombre fini de telles pièces (dont les valeurs ne sont pas nécessairement différentes) de valeur totale ne dépassant pas $99 + \frac{1}{2}$, prouver qu'il est possible de les répartir en 100 piles ou moins, chacune de valeur totale au plus 1.

Problème 6. Un ensemble de droites du plan est dit en *position générale* s'il n'y en a pas deux parallèles ni trois qui passent par un même point. Un ensemble de droites en position générale découpe le plan en régions, certaines ayant une aire finie. Ces dernières sont appelées les *régions finies de l'ensemble*. Prouver que pour tout n suffisamment grand, dans tout ensemble de n droites en position générale, il est possible de colorer en bleu au moins $\sqrt{n}$ de ses droites de sorte qu'il n'y ait aucune région finie de cet ensemble de bord entièrement bleu.

Note : Des résultats pour lesquels $\sqrt{n}$ serait remplacé par $c\sqrt{n}$ seront valorisés selon la valeur de la constante c.

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Vendredi 10 juillet 2015

Problème 1. On dit qu'un ensemble fini $\mathcal{S}$ de points du plan est *équilibré* si, pour tous points A et B de $\mathcal{S}$ distincts, il existe un point C de $\mathcal{S}$ tel que $AC = BC$. On dit que $\mathcal{S}$ est *excentrique* si, pour tous points A, B et C de $\mathcal{S}$ distincts, il n'existe pas de point P de $\mathcal{S}$ tel que $PA = PB = PC$.

(a) Prouver que pour tout entier $n \geqslant 3$, il existe un ensemble équilibré contenant exactement n points.

(b) Déterminer tous les entiers $n \geqslant 3$ pour lesquels il existe un ensemble équilibré et excentrique contenant exactement n points.

Problème 2. Déterminer tous les triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs pour lesquels chacun des nombres

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

est une puissance de 2.

(*Une puissance de* 2 *est un entier de la forme* 2^n, *où* n *est un entier positif ou nul.*)

Problème 3. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus, avec $AB > AC$. Soit Γ son cercle circonscrit, H son orthocentre et F le pied de sa hauteur issue de A. On désigne par M le milieu du segment $[BC]$. Soit Q le point de Γ tel que $\widehat{HQA} = 90°$ et soit K le point de Γ tel que $\widehat{HKQ} = 90°$. On suppose que les points A, B, C, K et Q sont tous distincts et dans cet ordre sur Γ.

Prouver que le cercle circonscrit au triangle KQH est tangent au cercle circonscrit au triangle FKM.

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Samedi 11 juillet 2015

Problème 4. Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Ω, et soit O le centre de Ω. Un cercle Γ de centre A rencontre le segment $[BC]$ aux points D et E, de sorte que B, D, E et C sont distincts et dans cet ordre sur la droite (BC). On note F et G les points d'intersection de Γ et Ω, de sorte que A, F, B, C et G sont dans cet ordre sur Ω. Soit K le second point d'intersection du cercle circonscrit au triangle BDF avec le segment $[AB]$. Soit L le second point d'intersection du cercle circonscrit au triangle CGE avec le segment $[CA]$.

On suppose que les droites (FK) et (GL) ne sont pas confondues et qu'elles se rencontrent au point X. Prouver que X appartient à la droite (AO).

Problème 5. Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

pour tous réels x et y.

Problème 6. La suite $a_1, a_2, \ldots$ d'entiers vérifie les conditions :

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ pour tout $j \geqslant 1$,

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ pour tous $1 \leqslant k < \ell$.

Prouver qu'il existe deux entiers strictement positifs b et N pour lesquels

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant 1007^2$$

pour tous les entiers m et n tels que $n > m \geqslant N$.

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Lundi 11 juillet 2016

Problème 1. Le triangle BCF est rectangle en B. Soit A le point de la droite (CF) tel que $FA = FB$ et que F se trouve entre A et C. Le point D est choisi tel que $DA = DC$ et que la droite (AC) soit la bissectrice de l'angle $\widehat{DAB}$. Le point E est choisi tel que $EA = ED$ et que (AD) soit la bissectrice de l'angle $\widehat{EAC}$. Soit M le milieu du segment $[CF]$, et X le point tel que $AMXE$ soit un parallélogramme (c'est-à-dire $(AM) \parallel (EX)$ et $(MX) \parallel (EA)$).

Montrer que les droites (BD), (FX) et (ME) sont concourantes.

Problème 2. Trouver tous les entiers strictement positifs n pour lesquels les cases d'un tableau $n \times n$ puissent chacune être remplies avec l'une des lettres I, M et O de sorte que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- dans chaque ligne et chaque colonne, exactement un tiers des cases contient la lettre I, un tiers contient la lettre M et un tiers contient la lettre O ;
- dans chaque diagonale composée d'un nombre de cases divisible par trois, exactement un tiers des cases contient la lettre I, un tiers contient la lettre M et un tiers contient la lettre O.

Note : les lignes et les colonnes d'un tableau $n \times n$ sont numérotées de 1 à n. Ainsi chaque case correspond à un couple (i, j) d'entiers strictement positifs $(1 \leq i, j \leq n)$. Pour $n > 1$, le tableau possède $4n - 2$ *diagonales* de deux types. Une diagonale du premier type est composée des cases (i, j) pour lesquelles $i + j$ est une constante, tandis qu'une diagonale du second type est composée des cases (i, j) pour lesquelles $i - j$ est une constante.

Problème 3. Soit $P = A_1 A_2 \ldots A_k$ un polygone convexe du plan dont les sommets $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ont des coordonnées entières et se trouvent sur un cercle. Soit S l'aire de P. Un entier naturel impair n est donné de sorte que le carré de la longueur de chaque côté de P soit divisible par n.

Montrer que $2S$ est un entier divisible par n.

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Mardi 12 juillet 2016

Problème 4. Un ensemble d'entiers naturels est dit *parfumé* s'il contient au moins deux éléments et si chacun de ses éléments possède un facteur premier en commun avec au moins l'un des autres éléments. Soit $P(n) = n^2 + n + 1$. Déterminer le plus petit entier strictement positif b pour lequel il existe un entier positif a tel que l'ensemble

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

soit parfumé.

Problème 5. L'équation

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

est écrite sur un tableau, avec 2016 facteurs linéaires dans chaque membre. Déterminer le plus petit entier positif k pour lequel il est possible d'effacer exactement k de ces 4032 facteurs de sorte que l'équation obtenue ait au moins un facteur dans chaque membre, mais n'ait aucune solution réelle.

Problème 6. Un nombre $n \geqslant 2$ de segments se trouvent dans le plan de sorte que deux segments quelconques se coupent en un point différent de leurs extrémités, mais sans que trois d'entre eux possèdent un point commun. Pour chaque segment, Geoff doit choisir une extrémité et y placer une grenouille tournée vers l'autre extrémité. Ensuite, il doit claquer des mains, au total $n-1$ fois. Chaque fois qu'il claque des mains, chaque grenouille saute immédiatement en avant sur son segment jusqu'au point d'intersection suivant. Les grenouilles ne changent jamais de direction.
Geoff souhaite placer les grenouilles de sorte qu'il n'y ait jamais plus d'une grenouille à chaque point d'intersection.

(a) Montrer que si n est impair, Geoff peut toujours trouver un placement des grenouilles qui satisfasse son souhait.

(b) Montrer que si n est pair, aucun placement des grenouilles ne satisfait son souhait.

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Mardi 18 juillet 2017

Problème 1. Pour tout entier $a_0 > 1$, on définit la suite $a_0, a_1, a_2, \ldots$ par :

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{si } \sqrt{a_n} \text{ est un entier,} \\ a_n + 3 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$

Déterminer toutes les valeurs de a_0 pour lesquelles il existe un nombre A tel que $a_n = A$ pour une infinité de valeurs de n.

Problème 2. Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x et y :

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Problème 3. Un lapin invisible et un chasseur jouent dans le plan Euclidien. La position initiale A_0 du lapin et la position initiale B_0 du chasseur coïncident. Après $n-1$ tours de jeu, le lapin se trouve au point A_{n-1} et le chasseur au point B_{n-1}. Lors du $n^{\text{ème}}$ tour de jeu, trois évenements successifs se produisent :

(i) le lapin se déplace sans être vu jusqu'en un point A_n tel que la distance entre A_{n-1} et A_n est égale à 1 ;

(ii) un système de localisation indique un point P_n au chasseur, avec pour seule garantie que la distance entre P_n et A_n ne dépasse pas 1 ;

(iii) le chasseur se déplace de manière visible jusqu'en un point B_n tel que la distance entre B_{n-1} et B_n est égale à 1.

Est-il toujours possible pour le chasseur que, quels que soient les déplacements du lapin et les points indiqués par le système de localisation, il puisse choisir ses déplacements de sorte qu'après 10^9 tours de jeu, il soit certain que la distance entre lui et le lapin ne dépasse pas 100 ?

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Mercredi 19 juillet 2017

Problème 4. Soit R et S des points distincts appartenant à un cercle Ω tels que le segment $[RS]$ n'est pas un diamètre de Ω. Soit ℓ la tangente à Ω en R. Le point T est tel que S est le milieu du segment $[RT]$. Le point J est choisi sur le plus petit arc $\widehat{RS}$ de Ω de sorte que le cercle Γ circonscrit au triangle JST rencontre ℓ en deux points distincts. Soit A le point commun de Γ et ℓ qui est le plus proche de R. La droite (AJ) recoupe Ω en K. Prouver que la droite (KT) est tangente à Γ.

Problème 5. Soit $N \geqslant 2$ un entier. Les $N(N+1)$ joueurs d'un club de football, tous de tailles différentes, sont placés en ligne. Clara souhaite exclure $N(N-1)$ joueurs de cette ligne afin que la ligne résultante formée par les $2N$ joueurs restants satisfasse aux N conditions suivantes :

(1) il n'y a personne entre les deux plus grands joueurs,

(2) il n'y a personne entre le troisième et le quatrième plus grand joueur,

$\vdots$

(N) il n'y a personne entre les deux plus petits joueurs.

Montrer que son souhait est toujours réalisable.

Problème 6. Une paire ordonnée (x, y) d'entiers est appelée *point primitif* si le plus grand diviseur commun de x et y est égal à 1. Un ensemble fini de points primitifs S étant donné, prouver qu'il existe un entier strictement positif n et des entiers a_0, a_1, ..., a_n tels que, pour tout (x, y) appartenant à S, on ait :

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Lundi 9 juillet 2018

Problème 1. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC dont tous les angles sont aigus. Les points D et E sont situés sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ respectivement, de sorte que $AD = AE$. Les médiatrices de $[BD]$ et $[CE]$ coupent les petits arcs AB et AC aux points F et G respectivement. Montrer que les droites (DE) et (FG) sont parallèles (ou confondues).

Problème 2. Déterminer tous les entiers $n \geqslant 3$ tels qu'il existe des nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ vérifiant $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ et

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$.

Problème 3. Un *anti-triangle de Pascal* est un tableau en forme de triangle équilatéral dans lequel sont disposés des nombres tels que, excepté pour les nombres placés sur la ligne du bas, chaque nombre soit égal à la valeur absolue de la différence entre les deux nombres situés juste en-dessous. Par exemple, le tableau ci-dessous est un anti-triangle de Pascal de quatre lignes qui contient chaque entier entre 1 et 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Existe-t-il un anti-triangle de Pascal de 2018 lignes qui contient tous les entiers de 1 à $1+2+\cdots+2018$?

Language: French

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Mardi 10 juillet 2018

Problème 4. Un *site* est un point (x, y) du plan tel que x et y soient des entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 20.

Initialement, chacun des 400 sites est inoccupé. Alice et Bernard placent chacun leur tour des pierres, en commençant par Alice. À son tour, Alice place une nouvelle pierre rouge sur un site inoccupé de sorte que la distance entre deux sites occupés par des pierres rouges soit différente de $\sqrt{5}$. À son tour, Bernard place une nouvelle pierre bleue sur un site inoccupé. (Un site occupé par une pierre bleue peut se trouver à une distance quelconque d'un site occupé.) Ils s'arrêtent dès qu'un joueur ne peut plus placer de pierre.

Déterminer le plus grand nombre K tel qu'Alice puisse s'assurer de placer au moins K pierres rouges, quelle que soit la manière de laquelle Bernard place ses pierres bleues.

Problème 5. Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite infinie d'entiers strictement positifs. On suppose qu'il existe un entier $N > 1$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, le nombre

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

soit un entier. Montrer qu'il existe un entier strictement positif M tel que $a_m = a_{m+1}$ pour tout $m \geqslant M$.

Problème 6. Un quadrilatère convexe $ABCD$ satisfait $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Un point X est situé à l'intérieur de $ABCD$ de sorte que

$$\widehat{XAB} = \widehat{XCD} \quad \text{et} \quad \widehat{XBC} = \widehat{XDA}.$$

Montrer que $\widehat{BXA} + \widehat{DXC} = 180°$.

Mardi 16 juillet 2019

Problème 1. On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que, pour tous les entiers a et b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Problème 2. Soit A_1 et B_1 deux points appartenant respectivement aux côtés $[BC]$ et $[AC]$ d'un triangle ABC. Soit également P et Q deux points appartenant respectivement aux segments $[AA_1]$ et $[BB_1]$, de sorte que les droites (PQ) et (AB) soient parallèles. Soit P_1 un point, situé sur la droite (PB_1), tel que B_1 se retrouve strictement entre P et P_1, et tel que $\widehat{PP_1C} = \widehat{BAC}$. De même, soit Q_1 un point, situé sur la droite (QA_1), tel que A_1 se retrouve strictement entre Q et Q_1, et tel que $\widehat{CQ_1Q} = \widehat{CBA}$.

Démontrer que les points P, Q, P_1 et Q_1 sont cocycliques.

Problème 3. Un réseau social compte 2019 membres. Certains de ces membres sont amis l'un avec l'autre, la relation d'amitié étant réciproque. Des événements du type décrit ci-dessous surviennent successivement, l'un après l'autre :

> Soit A, B et C trois membres tels que A soit ami avec B et C, mais que B et C ne soient pas amis ; alors B et C deviennent amis, mais A n'est plus ami ni avec B, ni avec C. Les autres relations d'amitié entre membres ne changent pas durant cet événement.

Initialement, 1010 membres ont 1009 amis chacun, et 1009 membres ont 1010 amis chacun. Démontrer qu'il existe une suite de tels événements à la suite desquels chaque membre aura au plus un ami.

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème est noté sur 7 points

Mercredi 17 juillet 2019

Problème 4. Trouver tous les couples d'entiers naturels non nuls (k, n) tels que

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Problème 5. La banque de Bath a émis des pièces dont une face est marquée de la lettre H et l'autre face est marquée de la lettre T. Morgane a aligné n de ces pièces de gauche à droite. Elle réalise alors plusieurs fois de suite l'opération suivante : si la lettre H est visible sur exactement k pièces, avec $k \geqslant 1$, alors Morgane retourne la $k^{\text{ème}}$ pièce en partant de la gauche ; si $k = 0$, elle s'arrête. Par exemple, si $n = 3$, le processus partant de la configuration THT sera

$$THT \to HHT \to HTT \to TTT;$$

Morgane s'arrête donc au bout de 3 opérations.

(a) Démontrer que, quelle que soit la configuration initiale, Morgane doit s'arrêter au bout d'un nombre fini d'opérations.

(b) Pour chaque configuration initiale C, on note $L(C)$ le nombre d'opérations que va réaliser Morgane avant de s'arrêter. Par exemple, $L(THT) = 3$ et $L(TTT) = 0$. Trouver la valeur moyenne des nombres $L(C)$ obtenus lorsque C parcourt l'ensemble des 2^n configurations initiales possibles.

Problème 6. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et tel que $AB \neq AC$. On note ω le cercle inscrit dans ABC, I le centre de ω, et D, E et F les points de tangence respectifs de ω avec les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit R le point de ω, autre que D, tel que la droite (DR) soit perpendiculaire à (EF). Soit P le point d'intersection, autre que R, entre la droite (AR) et le cercle ω. Enfin, soit Q le point d'intersection, autre que P, entre les cercles circonscrits à PCE et à PBF.

Démontrer que les droites (DI) et (PQ) sont sécantes en un point appartenant à la perpendiculaire à (AI) passant par A.

Language: French

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème est noté sur 7 points

lundi 21 septembre 2020

Problème 1. On considère un quadrilatère convexe $ABCD$. Un point P est situé à l'intérieur de $ABCD$. On suppose que les égalités de rapports ci-dessous sont vérifiées :

$$\widehat{PAD} : \widehat{PBA} : \widehat{DPA} = 1 : 2 : 3 = \widehat{CBP} : \widehat{BAP} : \widehat{BPC}.$$

Montrer que les trois droites suivantes se rencontrent en un point : la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ADP}$, la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{PCB}$ et la médiatrice du segment $[AB]$.

Problème 2. Soit a, b, c, d des nombres réels tels que $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d > 0$ et $a + b + c + d = 1$. Montrer que

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Problème 3. On se donne $4n$ cailloux de poids $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Chaque caillou est coloré en une couleur parmi n couleurs possibles, et il y a quatre cailloux de chaque couleur. Montrer que l'on peut répartir les cailloux en deux tas de sorte que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

— Les poids totaux des deux tas sont égaux.

— Chaque tas contient deux cailloux de chaque couleur.

mardi 22 septembre 2020

Problème 4. Soit $n > 1$ un entier. Il y a n^2 stations sur le versant d'une montagne, toutes à des altitudes différentes. Chacune des deux compagnies de téléphériques, A et B, gère k téléphériques ; chaque téléphérique permet de se déplacer d'une des stations vers une station plus élevée (sans arrêt intermédiaire). Les k téléphériques de A ont k points de départ différents et k points d'arrivée différents, et un téléphérique qui a un point de départ plus élevé a aussi un point d'arrivée plus élevé. Les mêmes conditions sont satisfaites pour B. On dit que deux stations sont *reliées* par une compagnie s'il est possible de partir de la station la plus basse et d'atteindre la plus élevée en utilisant un ou plusieurs téléphériques de cette compagnie (aucun autre mouvement entre les stations n'est autorisé).

Déterminer le plus petit entier strictement positif k qui garantisse qu'il existe deux stations reliées par chacune des deux compagnies.

Problème 5. On se donne un paquet de $n > 1$ cartes. Un entier strictement positif est écrit sur chaque carte. Le paquet a la propriété que la moyenne arithmétique des nombres écrits sur chaque paire de cartes est aussi égale à la moyenne géométrique des nombres écrits sur une certaine collection d'une ou plusieurs cartes.

Pour quels n cela implique-t-il que les nombres écrits sur les cartes sont tous égaux ?

Problème 6. Montrer qu'il existe une constante strictement positive c telle que l'assertion suivante soit vraie :

Considérons un entier $n > 1$, et un ensemble $\mathcal{S}$ de n points du plan tel que la distance entre deux points distincts dans $\mathcal{S}$ soit toujours au moins égale à 1. Alors il existe une droite ℓ qui sépare $\mathcal{S}$, de sorte que la distance de n'importe quel point de $\mathcal{S}$ à ℓ vaut au moins $cn^{-1/3}$.

(On dit qu'une droite ℓ *sépare* un ensemble de points $\mathcal{S}$ lorsque ℓ rencontre au moins un segment joignant deux points de $\mathcal{S}$.)

Remarque. Des résultats plus faibles avec $cn^{-\alpha}$ à la place de $cn^{-1/3}$ pourront recevoir des points selon la valeur de la constante $\alpha > 1/3$.