Troisième - Cours de mathématiques

Mathieu KIEFFER

Table des matières

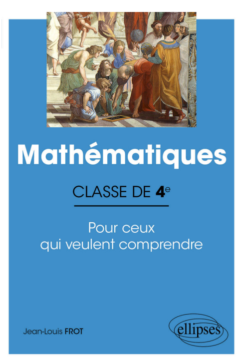
1. John Tukey est un statisticien américain né en 1915 et mort en 2000.

Introduction

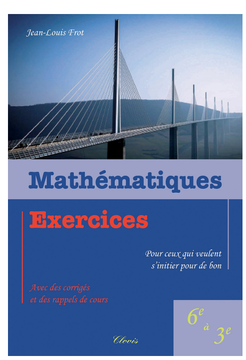
Ce cours est celui dispensé sur le terrain à mes élèves de Troisième. Il reprend les thèmes évoqués par le programme officiel avec un certain souci de rigueur tout en s'octroyant quelques libertés. Les objets mathématiques utilisés y sont toujours présentés via une définition claire et précise. Les théorèmes et autres résultats mathématiques sont démontrés dans la mesure du possible avec plus ou moins de détails. Les rares propositions laissées sans démonstration le sont car il n'existe tout simplement pas de démonstration accessible à ce niveau ; une référence aux cours des années suivantes est alors requise. Aussi, certaines démonstrations ont volontairement été rédigées de manière succincte voire très incomplète. L'objectif est clair : que l'élève prenne son stylo afin de se frotter à cette réalité mathématique et d'en délier le vrai du faux par sa propre expérience, ses propres efforts. De la même façon, vous trouverez des exemples et des exercices non traités tout au long de ce cours. En effet, lire un corrigé ou une solution n'apporte quasiment rien à la compréhension d'une notion. Apprendre, c'est avant tout faire par soi-même.

Ce cours comporte sans aucun doute des erreurs et est voué à évoluer à l'épreuve des séances. Il représente le strict minimum que tout élève de Sixième désireux d'étudier les mathématiques doit maîtriser en fin d'année scolaire. C'est pourquoi j'invite vivement cet élève à prolonger ses études à l'aide des remarquables ouvrages suivants :

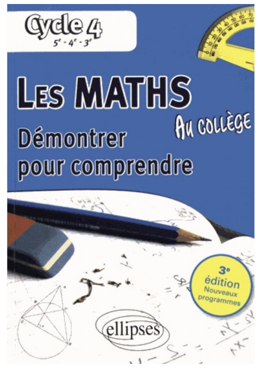
1. « Mathématiques - Classe de Troisième - Pour ceux qui veulent comprendre » de Jean-Louis Frot aux éditions Ellipses :



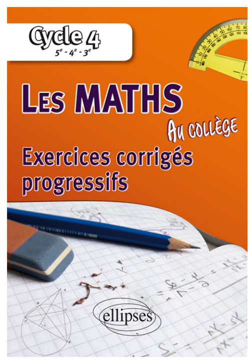
2. « Mathématiques - Exercices » de Jean-Louis Frot aux éditions Clovis :



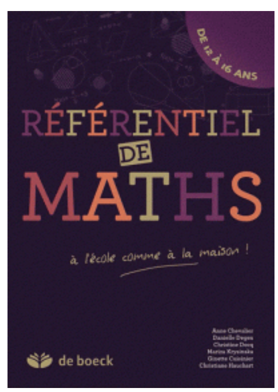
3. « Les mathématiques au collège : démontrer pour comprendre » d'Alexandre Casamayou-Boucau et François Pantigny aux éditions Ellipses :



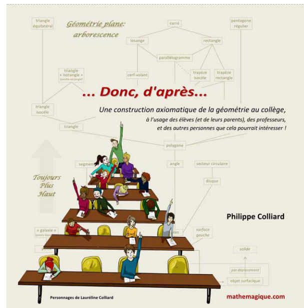
4. « Les mathématiques au collège : exercices corrigés progressifs » d'Alexandre Casamayou-Boucau et François Pantigny aux éditions Ellipses :



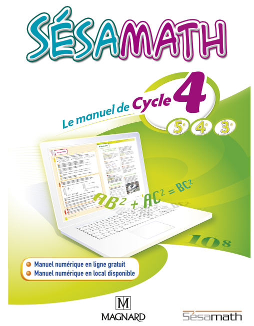
5. « Référentiel de maths - A l'école comme à la maison - De 12 à 16 ans » d'Anne Chevalier aux éditions De Boeck :



6. « Donc, d'après. Une construction axiomatique de la géométrie au collège » de Philippe Collard aux éditions Mathémagique.com :

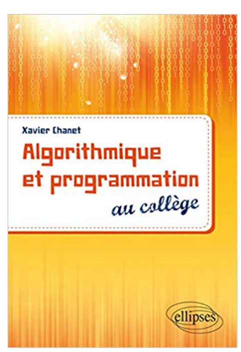


7. Les manuels et cahiers du collectif Sésamath :

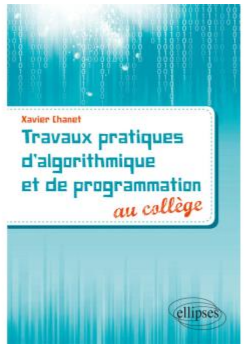


8. « Apprendre à programmer avec Scratch - Jeux et applications mathématiques » de Julien Jacquet aux éditions Ellipses :

9. « Algorithmique et programmation au collège » de Xavier Chanet aux éditions Ellipses :



10. « Travaux pratiques d'algorithmique et de programmation au collège » de Xavier Chanet aux éditions Ellipses :



Plus généralement, je vous invite à visiter mon site internet (www.mathieu-kieffer.com) rassemblant de nombreuses ressources permettant d'apprendre les mathématiques et de se passionner pour elles. Enfin, puisque rien ne peut se substituer à la relation professeur-élève, j'invite chacun de mes élèves à me demander de l'aide, à en savoir davantage, en un mot, à être éclairé, il n'en sera que plus heureux...

« Il n'y a de progrès, pour nul écolier au monde, ni en ce qu'il entend, ni en ce qu'il voit, mais seulement en ce qu'il fait. »

Émile-Auguste Chartier dit « Alain »

Chapitre 1

Division euclidienne

Euclide

(Grèce - 300 avt J.-C.)

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels. On peut donc écrire $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$. Dans ce chapitre, nous ne considérerons que les nombres entiers naturels.

1.1 Théorème et vocabulaire

Théorème 1. *(Théorème de la division euclidienne) Soient a et b deux entiers naturels avec b non nul ($b \neq 0$). Alors il existe un unique couple de nombres entiers naturels $(q; r)$ tels que :*

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r < b \end{cases}$$

Démonstration. Admise. □

Exemple. Dans la division euclidienne : $67 = 12 \times 5 + 7$, 67 est le dividende, 12 est le diviseur, 5 est le quotient et 7 est le reste.

Définition. Dans l'égalité $a = bq + r$ précédente, a est est appelé le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste de la division euclidienne de a par b.

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Si $a < b$, alors le quotient est nul et le reste est a.
2. Si $a = b$, alors le quotient est 1 et le reste est 0.
3. Il existe un algorithme permettant de poser une division euclidienne :
   (a) Posons la division euclidienne de 171 par 12.

   (b) Posons la division euclidienne de 9 876 par 15.
4. La division euclidienne traduit un partage. 3.(a) peut s'interpréter comme la répartition de 171 œufs dans des barquettes de 12 œufs. On a alors appris que 14 barquettes étaient remplies et qu'il resterait 3 œufs dans une quinzième barquette non remplie.

1.2 Divisibilité

Définition 2. Si, dans la division euclidienne de a par b, $r = 0$, alors on dit que b divise a, que b est un diviseur de a ou encore que a est un multiple de b.

Exemple. 105 est un multiple de 21 car $105 = 21 \times 5 + 0$. On dit aussi que 21 divise 105 ou encore que 21 est un diviseur de 105.

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. 1 divise tout nombre entier naturel.
2. Tout nombre entier naturel est un diviseur de lui-même.
3. 0 ne divise aucun nombre entier naturel non nul.
4. 0 est multiple de tout nombre entier naturel.

Proposition 3. *Voici deux résultats importants :*

1. *Si un nombre entier naturel en divise un autre, alors il divise aussi tous les multiples de celui-ci.*
2. *Si un nombre entier naturel en divise deux autres, alors il divise aussi la somme et la différence de ces nombres.*

Démonstration. Il suffit de l'écrire. □

Théorème 4. *(Critères de divisibilité) Soit n un entier naturel.*

1. *n est divisible par 2 si, et seulement si, son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.*
2. *n est divisible par 3 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 3.*
3. *n est divisible par 4 si, et seulement si, le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.*
4. *n est divisible par 5 si, et seulement si, son chiffre des unités est 0 ou 5.*
5. *n est divisible par 7 si, et seulement si, la somme de son nombre de dizaines et de cinq fois son chiffre des unités est divisible par 7.*
6. *n est divisible par 8 si, et seulement si, le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.*
7. *n est divisible par 9 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 9.*
8. *n est divisible par 10 si, et seulement si, son chiffre des unités est 0.*
9. *n est divisible par 11 si, et seulement si, la somme alternée de ses chiffres est divisible par 11.*

Démonstration. Pour 2, 3, 4, 5 et 8. □

Remarque. Il existe d'autres critères de divisibilité : par 13, par 17 etc. plus ou moins complexes.

Exemple. Étudions $n = 2\,457$.

Remarque. Si n est divisible par 6, alors, d'après la proposition 3, il est divisible par 2 et 3. La réciproque est aussi vraie mais on l'admet ici : si n est divisible par 2 et 3, alors n est divisible par 6. Attention, cette réciproque n'est pas toujours vraie : 4 divise 12, 6 divise 12 mais 4×6 ne divise pas 12.

Exemple. Déterminons l'ensemble des diviseurs de 312.

Chapitre 2

Algorithme d'Euclide

Euclide

(Grèce - 300 avt J.-C.)

Dans ce chapitre, nous ne traiterons que des nombres entiers naturels.

2.1 Division euclidienne

Remarque. On cherche à calculer le reste r de la division euclidienne de a par b :

1. Si $a < b$, alors le reste vaut $r = a$.
2. Sinon, $a \geqslant b$, donc on peut retrancher b à a. On réitère ce processus en remplaçant a par $a' = a - b$. Au bout d'un nombre fini d'itérations, le nombre a' devient strictement inférieur à b et donc cet algorithme se termine bien.

   Cette méthode est appelée « méthode des soustractions successives ».

Exemple. Déterminons, par la méthode des soustractions successives, le reste de la division euclidienne de 9 100 par 1 848.

Remarque. On peut résumer l'algorithme général à l'aide de l'arbre décisionnel suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \rightarrow & a \text{ et } b \text{ deux entiers naturels avec } b \neq 0 \\ \uparrow & & \downarrow \\ a \text{ prend la valeur } a-b \text{ et } b \text{ reste inchangé} & \xleftarrow{\text{NON}} & a < b\,? \\ & & \downarrow \text{ OUI} \\ & & \text{Le reste vaut } r = a \end{array}$$

2.2 L'algorithme d'Euclide

Proposition 5. *Pour tous nombres entiers naturels a et b, $PGCD(a;b) = PGCD(b;a)$.*

Démonstration. Évidente d'après la définition du PGCD. □

Remarque. Quitte à échanger a et b, on peut donc désormais supposer $a \geqslant b$.

Proposition 6. *Soient a et b deux nombres entiers naturels. Si $a \geqslant b$, alors $PGCD(a;b) = PGCD(a-b;b)$.*

Démonstration. Démontrons que l'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs à $a-b$ et b.
$\subset$: soit n un diviseur commun à a et b. Alors il existe des entiers k et l tels que : $a = k \times n$ et $b = l \times n$. D'où : $a - b = (k-l) \times n$. Ainsi, n divise $a-b$. Or n divise b, donc n est un diviseur commun à $a-b$ et b.
$\supset$: soit n un diviseur commun à $a-b$ et b. Alors il existe des entiers k et l tels que : $a-b = k \times n$ et $b = l \times n$. D'où : $a = (a-b)+b = (k+l) \times n$. Ainsi, n divise a. Or n divise b, donc n est un diviseur commun à a et b.
Par conséquent, a et b ont les mêmes diviseurs communs que $a-b$ et b. En particulier, $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(a-b;b)$. □

Proposition 7. *Soient a et b deux nombres entiers naturels. Soit r le reste de la division euclidienne de a par b. Alors $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$*

Démonstration. D'après la proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\text{PGCD}(a;b) &= \text{PGCD}(a-b;b) \\
&= \text{PGCD}(a-2b;b) \\
&\vdots \\
&= \text{PGCD}(a-qb;b) \\
&= \text{PGCD}(r;b) \\
&= \text{PGCD}(b;r)
\end{aligned}$$

□

Remarque. Ensuite, on réitère ce procédé en remplaçant b par r et r par le reste de la division euclidienne de b par r, etc. Au bout d'un nombre fini d'itérations, on tombe sur un reste nul...

Proposition 8. *Pour tout entier naturel a non nul, $PGCD(a;0) = a$.*

Démonstration. L'ensemble des diviseurs communs à a et 0 est l'ensemble des diviseurs de a (car tout entier divise 0), or le plus grand entier divisant a n'est autre que lui-même. □

Remarque. Ainsi, au bout d'un nombre fini d'itérations, on obtient le PGCD de a et b, c'est le dernier reste non nul dans la succession de divisions euclidiennes. Cette méthode était connue d'Euclide au $IV^{ème}$ siècle avant J.-C. et est appelée « l'algorithme d'Euclide ». On peut le résumer par l'arbre décisionnel ci-dessous :

$\longrightarrow$ a et b sont deux entiers naturels non nuls avec $a \geqslant b$

$\downarrow$

$\uparrow$ Calculer le reste de la division euclidienne de a par b

$\downarrow$

a prend la valeur b, b prend la valeur r, le PGCD est inchangé $\xleftarrow{\text{NON}}$ $r = 0\,?$

$\downarrow$ OUI

Le PGCD vaut b

Exemple. Déterminons le PGCD de 9 100 et 1 848.

Exercice. Déterminer le PGCD de 21 et 15.

Remarque. Les Grecs interprétaient le PGCD géométriquement. En effet, PGCD$(21; 15) = 3$ signifie que si l'on souhaite carreler une pièce rectangulaire (sans avoir à faire de découpes) de longueur 21 mètres et de largeur 15 mètres à l'aide de carreaux, alors la taille maximale des carreaux que l'on peut utiliser est de 3 mètres.

Chapitre 3

Nombres premiers

Ératosthène

(Cyrène 276 avt J.-C. - Alexandrie 194 avt J.-C.)

Dans ce chapitre, nous ne considérerons que les nombres entiers naturels.

3.1 Présentation

Définition 9. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On dit que n est premier si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et n.

Exemple. 7 est premier car ses seuls diviseurs sont 1 et 7. En revanche, 12 ne l'est pas car 3 divise 12.

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Par définition, 1 n'est pas premier.
2. 2 est l'unique entier pair premier. Par conséquent, tout nombre entier premier distinct de 2 est impair.

Théorème 10. *(Euclide) Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.*

Démonstration. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Raisonnons par disjonction de cas.
Si n est premier, alors n admet un diviseur premier, lui-même.
Si n n'est pas premier, alors l'ensemble des diviseurs de n supérieurs ou égaux à 2 n'est pas vide.
Donc cet ensemble admet un plus petit élément p. Raisonnons à présent par l'absurde. Si p n'était pas premier, alors il admettrait un diviseur d. Mais alors d diviserait n par transitivité de la relation de divisibilité. Ce qui contredirait la définition de p. Par conséquent, p est nécessairement premier. $\square$

Théorème 11. *(Euclide) L'ensemble des nombres premiers est infini. Autrement dit, la suite des nombres premiers est illimitée.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe un nombre fini n de nombres premiers : $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Posons $N \coloneqq p_1 \times \ldots \times p_n + 1$. $N \geqslant 2$, donc, d'après le théorème 10, N admet un diviseur premier. Celui-ci se trouve nécessairement parmi $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Notons p_i ce diviseur premier. La division euclidienne de N par p_i admet pour reste 1. Par conséquent p_i ne divise pas N. D'où la contradiction. Par conséquent, il ne peut exister un nombre fini de nombres premiers. □

Remarque. Il existe un moyen pratique d'obtenir la liste de tous les nombres premiers inférieurs à un certain entier que l'on s'est fixé à l'avance, par exemple 50. Il s'agit du crible d'Ératosthène [1]. Voici sa description :

1. On écrit tous les entiers de 1 à 50.
2. On barre 1 qui, par définition, n'est pas premier.
3. On barre tous les multiples de 2 sauf 2 qui est premier.
4. On barre tous les multiples de 3 sauf 3 qui est premier.
5. Les multiples de 4 ont déjà été barrés. Pourquoi ? Démonstration.
6. On barre les multiples de 5 sauf 5 qui est premier.
7. Les multiples de 6 ont déjà été barrés. Pourquoi ? Démonstration.
8. On barre les multiples de 7 sauf 7 qui est premier.
9. Les multiples de 8 ont déjà été barrés. Pourquoi ? Démonstration.
10. Les multiples de 9 ont déjà été barrés. Pourquoi ? Démonstration.
11. On s'arrête. Pourquoi ? Démonstration.
12. Les nombres non barrés sont des nombres premiers. Pourquoi ?

3.2 Décomposition d'un entier naturel en facteurs premiers

Théorème 12. *(Théorème fondamental de l'arithmétique - Euclide) Tout nombre naturel supérieur ou égal à 2 peut se décomposer en un produit de facteurs premiers. De plus, cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.*

Démonstration. 1. *Existence* : soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Raisonnons par disjonction de cas.
Si n est premier, alors c'est évident.
Sinon, d'après le théorème 18, n admet un diviseur premier $p_1 < n$. Ainsi, il existe un entier naturel $q_1 < n$ tel que $n = p_1 q_1$.
Si q_1 est premier, alors $n = p_1 \times q_1$ avec p_1 et q_1 premiers.
Sinon, d'après le théorème 7, q_1 admet un diviseur premier $p_2 < q_1$. Ainsi, il existe un entier naturel $q_2 < q_1$ tel que $q_1 = p_2 q_2$.
Si q_2 est premier, alors $n = p_1 \times p_2 \times q_2$ avec p_1, p_2 et q_2 premiers.
Sinon, on poursuit processus, obtenant $q_3, q_4, \ldots, q_n$ tels que $q_3 > q_4 > \ldots > q_n \geqslant 2$ avec q_n nécessairement premier.
Ainsi, $n = p_1 \times \ldots \times p_n \times q_n$ avec $p_1, \ldots, p_n, q_n$ premiers.
2. *Unicité* : admise. □

Exemple. Décomposons 315 et 1 400 en produit de facteurs premiers.

1. Ératosthène est un mathématicien grec du $III^{ème}$siècle avant J.-C.

Proposition 13. *Soient a et b deux entiers naturels. b divise a si, et seulement si, la décomposition en facteurs premiers de a contient tous les facteurs de la décomposition en facteurs premiers de b avec des exposants respectifs au moins égaux à ceux de b.*

Démonstration. Évidente d'après le théorème 20. □

Exemple. Expliquons pourquoi 21 divise 315 à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers.

Remarque. Cette décomposition en produit de facteurs premiers peut s'avérer utile lors de la réduction d'une fraction.

Exemple. Déterminons les fractions irréductibles égales aux fractions suivantes : $\frac{75}{720}$, $\frac{1\,815}{2\,385}$ et $\frac{8\,613}{9\,009}$.

3.3 PGCD

Proposition 14. *Soient a et b deux entiers naturels. Un nombre entier divise a et b si, sa décomposition en produit de facteurs premiers ne contient que des facteurs premiers communs à a et b, chacun d'eux affecté d'un exposant inférieur ou égal à son plus petit exposant dans la décomposition de a et b.*

Démonstration. Découle de la proposition 21. □

Exemple. Déterminons les diviseurs communs à 720 et 1 512. On a :

$$\begin{cases} 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \\ 1\,512 = 2^3 \times 3^3 \times 7 \end{cases}$$

Les diviseurs communs à 720 et 1 512 sont donc :

$$\begin{aligned} 2^0 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0 &= 1 \\ &\vdots \\ 2^3 \times 3^2 \times 5^0 \times 7^0 &= 72 \end{aligned}$$

On en déduit : $\text{PGCD}(720; 1\,512) = 72$.

Remarque. Le PGCD de deux entiers naturels a et b décomposés en produit de facteurs premiers s'obtient en faisant le produit des facteurs premiers communs à a et b, chaque facteur premier étant affecté du minimum des deux exposants dont il est affecté dans a et b.

Exemple. On a :

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(720; 1\,512) &= \text{PGCD}(2^4 \times 3^2 \times 5; 2^3 \times 3^3 \times 7) \\ &= 2^{\min(4;3)} \times 3^{\min(2;3)} \times 5^{\min(1;0)} \times 7^{\min(1;0)} \\ &= 2^3 \times 3^2 \times 5^0 \times 7^0 \\ &= 72 \end{aligned}$$

Théorème 15. *Les diviseurs communs à deux entiers naturels sont les diviseurs de leur PGCD. Plus formellement, pour tous entiers naturels a et b, $\mathscr{D}(a; b) = \mathscr{D}\left(PGCD(a; b)\right)$.*

Démonstration. Découle directement de la proposition 14. □

Proposition 16. *Deux nombres entiers naturels sont premiers entre eux si, et seulement si, leurs décompositions en produit de facteurs premiers n'admettent pas de facteur commun.*

Démonstration. Découle directement du théorème 12. □

Proposition 17. *Si l'on divise deux entiers naturels par leur PGCD, alors les quotients obtenus sont premiers entre eux.*

Démonstration. Découle directement de la définition du PGCD et de la définition de deux nombres premiers entre eux. □

Exemple. Le PGCD de 720 et 1 512 est 72 donc $\frac{720}{72} = 10$ et $\frac{1\,512}{72} = 21$ sont premiers entre eux.

3.4 PPCM

Proposition 18. *Soient a et b deux entiers naturels. Un nombre entier est un multiple commun à a et b si, et seulement si, sa décomposition en facteurs premiers contient au moins tous les facteurs premiers contenus dans a et b, chacun d'eux étant affecté d'un exposant supérieur ou égal à son plus grand exposant dans la décomposition de a et b.*

Démonstration. Évidente. □

Exemple. Déterminons quelques multiples communs à 360 et 500. On a :

$$\begin{cases} 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \\ 500 = 2^3 \times 5^3 \end{cases}$$

Les nombres suivants sont donc des multiples communs à 360 et 500 :

$$\begin{gathered} 2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 0 = 0 \\ \vdots \\ 2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 5 = 45\,000 \\ \vdots \end{gathered}$$

On en déduit : $\text{PPCM}(360; 500) = 9\,000$.

Remarque. Le PPCM de deux entiers naturels a et b décomposés en produit de facteurs premiers s'obtient en faisant le produit des facteurs premiers communs à a et b, chaque facteur premier étant affecté du maximum des deux exposants dont il est affecté dans a et b.

Exemple. On a :

$$\begin{aligned} \text{PPCM}(360; 500) &= \text{PPCM}(2^3 \times 3^2 \times 5; 2^2 \times 5^3) \\ &= 2^{\max(3;2)} \times 3^{\max(2;0)} \times 5^{\max(1;3)} \\ &= 2^3 \times 3^2 \times 5^3 \\ &= 9\,000 \end{aligned}$$

Théorème 19. *Les multiples communs à deux entiers naturels sont les multiples de leur PPCM. Plus formellement, pour tous entiers naturels a et b, $\mathscr{M}(a;b) = \mathscr{M}\left(PPCM(a;b)\right)$.*

Démonstration. Découle directement de la proposition 18. $\square$

Chapitre 4

Nombres réels

Augustin Louis Cauchy

(Paris 1789 - Sceaux 1857)

4.1 Les nombres rationnels

Remarque. Jusqu'à présent, nous avons utilisé plusieurs ensembles de nombres :

1. L'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$.
2. L'ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} = \{0; 1; -1; 2; -2; 3; -3; \ldots\}$.
3. L'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$. Il s'agit des nombres pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction où le numérateur est un nombre entier relatif et où le dénominateur est une puissance de 10 (i.e. 1, 10, 100, 1 000, etc.). Autrement dit, il s'agit des nombres dont la représentation décimale comporte un nombre fini de chiffres à droite de la virgule. Exemple : $-3,675 \in \mathbb{D}$ car $-3,675 = \frac{-3\,675}{1\,000}$.
4. On a également manipulé des fractions de nombres entiers (par exemple $\frac{11}{4}$) et des fractions de décimaux (par exemple $\frac{3,89}{27,2}$), ce qui nous invite à poser la définition suivante :

Définition 20. On appelle nombre rationnel tout nombre pouvant s'écrire sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers relatifs. On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Un même nombre rationnel peut avoir plusieurs représentants. Exemple : $\frac{-1}{3} = \frac{-2}{6} = \frac{4}{-12}$. Cela dit, on parlera tout de même « du » nombre rationnel $\frac{-1}{3}$ plutôt que de parler du nombre rationnel ayant pour représentant $\frac{-1}{3}$.
2. En pratique, on utilise souvent le représentant irréductible du nombre rationnel.

Proposition 21. *On a :* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Démonstration. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$: évident par définitions.
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$: soit $a \in \mathbb{Z}$, alors $a = \frac{10\times a}{10}$ avec $10a$ nombre entier relatif. Donc a est aussi un nombre décimal.
$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$: soit $a \in \mathbb{Z}$, alors a possède un nombre fini n de chiffres derrière la virgule et l'on a alors : $a = \frac{a\times\overbrace{10\times\ldots\times 10}^{n \text{ facteurs}}}{\underbrace{10\times\ldots\times 10}_{n \text{ facteurs}}}$. Par définition, a est donc un nombre rationnel. □

Exemple. $-3 \in \mathbb{Z}$ donc $-3 \in \mathbb{D}$ et $-3 \in \mathbb{Q}$.

4.2 Représentation décimale d'un nombre rationnel

Exemple. Voyons deux exemples :

1. Le nombre rationnel $\frac{423}{125}$ est-il décimal ?
   On remarque que $125 \times 8 = 1\,000$. D'où : $\frac{423}{125} = \frac{423\times 8}{125\times 8} = \frac{3\,384}{1\,000} = 3,384$. Ainsi, par définition, $\frac{423}{125}$ est un nombre décimal.
2. Le nombre rationnel $\frac{93}{22}$ est-il décimal ?
   Divisons 93 par 22, on obtient : $4,2272727272727272727\ldots$ Le quotient n'est pas exact, donc $\frac{93}{22}$ n'est pas décimal. En revanche, on remarque qu'aussi loin qu'on poursuive la division, le nombre « 27 » se répète à parti de la deuxième décimale et ce, indéfiniment. On dit alors que $4,2272727272727\ldots$ est le développement décimal de $\frac{93}{22}$. De plus, $4,2$ est appelé la partie irrégulière du développement, et 27 la partie périodique de ce développement.
3. Plus généralement : soit $x = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel. On suppose $\frac{p}{q}$ irréductible, autrement dit, on suppose : $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{PGCD}(p;q) = 1$. Effectuons la division de p par q :
   (a) Si la division se fait exactement, alors x est un nombre décimal et la fraction $\frac{p}{q}$ est appelée fraction décimale.
   (b) Sinon, la division se poursuit indéfiniment. Néanmoins, les restes partiels étant tous inférieures à q, il en résulte qu'après au plus q divisions, on retrouvera un reste déjà obtenu. A partir de ce stade, les chiffres du quotient réapparaîtront dans le même ordre (admis). Donc la partie du développement décimal sera périodique.

Théorème 22. *Le développement décimal d'un nombre rationnel est :*
1. *soit fini,*
2. *soit illimité et périodique à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Admise. □

Remarque. On doit se poser la question de la réciproque : est-ce que tout nombre dont le développement décimal illimité est périodique à partir d'un certain rang définit un nombre rationnel ?

Exemple. Voyons deux exemples :

1. Soit $x = 8,3864394394394394394394394439\ldots$. Supposons que ce développement décimal définisse un rationnel représenté par la fraction irréductible $\frac{p}{q}$. Alors :
   (a) $10\,000 \times \frac{p}{q}$ représente $83\,864,439439439439\ldots$
   (b) $\left(10\,000 \times \frac{p}{q}\right) - 83\,864$ représente $0,439439439439\ldots$
   (c) On pose $\frac{a}{b}$ la fraction $\left(10\,000 \times \frac{p}{q}\right) - 83\,864$. Alors $1\,000 \times \frac{a}{b} - 439$ représente $0,439439439439\ldots$.
   Autrement dit, $1\,000 \times \frac{a}{b} - 439$ représente $\frac{a}{b}$. D'où : $1\,000 \times \frac{a}{b} - 439 = \frac{a}{b}$ puis : $\frac{a}{b} = \frac{328}{999}$.
   (d) Finalement : $\frac{p}{q} = \frac{1}{10\,000}\left(83\,864 + \frac{a}{b}\right) = \frac{83\,780\,464}{9\,990\,000}$. Par conséquent, x est rationnel.

2. Soit $x = 4,289999999999\ldots$. Supposons que ce développement décimal définisse un rationnel représenté par la fraction irréductible $\frac{p}{q}$. Alors :
   (a) $100 \times \frac{p}{q}$ représente $428,9999999\ldots$
   (b) $\left(100 \times \frac{p}{q}\right) - 428$ représente $0,99999999\ldots$
   (c) On pose $\frac{a}{b}$ la fraction $\left(100 \times \frac{p}{q}\right) - 428$. Alors $10 \times \frac{a}{b} - 9$ représente $0,99999999\ldots$. Autrement dit, $10 \times \frac{a}{b} - 9$ représente $\frac{a}{b}$. D'où : $10 \times \frac{a}{b} - 9 = \frac{a}{b}$ puis : $\frac{a}{b} = 1$.
   (d) Finalement : $\frac{p}{q} = \frac{1}{100}\left(428 + \frac{a}{b}\right) = \frac{318}{100}$. Par conséquent, x est rationnel.
   (e) On convient de dire que $4,28999999\ldots$ est un développement décimal illimité impropre du nombre rationnel x dont $4,29$ est le développement décimal limité propre.

Remarque. Plus généralement, on admet le théorème suivant :

Théorème 23. *Soit x un nombre rationnel.*

1. *S'il est décimal, alors il lui correspond deux développements décimaux : l'un est limité (qualifié de propre) et l'autre est illimité avec une partie périodique valant « 9 ».*
2. *S'il n'est pas décimal, il lui correspond un unique développement décimal illimité, périodique, avec une période différente de « 9 ».*

Réciproquement :

1. *A tout développement décimal qui est, soit limité, soit illimité avec une période de période « 9 », correspond un unique nombre décimal.*
2. *A tout développement décimal illimité périodique, de période différente de « 9 », correspond un unique nombre rationnel non décimal.*

Démonstration. Admise. □

4.3 Les nombres irrationnels

Remarque. Est-il possible de concevoir un développement décimal illimité non périodique ? (Temps de réflexion - Exemple : $3,14404004000400004\ldots$)

Exemple. Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB = 1$. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BC^2 \\ 1^2 + 1^2 &= BC^2 \\ 2 &= BC^2 \end{aligned}$$

Proposition 24. *L'unique solution positive à l'équation $x^2 = 2$ n'est pas un nombre rationnel.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que ce nombre x soit un nombre rationnel. Alors il existe $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, avec $\mathrm{PGCD}(p;q) = 1$ tels que $x = \frac{p}{q}$. D'où : $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, c'est-à-dire : $p^2 = 2q^2$. Donc 2 divise p^2 et par suite, 2 divise p (car si p était impair, p^2 le serait aussi). On en déduit que 4 divise p^2. Or $p^2 = 2q^2$; donc 4 divise $2q^2$, et par suite, 2 divise q^2 et donc q (même raisonnement que précédemment). Ainsi, p et q sont pairs tous les deux, ce qui contredit $\mathrm{PGCD}(p;q) = 1$. Par conséquent, x ne peut pas être un nombre rationnel. □

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. En conclusion, l'hypoténuse du triangle ABC n'est pas un nombre rationnel. Mais ce nombre existe bel et bien puisqu'il mesure une longueur bien déterminée (diagonale du carré de côté 1). On l'appelle racine carrée de 2, et on le note : $\sqrt{2}$.
2. On peut déterminer une valeur décimale approchée de $\sqrt{2}$. Ce processus d'approximation décimale pourrait se poursuivre « à l'infini », ce qui justifie l'existence d'un développement décimal. Or $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, donc son développement décimal ne peut être qu'illimité non périodique.

Définition 25. On appelle nombre irrationnel tout nombre défini par un développement décimal illimité non périodique.

Remarque. Le nombre irrationnel le plus célèbre est π. Cependant, on ne peut pas démontrer l'irrationalité de π à notre niveau.

4.4 L'ensemble des nombres réels

Remarque. On admet que l'on peut regrouper les nombres rationnels et les nombres irrationnels dans un même ensemble sur lequel on peut en outre définir une addition et une multiplication.

Définition 26. On appelle nombre réel tout nombre admettant un développement décimal quelconque (limité, illimité périodique ou non), autrement dit une suite de chiffres en nombre fini à gauche de la virgule et en nombre quelconque à droite de celle-ci, précédée du signe $+$ ou $-$. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Remarque. On a alors : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Proposition 27. *Pour tous nombres réels a, b et c, on a :*

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ *(associativité de l'addition)*
2. $a+b = b+a$ *(commutativité de l'addition)*
3. $a+0 = 0+a = a$ *(0 est élément neutre pour l'addition)*
4. $a+(-a) = (-a)+a = 0$ *(existence d'un opposé)*

Démonstration. Admise. On prolonge les propriétés de l'addition des nombres rationnels. □

Proposition 28. *Pour tous nombres réels a, b et c, on a :*

1. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ *(associativité de la multiplication)*
2. $a \times b = b \times a$ *(commutativité de la multiplication)*
3. $a \times 1 = 1 \times a = a$ *(1 est élément neutre pour la multiplication)*
4. $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ *($\times$est distributive par rapport à l'addition)*
5. *Si $a \neq 0$, alors $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$ (existence d'un inverse)*

Démonstration. Admise. On prolonge les propriétés de la multiplication des nombres rationnels. □

Proposition 29. *Pour tous nombres réels a, b et c, on a :*

1. *$a = b$ si, et seulement si, $a+c = b+c$.*
2. *Si $c \neq 0$, alors $a = b$ si, et seulement si, $a \times c = b \times c$.*

Démonstration. On reproduit les mêmes démonstrations que celles réalisées sur les nombres décimaux. □

Proposition 30. *Pour tous nombres réels a et b, on a : $a \times b = 0$ si, et seulement si, $a = 0$ ou $b = 0$. On dit que l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est intègre.*

Démonstration. $\Rightarrow$: admise déjà vraie sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$.
$\Leftarrow$: découle du fait que 0 est absorbant pour la multiplication. $\square$

Remarque. Cette proposition permet de résoudre des équations assez facilement.

Exemple. Résolvons les équations suivantes :

1. $(E_1)\ :\ (2x+1)(3x-2) = 0$
2. $(E_2)\ :\ (2x+5)(x-3)(4x-7) = 0$
3. $(E_3)\ :\ 3x^2 + 11x = 0$
4. $(E_4)\ :\ x(x+3) = x+3$
5. $(E_5)\ :\ (2x+5)(x-3)(x+1) = \left(x+\frac{5}{2}\right)(4x+4)(x-2)$

4.5 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 31. Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$. L'ensemble des réels compris entre a et b est appelé un intervalle de $\mathbb{R}$. Plus précisément on a :

Notation	Lecture	Inégalité(s)	Représentation géométrique
$[a;b]$	Intervalle a, b fermé	$a \leqslant x \leqslant b$	
$[a;b[$	Intervalle a, b fermé en a, ouvert en b	$a \leqslant x < b$	
$]a;b]$			
$]a;b[$			
$[a;+\infty[$			
$]a;+\infty[$			
$]-\infty;b]$			
$]-\infty;b[$			

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. a et b sont appelées les bornes (ou les extrémités) de l'intervalle $[a;b[$.
2. $b-a$ est appelé la longueur de l'intervalle $]a;b]$.
3. $[a;a] = \{a\}$ et $]a;a[= \varnothing$.
4. $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$.
5. $\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$ et $\mathbb{R}_- =]-\infty;0]$.
6. $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$ et $\mathbb{R}_-^* =]-\infty;0[$.

Chapitre 5

Expressions algébriques

Al-Khwarizmi

(Khiva 780 - Bagdad 850)

5.1 Réduction d'une expression algébrique

Définition 32. On appelle expression algébrique toute expression dans laquelle plusieurs nombres sont représentés par des lettres.

Exemple. $3 \times (x+2)$, $ab+5$ et $u(v+3)$ sont des expressions algébriques.

Définition 33. Réduire une expression algébrique consiste à effectuer toutes les additions et soustractions possibles présentes afin d'obtenir une expression plus « simple ».

Exemple. $5x - 2x = 3x$, $7 - 4x + 11 - x = 18 - 5x$ ou encore $5x^2 - 7x - 12x^2 + 9 = -7x^2 - 7x + 9$.

Proposition 34. *On a les règles de signes suivantes :*

1. $+$ *devant* $+$ *se remplace par* $+$.
2. $-$ *devant* $-$ *se remplace par* $+$.
3. $+$ *devant* $-$ *se remplace par* $-$.
4. $-$ *devant* $+$ *se remplace par* $-$.

Démonstration. Cela découle de la « règle des signes » démontrée en classe de Quatrième. □

Exemple. Réduisons l'expression algébrique : $(x+5) - (x-13)$.

5.2 Développement d'une expression algébrique

Définition 35. Il existe deux distributivités de la multiplication par rapport à l'addition : la simple et la double. Soient a, b, c et d quatre nombres réels. On a :

1. *Simple distributivité* : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c = ab + ac$
2. *Double distributivité* : $(a+b) \times (c+d) = (a+b)(c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d = ac + ad + bc + bd$

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. Ces deux distributivités de $\times$ par rapport à $+$ peuvent se représenter géométriquement : (aires de rectangles).
2. Elles se généralisent aisément :
   (a) $a \times (b + c + d) = ab + ac + ad$. Démonstration.
   (b) $(a + b) \times (c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$. Démonstration.

Définition 36. Développer un produit consiste à transformer ce produit en une (ou plusieurs) somme(s) à l'aide de la distributivité de $\times$ par rapport à $+$.

Exemple. En voici deux :

1. $7(a + 3) = 7 \times a + 7 \times 3 = 7a + 21$.
2. $4(z + 3 - x) = 4 \times z + 4 \times 3 - 4 \times x = 4z - 4x + 12$.

5.3 Factorisation d'une expression algébrique

Définition 37. Factoriser une expression algébrique consiste à transformer cette expression en un produit d'un (ou plusieurs) facteur(s) à l'aide de la distributivité de $\times$ par rapport à $+$.

Exemple. En voici deux :

1. $3x + 6 + 21y = 3 \times x + 3 \times 2 + 3 \times 7y = 3 \times (x + 2 + 7y) = 3(x + 7y + 2)$.
2. $4a - 10 = 2 \times 2a - 2 \times 5 = 2 \times (2a - 5) = 2(2a - 5)$.

Remarque. On peut effecteur deux remarques :

1. La factorisation est la démarche inverse du développement. On ne s'étonnera donc pas que ces deux démarches utilisent la distributivité dans un sens contraire l'une de l'autre.
2. Lorsqu'on factorise une expression algébrique, on factorise toujours par « le plus grand diviseur commun » à tous les termes de la somme. Par exemple, $8x + 64 = 2(4x + 32)$ est une factorisation non terminée.

5.4 Les identités remarquables

Proposition 38. *Soient a et b deux nombres réels. On a :*

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Démonstration. Découlent directement de la double distributivité de $\times$ par rapport à $+$. □

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. Elles peuvent toutes les trois se représenter géométriquement : (aires de rectangles).

2. Ces trois identités remarquables permettent tout aussi bien de développer une expression algébrique que de la factoriser.

Exemple. Développons $(5x-3)^2$et factorisons $64x^2+112x+49$.

Chapitre 6

Équations

Al-Khawarizmi

(Khiva 780 - Bagdad 850)

6.1 Généralités

Définition 39. Toute égalité faisant intervenir une ou plusieurs quantités inconnues est appelée une équation. Les quantités inconnues sont traditionnellement désignées par des lettres minuscules (x, y, z, t, etc.). L'objectif est de résoudre l'équation, c'est-à-dire trouver toutes les valeurs que peuvent prendre les inconnues afin d'obtenir une égalité vraie.

Exemple. $6x + 3 = 21$ est une équation (du premier degré) d'inconnue x. Si l'on remplace x par 5, on obtient : $6 \times 5 + 3 = 21$, soit : $33 = 21$ qui est une égalité fausse. Par conséquent, 5 n'est pas solution de cette équation. En revanche, si l'on remplace x par 3, on obtient, : $6 \times 3 + 3 = 21$, soit : $21 = 21$ qui est une égalité vraie. Par conséquent, 3 est solution de cette équation. Des questions demeurent cependant :

1. Existe-t-il d'autres solutions que 3 ?
2. Existe-t-il un moyen mécanique de déterminer toutes les solutions d'une équation donnée ?

6.2 Égalité et opérations

Proposition 40. *Si l'on ajoute ou retranche un même nombre aux deux membres d'une égalité, alors on obtient une nouvelle égalité.*

Démonstration. On dit que l'addition et la soustraction sont compatibles avec l'égalité. Les raisons profondes de cette compatibilité nous échappent ici. □

Exemple. Si $a = b$, alors $a - 5 = b - 5$ et $a + 9 = b + 9$.

Remarque. Cette proposition nous invite à isoler les termes en x dans une équation.

Exemple. On a :

$$\begin{aligned} 2x - 4 + 5x &= 19 + 3x - 7 \\ 7x - 4 &= 3x + 12 \\ 7x - 3x &= 12 + 4 \\ 4x &= 16 \end{aligned}$$

Proposition 41. *Si l'on multiplie ou divise les deux membres d'une égalité par un même nombre (non nul dans le cas de la division), alors on obtient une nouvelle égalité.*

Démonstration. On dit que la multiplication et la division sont compatibles avec l'égalité. Les raisons profondes de cette compatibilité nous échappent ici. □

Exemple. Si $a = b$, alors $4 \times a = 4 \times b$ et $\frac{a}{3} = \frac{b}{3}$.

Remarque. Cette proposition nous invite à isoler les termes en x dans une équation.

Exemple. On a :

$$\begin{aligned} 2x - 4 + 5x &= 19 + 3x - 7 \\ 7x - 4 &= 3x + 12 \\ 7x - 3x &= 12 + 4 \\ 4x &= 16 \\ x &= \frac{16}{4} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Les égalités précédentes sont toutes équivalentes les unes aux autres. Ainsi, les solutions de l'une sont exactement les solutions d'une autre, on ne perd pas de solution et l'on ne gagne pas de solution au cours du mécanisme. On est donc certain d'avoir toutes les solutions de l'équation et seulement elles à la fin du processus.
2. Il est vivement conseillé de faire la vérification : on report chacune des solutions trouvées dans l'équation initiale et l'on vérifie que les membres de droite et de gauche sont bien égaux.

Exercice. Résoudre l'équation : $3(3x + 1) - 31 = 26 - 2(x + 5)$.

6.3 Diverses équations

6.3.1 Avec fractions rationnelles

Remarque. Certaines équations comportent un ou plusieurs termes sous forme de fractions rationnelles. Pour les résoudre, une méthode est efficace : la réduction au même dénominateur.

Exemple. Résolvons l'équation (E) : $\frac{x+1}{3} - \frac{x+2}{6} = \frac{3(2x-1)}{6}$.

Exercice. Résoudre les équations suivantes :

1. (E_1) : $\frac{5}{2}x + 3 - \frac{7x}{4} = x + \frac{9}{4}$
2. (E_2) : $\frac{x}{4} + \frac{3}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{6} - 1$

3. $(E_3)\,:\,\frac{x+2}{2}-\frac{x}{4}=3$
4. $(E_4)\,:\,\frac{5x-3}{4}-\frac{3x-5}{8}=6$
5. $(E_5)\,:\,\frac{7x-3}{2}-\frac{3x+4}{4}=\frac{8x-5}{3}$
6. $(E_6)\,:\,\frac{4(2x+3)}{5}-\frac{3x+2}{7}=\frac{7x-11}{4}-\frac{3}{2}$
7. $(E_7)\,:\,\frac{4x-1}{3}-\frac{7x-3}{11}=\frac{5x-2}{7}$
8. $(E_8)\,:\,\frac{5x-7}{8}-\frac{2(x+2)}{7}=\frac{4x+9}{5}$
9. $(E_9)\,:\,\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}=\frac{2x+7}{(x-1)(x-2)}$
10. $(E_{10})\,:\,\frac{x-5}{x-1}=\frac{x+3}{x+4}$

6.3.2 Équations produit

Proposition 42. *Un produit de facteurs réels est nul si, et seulement si, l'un au moins des facteurs est nul. Plus formellement, on a l'équivalence suivante :*

$$(xy=0)\Leftrightarrow(x=0\ ou\ y=0)$$

Démonstration. Conséquence du fait que 0 est l'unique élément absorbant au sein des nombres réels. □

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. On dit que l'ensemble des nombres réels est intègre.
2. Cette propriété des nombres réels nous permet de résoudre des équations de la forme $A(x)\times B(x)=0$, appelées équations produit (ou encore équations produit nul)

Exemple. Résolvons l'équation $(E)\,:\,(2x+1)(3x-2)=0$.

Remarque. Il est parfois intéressant de modifier la forme d'une équation afin de se ramener à une équation produit.

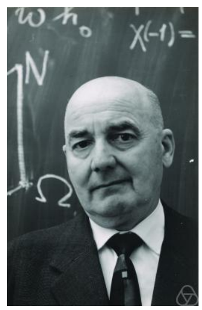
Exemple. Résolvons l'équation $(F)\,:\,(x+1)^2-4(x+2)^2$.

Exercice. Résoudre les équations suivantes :

1. $(E_1)\,:\,(2x+5)(x-3)(4x-7)=0$
2. $(E_2)\,:\,3x^2+11x=0$
3. $(E_3)\,:\,x(x+3)=x+3$
4. $(E_4)\,:\,(3x-7)(4x-1)=(4x-1)(x+5)$
5. $(E_5)\,:\,25x^2-49$
6. $(E_6)\,:\,(x-1)^2-(x+3)^2=0$
7. $(E_7)\,:\,x^3=4x$
8. $(E_8)\,:\,4(x-1)^2=(3x+2)^2$
9. $(E_9)\,:\,x^2+25x=10x$
10. $(E_{10})\,:\,(x+3)(5x-2)=(x+3)(x+2)-x^2+9$

Chapitre 7

Inéquations



Helmut Hasse

(Cassel 1 898 - Ahrensburg 1 979)

Nous noterons :

1. $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
2. $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
3. $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls.
4. $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels positifs non nuls.
5. $\mathbb{R}_-^*$ l'ensemble des nombres réels négatifs non nuls.

7.1 Ordre sur les nombres réels

Définition 43. Soient a et b deux nombres réels. On dit que a est inférieur à b, et l'on note $a \leqslant b$, si la différence $b - a$ est positive ou nulle. On dit que a est supérieur à b, et l'on note $a \geqslant b$, si la différence $b - a$ est négative ou nulle.

Remarque. Pour comparer deux nombres, on étudie le signe de leur différence.

Définition 44. Soient a et b deux nombres réels. On dit que a est strictement inférieur à b, et l'on note $a < b$, si la différence $b - a$ est positive. On dit que a est strictement supérieur à b, et l'on note $a > b$, si la différence $b - a$ est négative.

Remarque. La relation « $\leqslant$ » est une relation d'ordre, c'est-à-dire qu'elle est :

1. Réflexive : pour tout nombre réel a, on a : $a \leqslant a$.
2. Antisymétrique : pour tous nombres réels a et b, on a : $\begin{cases} a \leqslant b \\ b \leqslant a \end{cases} \Rightarrow a = b$.

3. Transitive : pour tous nombres réels a, b et c, on a : $\begin{cases} a \leqslant b \\ b \leqslant c \end{cases} \Rightarrow a \leqslant c.$

Proposition 45. *Pour tous nombres réels a, b et c, $a \leqslant b$ si, et seulement si $a + c \leqslant b + c$.*

Démonstration. La même démonstration que celle sur les nombres décimaux fonctionne ici. □

Remarque. Dans une inégalité, on peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre à condition de changer son signe. Plus formellement, on a :

$$a + c \leqslant b$$
$$a + c + (-c) \leqslant b + (-c)$$
$$a \leqslant b - c$$

Proposition 46. *Pour tous nombres réels a, b, c et d, si $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases}$ alors $a + c \leqslant b + d$.*

Démonstration. La même démonstration que celle sur les nombres décimaux fonctionne ici. □

Remarque. La réciproque est fausse. Trouvons un contre-exemple...

Proposition 47. *Pour tous nombres réels a, b et c :*

1. *Si $\begin{cases} a \geqslant 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases}$, alors $ab \geqslant 0$.*
2. *Si $\begin{cases} a \geqslant 0 \\ b \leqslant 0 \end{cases}$, alors $ab \leqslant 0$.*
3. *Si $\begin{cases} a \leqslant 0 \\ b \leqslant 0 \end{cases}$, alors $ab \geqslant 0$.*

Démonstration. La même démonstration que celle sur les nombres décimaux fonctionne ici. □

Proposition 48. *Pour tous nombres réels a, b et c :*

1. *Si $c \geqslant 0$, alors $a \leqslant b$ équivaut à $ac \leqslant bc$.*
2. *Si $c \leqslant 0$, alors $a \leqslant b$ équivaut à $ac \geqslant bc$.*

Démonstration. Démontrons le point 2. Soit $c < 0$.
$\Rightarrow$: supposons $a \leqslant b$. On a : $ac - bc = (a - b)c$. Or $a - b \leqslant 0$ et $c < 0$. Donc, d'après la règle des signes, $(a - b)c \geqslant 0$. Autrement dit, $ac \geqslant bc$.
$\Leftarrow$: supposons $ac \geqslant bc$. Raisonnons par l'absurde et supposons $a > b$. Alors $a - b > 0$. Or $c < 0$. Donc, d'après la règle des signes, $ac - bc = (a - b)c < 0$. Autrement dit, $ac < bc$. Ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de départ. Donc $a \leqslant b$. □

Remarque. On peut effectuer trois remarques :

1. On ne change pas le sens d'une inégalité en multipliant (en divisant) par un nombre positif (strictement positif).
2. On change le sens d'une inégalité en en multipliant (en divisant) par un nombre négatif (strictement négatif).
3. Les propositions précédentes demeurent vraies si l'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes.

7.2 Méthodes de résolution d'inéquations

Définition 49. On appelle inéquation toute inégalité dont les membres comportent une quantité au moins une quantité inconnue. Ces quantités inconnues sont traditionnellement notées x, y, z, t, etc. L'objectif est de résoudre cette inéquation, c'est-à-dire de trouver toutes les valeurs par lesquelles on peut remplacer x afin d'obtenir une inégalité vraie.

Exemple. $(I)\ :\ 2x-5<7x+1$ est une inéquation d'inconnue x. Si l'on remplace x par -4, alors on obtient : $-13<-27$ qui est une inégalité fausse. Donc -4 n'est pas solution de (I). A contrario, si l'on remplace x par 5, alors on obtient : $5<36$ qui est une inégalité vraie, donc 5 est solution de (I).

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. Pour trouver toutes les solutions d'une inéquation, on peut essayer d'« isoler x » à l'aide de la section précédente :

$$\begin{aligned} 2x-5 &< 7x+1 \\ (2x-5)-2x &< (7x+1)-2x \\ -5 &< 5x+1 \\ -5-1 &< (5x+1)-1 \\ -6 &< 5x \\ -\frac{6}{5} &< x \end{aligned}$$

   Tous les nombres réels strictement supérieurs à $-\frac{6}{5}$ sont donc solutions de (I).
2. Il n'est pas toujours possible ou judicieux de vouloir isoler x. Prenons l'inéquation $(J)\ :\ (2x+1)(-3x+4)\geqslant 0$.
   Il s'agit ici de déterminer les valeurs de x pour lesquelles le produit $(2x+1)(-3x+4)$ est positif. D'après la règle des signes, il faut et il suffit que les deux facteurs soient positifs tous les deux ou négatifs tous les deux. On peut donc à présent résoudre séparément les inéquations $2x+1\geqslant 0$ et $-3x+4\geqslant 0$ puis de résumer le tout dans un tableau de signes.

Exercice. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(I_1)\ :\ 2(x-1)+7\leqslant 5(x-3)-4$
2. $(I_2)\ :\ 13(x-8)+7(2x-19)\leqslant 8(x-5)-5(19-x)$
3. $(I_3)\ :\ \frac{5}{2}x+3-\frac{7x}{4}\leqslant x+\frac{9}{4}$
4. $(I_4)\ :\ \frac{2x}{3}+4-\frac{2x}{5}>\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{11}{2}$
5. $(I_5)\ :\ \frac{5x-7}{8}-\frac{2(x+2)}{7}\geqslant\frac{4x+9}{5}$
6. $(I_6)\ :\ (x+1)(x-2)\geqslant x^2-4$
7. $(I_7)\ :\ (x+2)^2+(x-1)^2<2x^2+2x$
8. $(I_8)\ :\ (2x+5)^2-(3-x)^2\geqslant 0$
9. $(I_9)\ :\ (x-1)(5x+2)<(x-1)(x+2)$
10. $(I_{10})\ :\ \frac{2x-5}{x-1}<0$

Chapitre 8

Le cercle

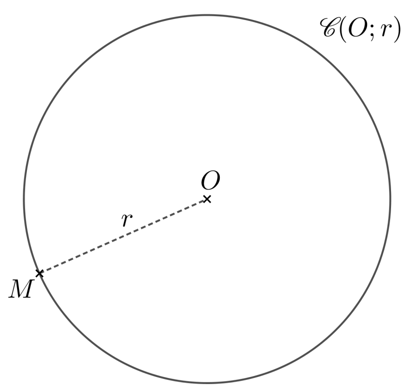
Euclide

(Grèce - 300 avt J.-C.)

8.1 Détermination d'un cercle

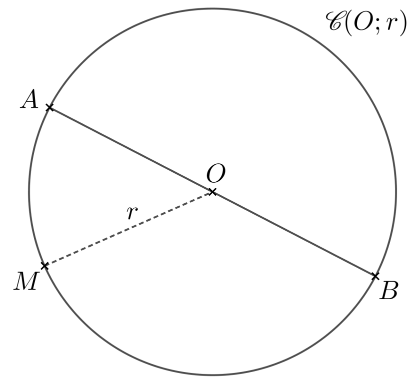
Définition 50. Soit O un point du plan. Soit r un nombre réel positif. On appelle cercle de centre O et de rayon r, noté $\mathscr{C}(O;r)$, l'ensemble des points M du plan situés à une distance r de O. Plus formellement, $\mathscr{C}(O;r) = \{M \in \mathscr{P},\ OM = r\}$.

Illustration :



Vocabulaire : On appelle corde tout segment ayant pour extrémités deux points distincts du cercle. On appelle diamètre toute corde passant par le centre du cercle. On dit que deux points du cercle sont diamétralement opposés s'ils sont les extrémités d'un diamètre.

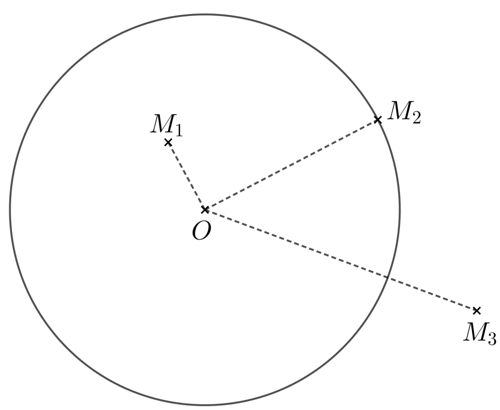
Illustration :



Définition 51. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon r. Soit M un point du plan. On dit que :

1. M est intérieur à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $OM < r$.
2. M appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $OM = r$.
3. M est extérieur à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $OM > r$.

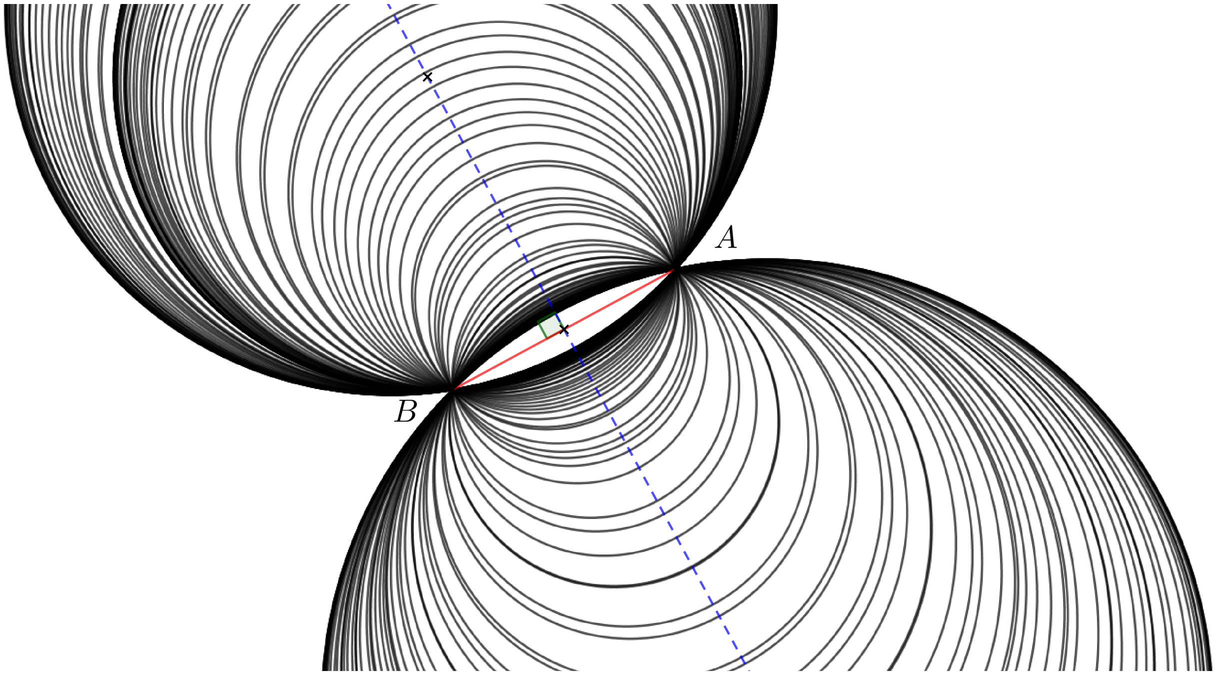
Illustration :



Proposition 52. *Il existe une infinité de cercles passants par deux points distincts donnés.*

Démonstration. Soient A et B deux points distincts du plan. Si $\mathscr{C}(O;r)$ passe par A et B, alors $OA = OB = r$ et par conséquent, O est équidistant de A et B. Autrement dit, O appartient à la médiatrice de $[AB]$. Réciproquement, soit O un point de la médiatrice de $[AB]$, alors, par propriété, $OA = OB$. Donc $\mathscr{C}(O;OA)$ passe par A et B. $\square$

Illustration :



Proposition 53. *Par trois points non alignés, il passe un unique cercle.*

Démonstration. Soient A, B et C trois points du plan non alignés. Si O est le centre d'un cercle passant par A, B et C, alors, par définition, $OA = OB = OC$. Donc O n'est autre que le point de concours des médiatrices du triangle ABC. Réciproquement, le cercle circonscrit à ABC convient. □

Proposition 54. *Les cercles circonscrits à deux triangles égaux ont même rayon.*

Démonstration. Admise. □

Proposition 55. *Par trois points non alignés, on ne peut faire passer aucun cercle.*

Démonstration. Soient A, B et C trois points alignés. Alors les médiatrices de $[AB]$ et $[BC]$ sont strictement parallèles (car toutes deux perpendiculaires à (AC)), donc n'ont aucun point d'intersection. Il n'existe donc pas de point O équidistant de A, B et C. □

Corollaire 56. *Voici deux résultats importants :*

1. *Un cercle et une droite ont au plus deux points communs.*
2. *Deux cercles ont au plus deux points communs.*

Démonstration. 1. Il n'existe pas de cercle passant par trois points alignés d'après la proposition 55.
2. Si deux cercles ont trois points en commun A, B et C, alors ils sont confondus avec le cercle circonscrit à ABC. □

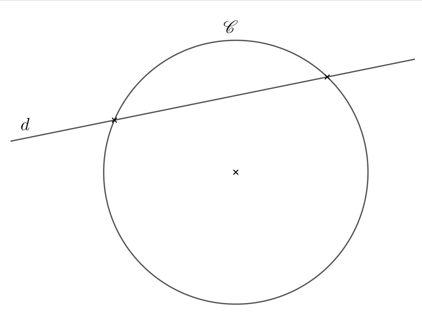
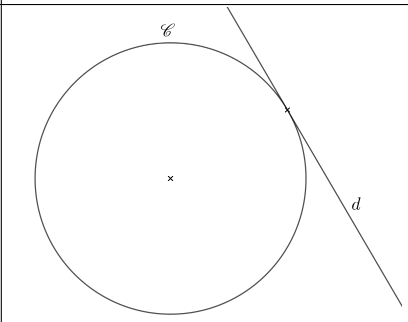
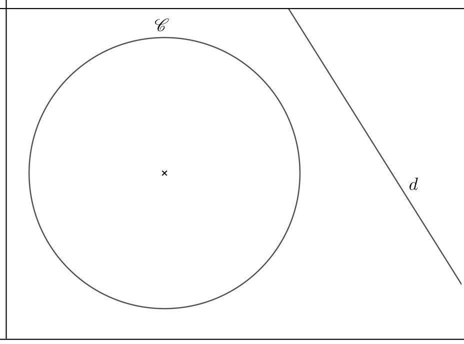
Définition 57. Quatre points du plan sont dits cocycliques s'ils appartiennent à un même cercle.

8.2 Positions relatives d'une droite et d'un cercle

Définition 58. On dit que :

1. Une droite est sécante à un cercle si elle le coupe en deux points distincts.
2. Une droite est tangente à un cercle si elle a un unique point commun avec le cercle.
3. Une droite est extérieure à un cercle si elle n'a aucun point commun avec le cercle.

Illustration :

d est sécante à $\mathscr{C}$	d est tangente à $\mathscr{C}$	d est extérieure à $\mathscr{C}$
		

Théorème 59. *Soit Δ une droite. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon r. Alors on a les implications suivantes :*

1. *Si $d(O;\Delta) < r$, alors Δ est sécante à $\mathscr{C}$.*
2. *Si $d(O;\Delta) = r$, alors Δ est tangente à $\mathscr{C}$.*
3. *Si $d(O;\Delta) > r$, alors Δ est extérieure à $\mathscr{C}$.*

Démonstration. Soit H le projeté orthogonal de O sur Δ. Alors $d(O;\Delta) = OH$.
1. Si $OH < r$, alors lorsque M parcourt la droite Δ (en partant de H) la distance OM augmente (de OH à l'infini). Donc il existe nécessairement un point A tel que $OA = r$. Ainsi, $A \in \mathscr{C}$. On trouve un autre point $B \in \mathscr{C}$ en parcourant Δ dans l'autre sens. D'où le résultat.
2. Si $OH = r$, alors pour tout point M de Δ, on a, d'après le théorème de Pythagore : $OM^2 = OH^2 + HM^2 = r^2 + HM^2 \geqslant r^2$ avec égalité si, et seulement si, $H = M$. Donc Δ a un unique point commun avec $\mathscr{C}$. Ainsi, Δ est tangente à $\mathscr{C}$.
3. Si $OH > r$, alors pour tout point M de Δ, on a, d'après le théorème de Pythagore : $OM^2 = OH^2 + HM^2 > r^2 + HM^2 > r^2$. Donc Δ et $\mathscr{C}$ n'ont aucun point commun. Ainsi, Δ est extérieure à $\mathscr{C}$. $\square$

Remarque. On en déduit une caractérisation des tangentes à un cercle :

Théorème 60. *Une droite est tangente à un cercle si, et seulement, si elle est perpendiculaire à un rayon de ce cercle en son extrémité.*

Démonstration. Découle du théorème 59. $\square$

Chapitre 9

Angles (3)

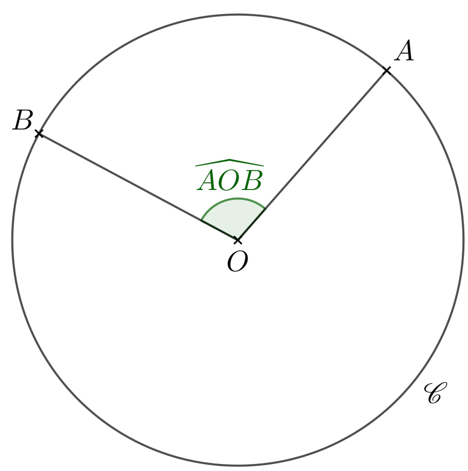
Jakob Steiner

(Utzenstorf 1 796 - Berne 1 863)

9.1 Définitions

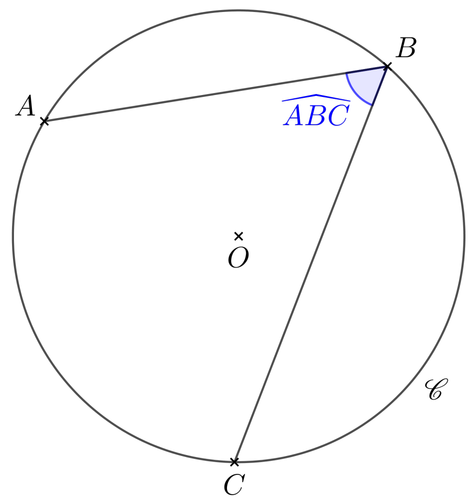
Définition 61. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O. On appelle angle au centre tout angle dont le sommet est le centre O du cercle $\mathscr{C}$.

Illustration :



Définition 62. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O. On appelle angle inscrit (dans le cercle $\mathscr{C}$) tout angle dont le sommet appartient au cercle $\mathscr{C}$ et dont les côtés interceptent un arc de celui-ci.

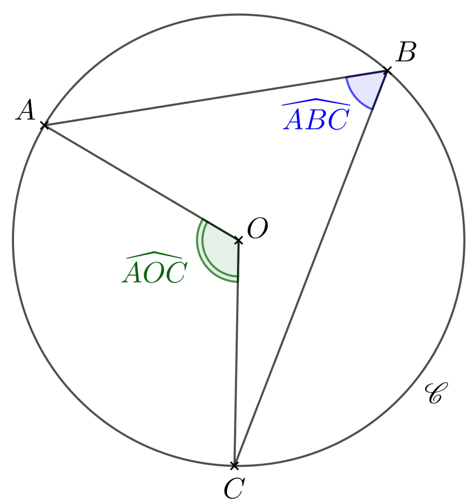
Illustration :



Définition 63. Étant donné un angle inscrit :

1. On appelle arc intercepté par l'angle inscrit, l'arc compris entre les côtés de l'angle inscrit.
2. On appelle angle au centre correspondant à l'angle inscrit, l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit.

Illustration :



Remarque. Les définitions précédentes ont encore un sens lorsque l'un des côtés de l'angle inscrit est une tangente au cercle $\mathscr{C}$.

9.2 Théorèmes

Théorème 64. *Tout angle inscrit dans un cercle est égal à la moitié de l'angle au centre correspondant.*

Démonstration. Soit $\widehat{BAC}$ un angle inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O. Distinguons deux cas :

1. Un des côtés de l'angle inscrit est une tangente au cercle $\mathscr{C}$. Soit I le milieu de $[AB]$. Dans le triangle isocèle AOB, la droite (OI) est à la fois hauteur issue de O et bissectrice de $\widehat{BOA}$. Donc $(OI) \perp (AB)$. Or (AC) est tangente à $\mathscr{C}$, donc $(AC) \perp (OA)$. Les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{AOI}$ ont donc leurs côtés respectivement perpendiculaires. Par conséquent, ils sont égaux. Or $\widehat{AOB} = 2\widehat{AOI}$. D'où : $\widehat{AOB} = 2\widehat{AOI} = 2\widehat{CAB}$.
2. Les deux côtés de l'angle inscrit sont des cordes. On mène la tangente $[Ax)$ à $\mathscr{C}$. D'après ce qui précède, $\widehat{AOB} = 2\widehat{xAB}$ et $\widehat{AOC} = 2\widehat{xAC}$. Donc :

$$\begin{aligned}\widehat{BOC} &= \widehat{AOC} - \widehat{AOB} \\ &= 2\widehat{xAC} - 2\widehat{xAB} \\ &= 2(\widehat{xAC} - \widehat{xAB}) \\ &= 2\widehat{BAC}\end{aligned}$$

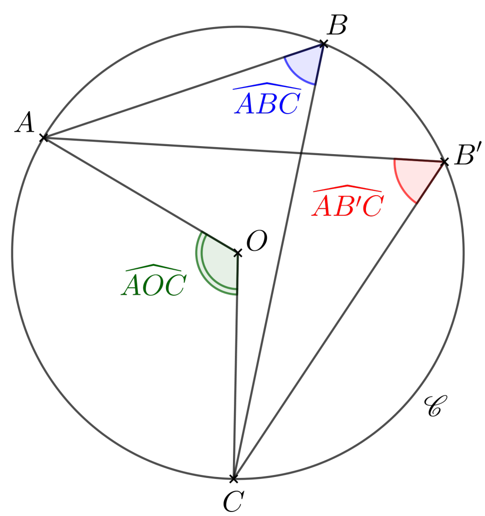
Dans les deux cas, l'angle au centre est le double de l'angle inscrit.

□

Corollaire 65. *Si, dans un même cercle, deux angles inscrits interceptent le même arc ou deux arcs de même longueur, alors ils sont égaux.*

Démonstration. Les angles au centre étant égaux, les angles inscrits sont égaux d'après le théorème 64. □

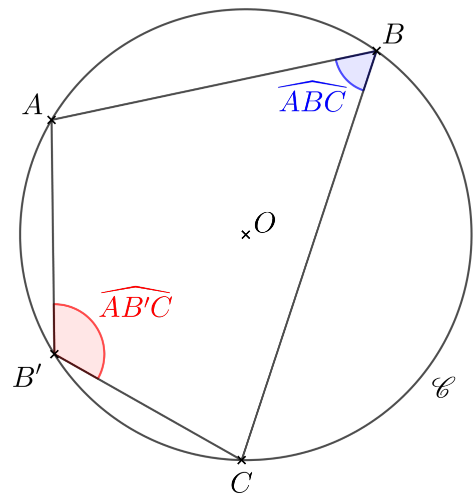
Illustration : Sur la figure ci-dessous, les angles inscrits $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AB'C}$ sont égaux.



Corollaire 66. *Si, dans un même cercle, deux angles inscrits interceptent les deux arcs sous-tendus par une même corde, alors ces deux angles sont supplémentaires.*

Démonstration. Soient $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BA'C}$ deux angles inscrits d'un même cercle. Leurs angles au centre correspondants ont pour somme 360°. Donc : $\widehat{BAC} + \widehat{BA'C} = \frac{1}{2} \times 360° = 180°$. □

Illustration :



9.3 Polygones réguliers

Définition 67. On dit qu'un polygone est inscriptible s'il existe un cercle auquel appartiennent tous ses sommets. On dit alors que le cercle est circonscrit au polygone et que le polygone et inscrit dans le cercle.

Remarque. Un triangle est toujours inscriptible dans un cercle d'après le chapitre précédent. La question ne pose réellement qu'à partir de quatre sommets.

Théorème 68. *Si un quadrilatère croisé a deux angles opposés égaux, alors il est inscriptible.*

Démonstration. Soit $ABCD$ un quadrilatère croisé tel que $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABD. Ce cercle coupe la droite (CD) en un point C'. Démontrons que $C = C'$. D'après le corollaire 65, $\widehat{BC'D} = \widehat{BAD}$ car ils interceptent le même arc. Or $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$. Donc $\widehat{BC'D} = \widehat{BCD}$. Ainsi $(BC') \mathbin{/\!/} (BC)$. Par suite, $C = C'$ et le cercle circonscrit à ABC passe aussi par le point D. □

Théorème 69. *Si un quadrilatère convexe a deux angles opposés supplémentaires, alors il est inscriptible.*

Démonstration. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $\widehat{B} + \widehat{D} = 180°$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. Ce cercle coupe la droite (CD) en un point D'. Démontrons que $D = D'$. D'après le corollaire 66, $\widehat{ABC} + \widehat{AD'C} = 180°$. Or $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180°$. Donc $\widehat{AD'C} = \widehat{ADC}$. Ainsi $(AD') \mathbin{/\!/} (AD)$. Par suite, $D = D'$ et le cercle circonscrit à ABD passe aussi par le point C. □

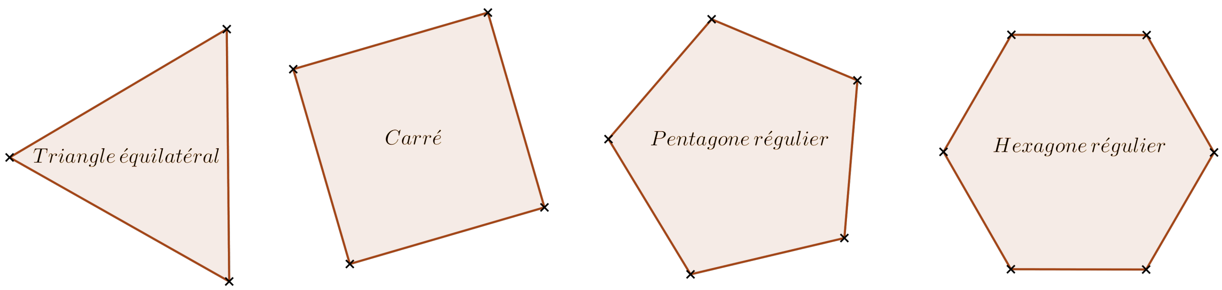
Définition 70. On appelle polygone régulier tout polygone dont tous les côtés ont la même longueur et dont tous les angles ont la même mesure.

Remarque. Un polygone ayant ses côtés de même longueur n'est pas nécessairement régulier. Exemple : un losange non carré.

Proposition 71. *Tout polygone régulier convexe est inscriptible.*

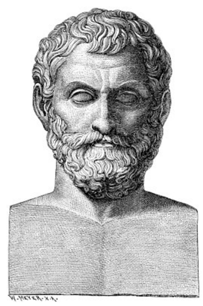
Démonstration. Soit $A_1A_2A_3\dots A_n$ un polygone régulier convexe. Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$. Pour les triangles $A_1A_2A_3$ et $A_4A_3A_2$, on a : $\begin{cases} A_1A_2 = A_4A_3 \\ A_2A_3 = A_3A_2 \\ \widehat{A_1A_2A_3} = \widehat{A_4A_3A_2} \end{cases}$. Donc, d'après le deuxième cas d'égalité des triangles, les triangles $A_1A_2A_3$ et $A_4A_3A_2$ sont égaux. En particulier, $\widehat{A_3A_1A_2} = \widehat{A_2A_4A_3}$. Donc, d'après le théorème 68, le quadrilatère croisé $A_1A_3A_4A_2$ est inscriptible. Autrement dit, A_4 appartient à $\mathscr{C}$. De la même façon, on démontre que $A_5, \ldots, A_n$ appartiennent à $\mathscr{C}$. □

Exemple. Voici quelques polygones réguliers :



Chapitre 10

Théorème de Thalès



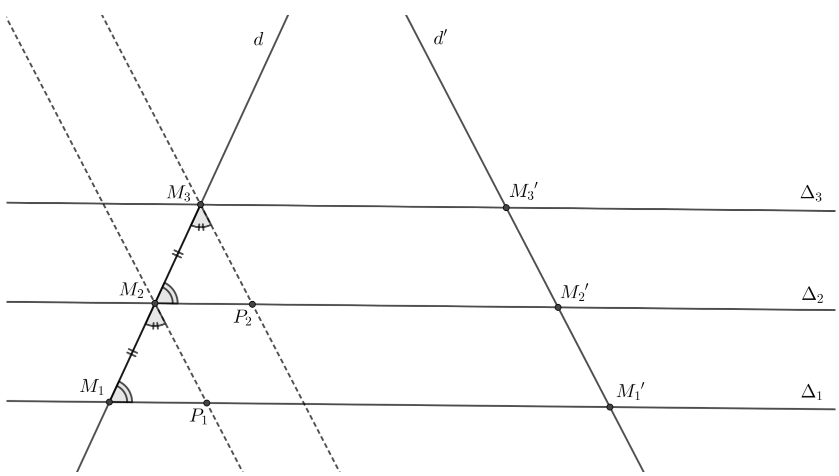
Thalès

(Milet 625 avt J.-C. - Milet 547 avt J.-C.)

10.1 Parallèles équidistantes

Lemme 72. *Lorsque des droites parallèles déterminent des segments égaux sur une première droite sécante, alors elles déterminent des segments égaux sur toute autre droite sécante.*

Démonstration. Soient Δ_1, Δ_2 et Δ_3 trois droites parallèles. Soient d et d' deux droites sécantes aux quatre premières. Soient M_1, M_2 et M_3 (respectivement M_1', M_2', et M_3') les points d'intersection de d (respectivement d') et Δ_1, Δ_2 et Δ_3. Supposons que $M_1M_2 = M_2M_3$. Démontrons que $M_1'M_2' = M_2'M_3'$.



Soit P_1 (respectivement P_2) le point d'intersection de la droite parallèle à d' passant par M_2 (respectivement M_3) et de Δ_1 (respectivement Δ_2). Les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 étant parallèles, on a : $\widehat{P_1 M_1 M_2} = \widehat{P_2 M_2 M_3}$ et $\widehat{P_1 M_2 M_1} = \widehat{P_2 M_3 M_2}$ (angles correspondants). De plus, par hypothèse, $M_1M_2 = M_2M_3$. Donc, d'après un cas d'égalité de triangles, les triangles $M_1M_2P_1$ et $M_2M_3P_2$ sont égaux. Par suite, $M_2P_1 = M_3P_2$.
Or, le quadrilatère $M_2P_1M_1'M_2'$ est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles.
Ainsi, par propriété, $M_2P_1 = M_1'M_2'$.
De même, le quadrilatère $M_3P_2M_2'M_3'$ est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles.
Ainsi, par propriété, $M_3P_2 = M_2'M_3'$.
Par conséquent, $M_1'M_2' = M_2'M_3'$. □

Définition 73. On dit que des droites parallèles sont équidistantes lorsque les segments correspondants déterminés par une droite sécante sont égaux.

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

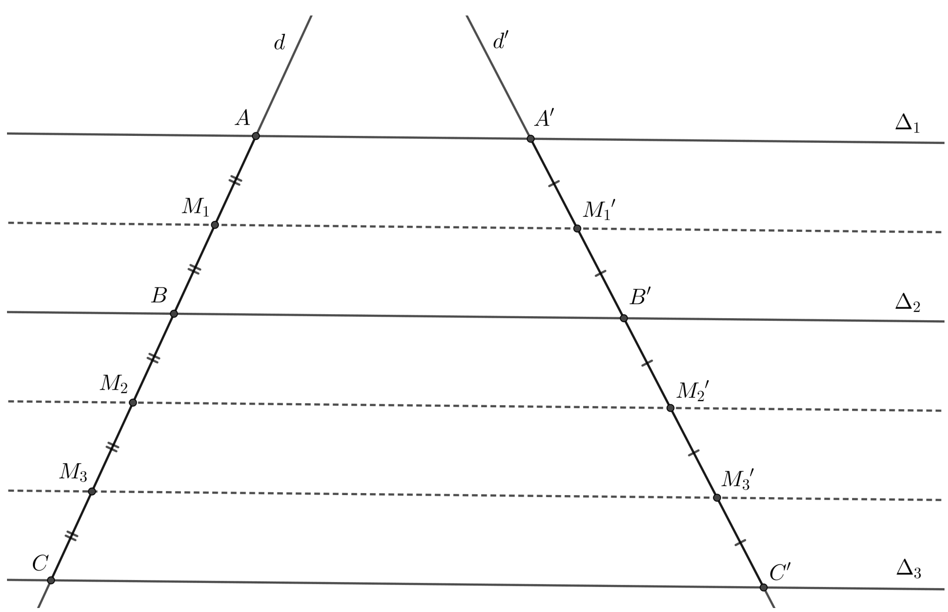
1. Cette définition a un sens puisque les longueurs des segments correspondants ne dépendent pas de la sécante d'après le lemme 72.
2. Ce lemme nous fournit une méthode pour diviser un segment donné en un certain nombre de segments égaux.

   Exemple : divisons un segment $[AB]$ donné et de longueur inconnue en 7 segments égaux.

10.2 Le théorème de Thalès

Théorème 74. *(Théorème de Thalès) Des droites parallèles découpent sur deux droites sécantes des segments proportionnels.*

Démonstration. Soit d une droite. Soient Δ_1, Δ_2 et Δ_3 trois droites parallèles coupant la droite d respectivement en A, B et C. Posons $k := \frac{AB}{BC}$ et supposons que k soit un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers a et b, avec $b \neq 0$, tels que $k = \frac{a}{b}$. Soit d' une droite sécante à Δ_1, Δ_2 et Δ_3 respectivement en A', B' et C'. Démontrons que $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{a}{b}$.



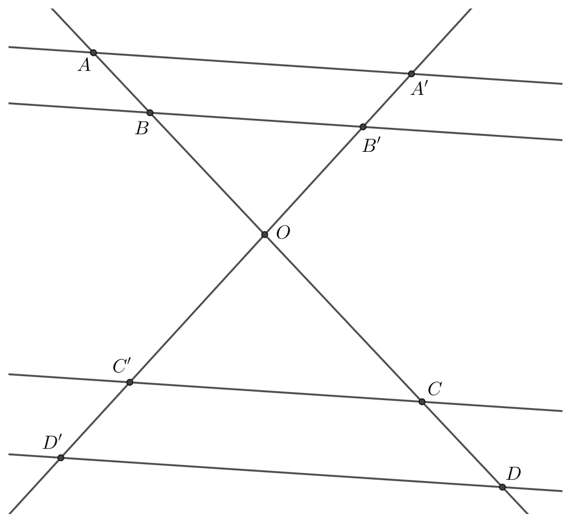
Subdivisons les segments $[AB]$ et $[BC]$ en segments de longueur $\frac{1}{a}AB$. On a alors : $AM_1 = M_1M_2 = \ldots = M_{a-1}B = BM_a = \ldots = M_bC$. La droite parallèle à Δ_1 passant par M_1 (respectivement M_2, M_3 etc.) coupe la droite d' en M'_1 (respectivement M'_2, M'_3 etc.). D'après le lemme 72, on a :

$$A'M'_1 = M'_1M'_2 = \ldots = M'_{a-1}B' = B'M'_a = \ldots = M'_bC'$$

D'où : $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{a \times A'D'}{b \times A'D'} = \frac{a}{b}$. □

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. On admet le résultat lorsque k est irrationnel.
2. *Illustration* :

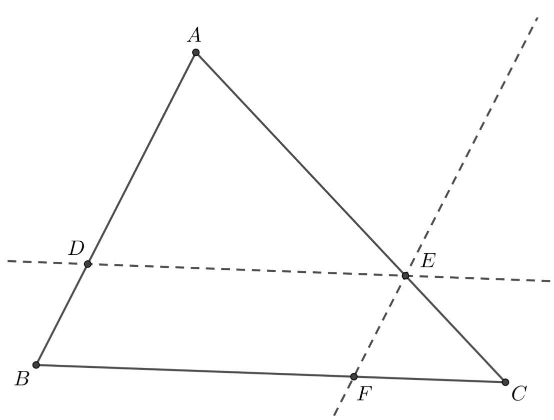


Ici, les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont parallèles. On peut écrire : $\left\{ \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & O \\ A' & B' & C' & D' & O \end{array} \right\}$

puis en déduire : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{OC}{OC'} = \ldots$

Théorème 75. *(Théorème de Thalès dans un triangle) Toute droite parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine un second triangle dont les côtés sont proportionnels à ceux du premier.*

Démonstration. Soit ABC un triangle. Soit D un point du segment $[AB]$. Soit E le point d'intersection de $[AC]$ et de la droite parallèle à (BC) passant par D.



Démontrons que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$. D'après le théorème 74 appliqué aux droites (DE) et (BC), on a : $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$. On en déduit : $AD \times AC = AB \times AE$ puis : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Soit F le point d'intersection de $[BC]$ et de la droite parallèle à (AB) passant par E. D'après le théorème 74 appliqué aux droites (AB) et (EF), on a : $\frac{AE}{BF} = \frac{AC}{BC}$. On en déduit : $AE \times BC = AC \times BF$ puis : $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$. De plus, les côtés opposés du quadrilatère $BDEF$ sont parallèles par construction. Donc $BDEF$ est un parallélogramme par définition. Ainsi, par propriété, $BF = DE$. D'où : $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$. Finalement, on a bien : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$. □

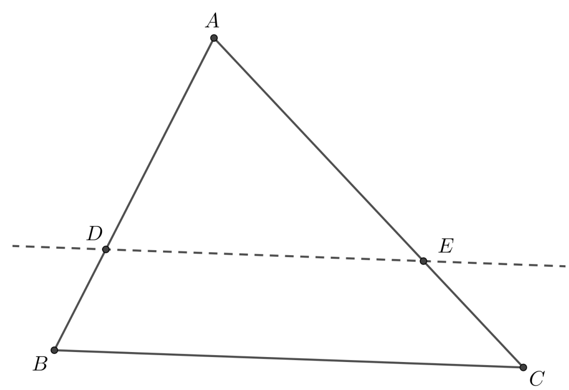
10.3 Triangles semblables

Définition 76. Deux triangles sont dits semblables s'ils ont leurs angles respectivement égaux et leurs côtés proportionnels.

Illustration : /

Théorème 77. *Toute droite parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine avec les deux autres côtés un nouveau triangle semblable au premier.*

Démonstration. Soit ABC un triangle. Soit D un point du segment $[AB]$. La droite parallèle à (BC) passant par D coupe le segment $[AC]$ en E.



D'après le théorème 75, on a : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$. De plus, les triangles ABC et ADE ont l'angle $\widehat{BAC}$ en commun et $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$ (angles correspondants). La démonstration dans les deux autres configurations est laissée en exercice. □

Définition 78. Les éléments correspondants de deux triangles semblables sont dit homologues. On appelle rapport de similitude de deux triangles semblables le rapport de côtés homologues.

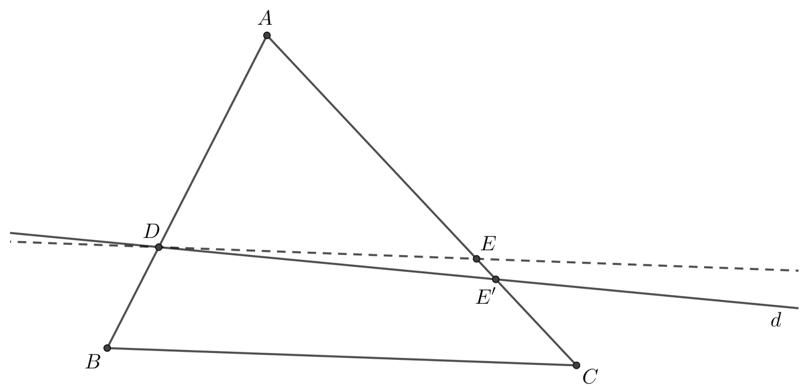
Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Si le rapport de similitude est strictement inférieur à 1, alors on dit que le deuxième triangle se déduit du premier par une réduction.
2. Si le rapport de similitude est strictement supérieur à 1, alors on dit que le deuxième triangle se déduit du premier par un agrandissement.
3. Si le rapport de similitude est égal à 1, alors on dit que les deux triangles sont égaux.

10.4 « Réciproque » du théorème de Thalès

Théorème 79. *(« Réciproque » du théorème de Thalès) Si deux droites déterminent sur les côtés d'un angle des segments proportionnels et de même disposition, alors ces droites sont parallèles.*

Démonstration. Soit $\widehat{xAy}$ un angle. Soient B, $D \in [Ax)$ et C, $E \in [Ay)$ tels que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.



Démontrons que (DE) est parallèle à (BC). Soit d la droite parallèle à (BC) passant par D (il s'agit de montrer que d n'est rien d'autre que (DE)). d coupe $[Ay)$ en un point E'. D'après le théorème 74 appliqué au triangle ABC, on a : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE'}{AC}$. On en déduit donc : $\frac{AE'}{AC} = \frac{AE}{AC}$ et par suite : $AE' = AE$. Donc E et E' sont confondus. Par conséquent, d et (DE) sont confondues, autrement dit, (DE) est parallèle à (BC). □

10.5 La réduction au même dénominateur

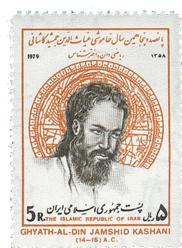
Définition 80. Réduire au même dénominateur une expression algébrique consiste à l'écrire sous la forme d'une seule fraction.

Exemple. Réduisons au même dénominateur les expressions algébriques suivantes :

1. $\frac{x+2}{3} - \frac{x}{6}$
2. $\frac{3x-1}{2} + \frac{x-2}{3}$
3. $\frac{4x-1}{3} - \frac{7x-3}{11} - \frac{5x-2}{7}$
4. $\frac{x+1}{x+3} + \frac{2}{x-1}$

Chapitre 11

Trigonométrie

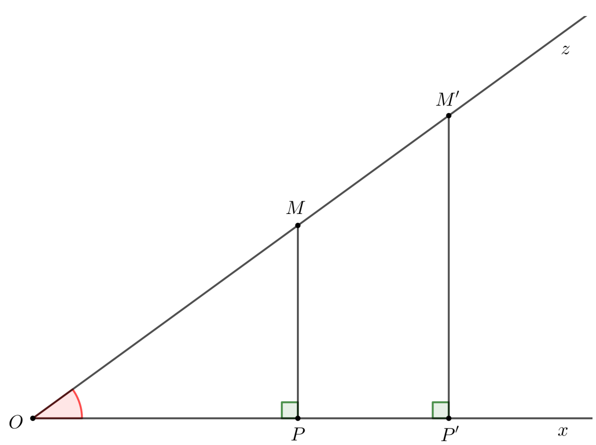


Al-Kashi

(Kashan 1380 - Samarcande 1429)

11.1 Rapports trigonométriques d'un angle

Remarque. Soit $\widehat{xOz}$ un angle aigu. Soient M et M' deux points de la demi-droite $[Oz)$. Soient P et P' leurs projetés orthogonaux respectifs sur la demi-droite $[Ox)$.



D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{OM}{OM'} = \frac{PM}{P'M'}$$

D'où les égalités suivantes :

$$\frac{OP}{OM} = \frac{OP'}{OM'} \ ; \ \frac{PM}{OM} = \frac{P'M'}{OM'} \ ; \ \frac{PM}{OP} = \frac{P'M'}{OP'}$$

Le rapport de deux côtés du triangle OPM est donc indépendant de la position du point M sur la demi-droite $[Oz)$ et reste constant lorsque M parcourt $[Oz)$. Il ne dépend que de la mesure de l'angle $\widehat{xOz}$. D'où la définition :

Définition 81. On appelle rapports (ou lignes) trigonométriques de l'angle $\widehat{xOz}$ les nombres suivants :
- Cosinus de l'angle $\widehat{xOz}$, le rapport $\cos(\widehat{xOz}) = \frac{OP}{OM}$.
- Sinus de l'angle $\widehat{xOz}$, le rapport $\sin(\widehat{xOz}) = \frac{PM}{OM}$.
- Tangente de l'angle $\widehat{xOz}$, le rapport $\tan(\widehat{xOz}) = \frac{PM}{OP}$.

Remarque. Si le triangle OPM est rectangle en P, alors on a :

$$\begin{cases} \cos(\widehat{MOP}) = \frac{OP}{OM} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \\ \sin(\widehat{MOP}) = \frac{OP}{OM} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \\ \tan(\widehat{MOP}) = \frac{OP}{OM} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \end{cases}$$

Exemple. Soit ABC un triangle tel que $AC = 5\,\text{cm}$, $AB = 3\,\text{cm}$ et $BC = 4\,\text{cm}$.
1. Démontrons que ABC est rectangle.
2. Calculons quelques rapports trigonométriques dans le triangle ABC.

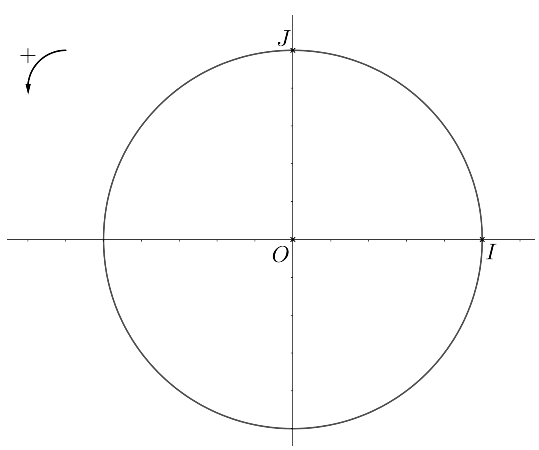
Remarque. Ces fonctions trigonométriques ont deux grandes utilités en classe de Troisième : calculer une mesure angle et calculer une longueur.

Exemple. Voici deux exemples d'applications directes et classiques :
1. Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AB = 3\,\text{cm}$ et $BC = 5\,\text{cm}$. Déterminons la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.
   On a : $\tan(\widehat{BCA}) = \frac{AB}{CB}$ soit $\tan(\widehat{BCA}) = \frac{3}{5}$. D'où : $\widehat{BCA} = \arctan\left(\frac{3}{5}\right) \simeq 31°$ à l'unité près.
2. Soit DEF un triangle rectangle en E tel que $DE = 4\,\text{cm}$ et $\widehat{EDF} = 63°$. Déterminons la longueur DF.
   On a : $\cos(\widehat{EDF}) = \frac{DE}{DF}$ soit $\cos(63°) = \frac{5}{DF}$. D'où : $DF = \frac{5}{\cos(63°)} \simeq 11°$ à l'unité près.

11.2 Quart de cercle trigonométrique

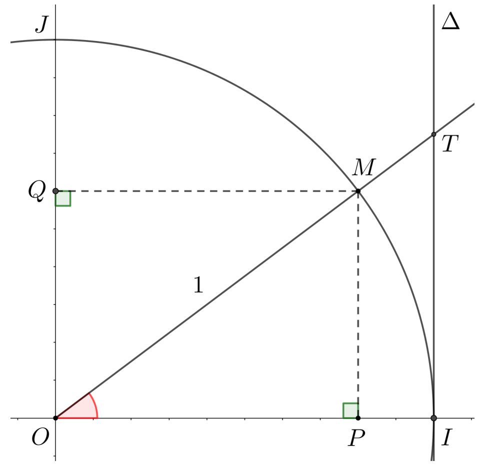
Définition 82. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1, sur lequel on choisit une orientation : le sens direct (positif ou encore trigonométrique) est contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre ; le sens indirect (négatif ou encore antitrigonométrique) est le sens de rotation des aiguilles d'une montre.

Illustration :



Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. On ne s'intéressera qu'au quart de cercle intercepté par l'angle $\widehat{IOJ}$.
2. Soit M un point du quart de cercle trigonométrique considéré. Soient P et Q les projetés orthogonaux respectifs de M sur (OI) et (OJ). Soit Δ la droite perpendiculaire à (OI) passant par I. Soit T le point d'intersection de (OM) et Δ.



On a :

$$\begin{cases} \cos(\widehat{IOM}) = \frac{OP}{OM} = \frac{OP}{1} = OP \\ \sin(\widehat{IOM}) = \frac{PM}{OM} = \frac{PM}{1} = PM \\ \tan(\widehat{IOM}) = \frac{PM}{OP} = \frac{IT}{OI} = \frac{IT}{1} = IT \end{cases}$$

Ainsi :

(a) $\cos(\widehat{IOM})$ se lit sur l'axe (OI), c'est la distance OP.

(b) $\sin(\widehat{IOM})$ se lit l'axe (OJ), c'est la distance OQ.

(c) $\tan(\widehat{IOM})$ se lit sur l'axe Δ, c'est la distance IT. C'est pour cela que Δ est appelée la tangente au cercle trigonométrique en I.

3. Lorsque M décrit le quart de cercle trigonométrique considéré on constate que :

(a) P décrit $[IO]$ et donc $\cos(\widehat{IOM})$ décroît de 1 à 0.

(b) Q décrit $[OJ]$ et donc $\sin(\widehat{IOM})$ croît de 0 à 1.

(c) T décrit $[It)$ et donc $\tan(\widehat{IOM})$ croît de 0 à l'infini.

Théorème 83. *Soit $\widehat{IOM}$ un angle aigu. Alors :*
- $\left(\cos(\widehat{IOM})\right)^2 + \left(\sin(\widehat{IOM})\right)^2 = 1$
- $\tan(\widehat{IOM}) = \frac{\sin(\widehat{IOM})}{\cos(\widehat{IOM})}$

Démonstration. 1. Théorème de Pythagore dans le triangle OPM.
2. Théorème de Thalès dans le triangle OIT. □

Proposition 84. *Si deux angles sont complémentaires, alors le cosinus de l'un est égal au sinus de l'autre.*

Démonstration. Découle directement des définitions. □

11.3 Angles remarquables

Remarque. Il est bon de connaître par cœur quelques valeurs usuelles de cosinus, sinus et tangente.

Proposition 85. *On a :*
- $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(30°) = \frac{1}{2}$ *et* $\tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\cos(45°) = \sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\tan(45°) = 1$
- $\cos(60°) = \frac{1}{2}$, $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $\tan(60°) = \sqrt{3}$

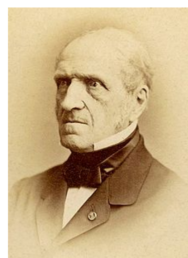
Démonstration. 1. On travaille dans un triangle équilatéral et l'on trace une médiatrice d'un des côtés.
2. On travaille dans un triangle rectangle isocèle.
3. Découle du point 1. et de la proposition 84. □

Remarque. On peut synthétiser ces résultats sous la forme d'un tableau :

Angle x	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non défini

Chapitre 12

Transformations du plan



Michel Chasles

(Epernon 1793 - Paris 1880)

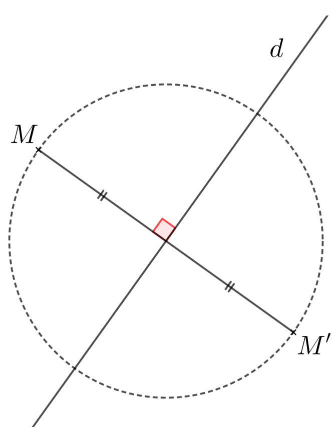
12.1 Symétrie axiale

Définition 86. Soit d une droite du plan. On appelle symétrie axiale d'axe d l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que :

1. Si $M \in d$, alors $M' = M$.
2. Si $M \notin d$, alors d est la médiatrice de $[MM']$.

Notation : Cette transformation du plan se note en général : $s_d \, : \, M \longmapsto M'$.

Illustration :



Remarque. On peut effectuer deux remarques :

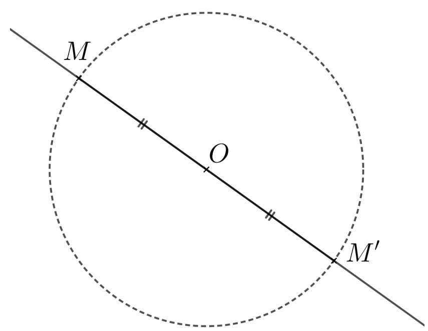
1. Pour tout point M du plan, on a : $s_d\left(s_d(M)\right) = M$. Autrement dit, la composée de la symétrie axiale d'axe d par elle-même est l'application identité. On dit que la symétrie axiale d'axe d est involutive.
2. Les symétriques de trois points alignés sont trois points alignés. Autrement dit, la symétrie axiale envoie une droite sur une droite, on dit qu'elle conserve l'alignement.

12.2 La symétrie centrale

Définition 87. Soit O un point du plan. On appelle symétrie centrale de centre O l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que :

1. Si $M = O$, alors $M' = M$.
2. Si $M \neq O$, alors O est le milieu de $[MM']$.

Notation : Cette transformation du plan se note en général : $s_O\ :\ M \longmapsto M'$.
Illustration :



Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. Pour tout point M du plan, on a : $s_O\left(s_O(M)\right) = M$. Autrement dit, la composée de la symétrie centrale de centre O par elle-même est l'application identité. On dit que la symétrie centrale de centre O est involutive.
2. Les symétriques de trois points alignés sont trois points alignés. Autrement dit, la symétrie centrale envoie une droite sur une droite, on dit qu'elle conserve l'alignement.

Proposition 88. *Deux droites symétriques par rapport à un point O sont parallèles.*

Démonstration. Soient A et B deux points distincts du plan. Soient A' et B' les symétriques respectifs de A et B par rapport à O. Par définition, O est le milieu de $[AA']$ et de $[BB']$. Par conséquent, le quadrilatère $ABA'B'$ a ses diagonales sécantes en leur milieu. Ainsi, par propriété, $ABA'B'$ est un parallélogramme. Par définition, on a alors (AB) parallèle à $(A'B')$. $\square$

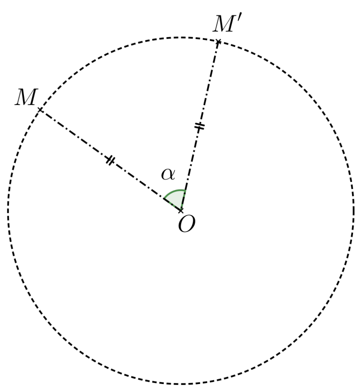
12.3 La rotation

Définition 89. Soient O un point du plan et α un réel. On appelle rotation d'angle α l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que :

1. Si $M = O$, alors $M' = M$.
2. Si $M \neq O$, alors : $OM' = OM$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$.

avec la convention suivante : « Si α est positif, alors on tourne dans le sens antihoraire, et si α est négatif, alors on tourne dans le sens horaire. »

Notation : Cette transformation du plan se note en général : $r_{O;\alpha} \, : \, M \longmapsto M'$.
Illustration :



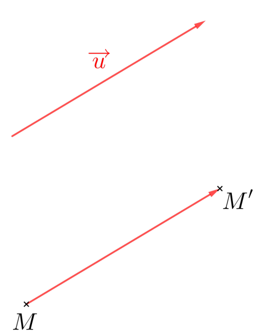
Remarque. On peut d'ores et déjà effectuer quelques remarques (à démontrer) :

1. Si $M' = r_{O;\alpha}(M)$, alors $M = r_{O;-\alpha}(M')$.
2. S'il existe un entier relatif k tel que $\alpha = 180k$, alors $r_{O;\alpha}$ est la symétrie centrale de centre O.
3. Si $\alpha = 0$, alors tout point du plan est envoyé sur lui-même. $r_{O;\alpha}$ est alors l'application identité.
4. Les images de trois points alignés par une rotation sont trois points alignés. Autrement dit, toute rotation envoie une droite sur une droite, on dit qu'elle conserve l'alignement.

12.4 La translation

Définition 90. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. On appelle translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.

Notation : Cette transformation du plan se note en général : $t_{\overrightarrow{u}} \, : \, M \longmapsto M'$.
Illustration :



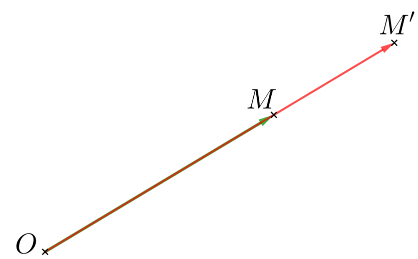
Proposition 91. *L'image d'une droite par une translation est une droite parallèle à la première.*

Démonstration. Soit (AB) une droite du plan. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Soient A' et B' les images respectives de A et B par la translation t. Alors, par définition, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{u}$. Par conséquent, le quadrilatère $AA'B'B$ possède deux côtés opposés parallèles de même longueur. Donc, par propriété, $AA'B'B$ est un parallélogramme. Ainsi, par définition, les droites $(A'B')$ et (AB) sont parallèles. □

12.5 L'homothétie

Définition 92. Soient O un point du plan et k un réel non nul. On appelle homothétie de centre O et de rapport k l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Notation : Cette transformation du plan se note en général : $h_{O;k}\ :\ M \longmapsto M'$.
Illustration :



Remarque. On peut d'ores et déjà effectuer plusieurs remarques (à démontrer) :

1. Un point, son image par une homothétie et le centre de celle-ci sont toujours alignés.
2. Si $k \neq 1$, alors $h_{O;k}$ ne conserve pas les longueurs.
3. Si $k > 1$ ou $k < -1$, alors $h_{O;k}$ est un agrandissement.
4. Si $k = 1$, alors $h_{O;k}$ est l'application identité puisqu'elle envoie tout point du plan sur lui-même.
5. Si $k = -1$, alors $h_{O;k}$ est une symétrie centrale.
6. Si $-1 < k < 1$, alors $h_{O;k}$ est une réduction.

7. Si le rapport k pouvait être nul, alors tout point du plan serait envoyé en O. Cette situation n'est pas très intéressante.
8. Si $M' = h_{O;k}(M)$, alors $M = h_{O;\frac{1}{k}}(M')$.

Proposition 93. *L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle à la première.*

Démonstration. Soit $h_{O,k}$ l'homothétie de centre O et de rapport k. Soit (AB) une droite du plan.
Si la droite (AB) passe par O, alors son image par $h_{O,k}$ est elle-même et le résultat est alors évident.
Si la droite (AB) ne passe pas par O, alors on appelle A' l'image de A par $h_{O,k}$ et B' l'image de B par $h_{O,k}$. On pose $d_1 := (OA)$ et $d_2 := (OB)$. Alors, par définition de l'homothétie, $OA' = kOA$ et $OB' = kOB$. Ainsi, les droites (AB) et $(A'B')$ déterminent des segments proportionnels. Par conséquent, d'après le théorème 79, (AB) et $(A'B')$ sont parallèles. □

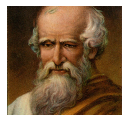
Remarque. Finalement, nous pouvons retenir les faits suivants :

1. Toutes les transformations étudiées ici conservent l'alignement ;

2. La symétrie axiale, la symétrie centrale, la translation et la rotation ont pour point commun de conserver les longueurs contrairement à l'homothétie ;
3. La symétrie centrale, la translation, la rotation et l'homothétie DE RAPPORT POSITIF conservent l'orientation du plan (i.e. le sens de rotation d'une horloge) contrairement à la symétrie axiale.

Chapitre 13

Sphère et boule



Archimède

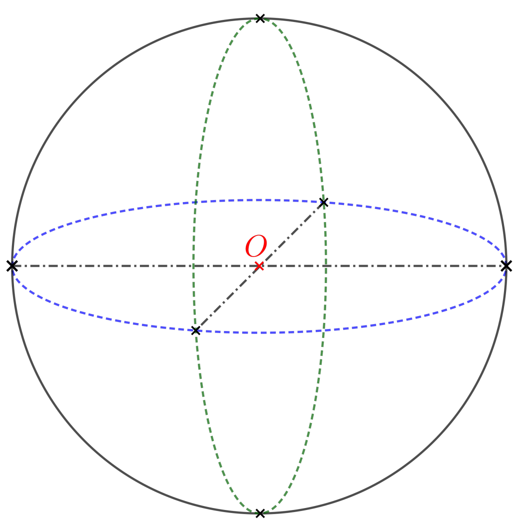
(Syracuse 287 avt J.-C. - Syracuse 212 avt J.-C.)

Dans ce chapitre, nous nous placerons dans l'espace usuel à trois dimensions.

13.1 Sphère

Définition 94. Soit O un point de l'espace. Soit r un nombre réel positif. On appelle sphère de centre O et de rayon r l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = r$.

Illustration :

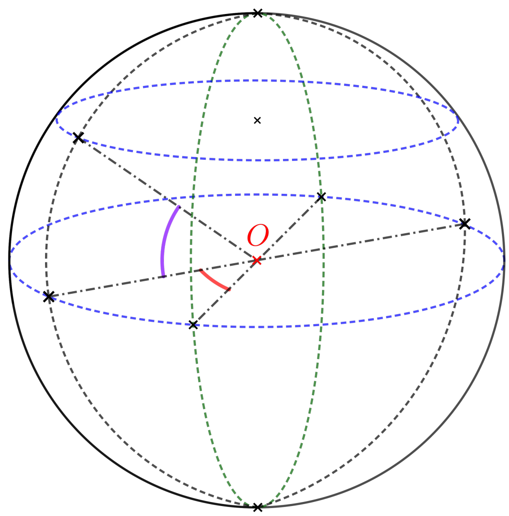


Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. On peut faire l'analogie avec la définition du cercle de centre O et de rayon r dans le plan. Il s'agit en fait de la même définition dans un espace de dimension deux.
2. On appelle grand cercle de la sphère de centre O et de rayon r tout cercle de centre O et de rayon r.

Définition 95. Soit $\mathscr{S}$ une sphère. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux grands cercles de la sphère situés dans des plans orthogonaux. Alors, à tout point de la sphère on peut associer deux nombres : sa latitude et sa longitude. Réciproquement, à tout couple de nombres réels, on peut alors associer un point sur la sphère. Le couple (latitude ; longitude) associé à un point de la sphère constitue les coordonnées sphériques (ou géographiques) du point.

Illustration :



Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Les grands cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont, en ce qui concerne la planète Terre, l'Equateur (latitude 0°) et le méridien de Greenwich (longitude 0°).
2. Tout cercle intersection de la sphère et d'un plan parallèle au plan contenant l'équateur est appelé un parallèle. En géographie, le cercle polaire Arctique (environ 66° Nord), le tropique du Cancer (environ 23° Nord), le tropique du Capricorne (environ 23° Sud) et le cercle polaire Antarctique (environ 66° Sud) sont les principaux parallèles.
3. Tout grand cercle intersection de la sphère et d'un plan orthogonal au plan contenant l'Equateur est appelé méridien.

Proposition 96. *L'aire d'une sphère de rayon r s'exprime selon la formule :* $\mathscr{A} = 4\pi r^2$.

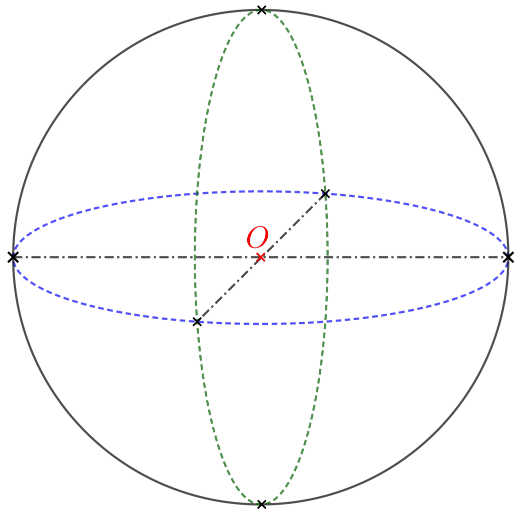
Démonstration. Si l'on voit la sphère comme l'assemblage d'un grand nombre de pyramides à base polygonale, de sommet commun le centre de la sphère et de hauteur commune le rayon r de la sphère, alors le total des aires est $4\pi r^2$. □

Remarque. L'aire de la sphère de rayon r est étonnemment égale à l'aire latérale du cylindre droit circonscrit à la sphère.

13.2 Boule

Définition 97. Soit O un point de l'espace. Soit r un nombre réel positif. On appelle boule de centre O et de rayon r l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leqslant r$.

Illustration :



Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. On peut faire l'analogie avec la définition du disque de centre O et de rayon r dans le plan. Il s'agit en fait de la même définition dans un espace de dimension deux. On remarquera que la sphère de centre O et de rayon r est incluse dans la boule de centre O et de rayon r.
2. On pourra retenir l'abuse de langage suivant : la sphère est vide, la boule est pleine. En termes plus précis, la sphère est un objet de dimension deux alors que la boule est un objet de dimension trois.

Proposition 98. *Le volume d'une boule de rayon r s'exprime selon la formule :* $\mathscr{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Démonstration. Démonstration de Luca Valerio [1]. □

1. Luca Valerio est un mathématicien italien né à Naples en 1 553 et mort à Rome en 1 618.

Chapitre 14

Fonctions numériques

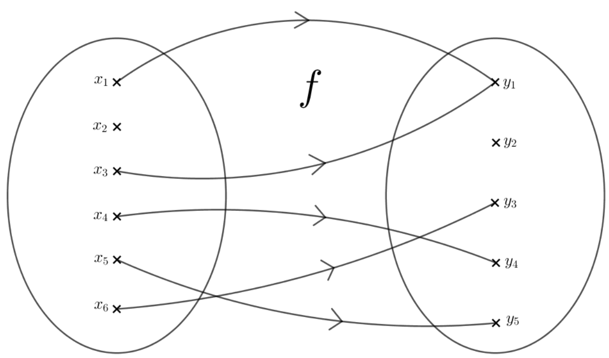
Jean Bernoulli

(Bâle 1667 - Bâle 1748)

14.1 Point de vue algébrique

Définition 99. Soient A et B deux ensembles. On appelle fonction f de A vers B toute correspondance qui, à chaque élément de A, associe un ou zéro élément de B. L'ensemble A est appelé la source et B le but.

Illustration : Diagramme sagittal ou diagramme d'Euler.



Vocabulaire :

— On dit que f est la fonction de A vers B qui, à x, associe $f(x)$.
— x est appelé la variable et $f(x)$ est appelé l'image de x par f.
— Si B est un ensemble de nombres réels, alors on dit que f est une fonction numérique.
— Si A est un ensemble de nombres réels, alors on dit que f est une fonction d'une variable réelle.

— Si $A = \mathbb{N}$, alors on dit que f est une suite.

Notation : $f \,:\, \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.

Exemple. Voici quelques exemples de fonctions usuelles :

1. $f \,:\, x \longmapsto 88$ est une fonction constante.
2. $g \,:\, x \longmapsto 1,618x$ est une fonction linéaire.
3. $h \,:\, x \longmapsto 3,14x + 2021$ est une fonction affine.
4. $i \,:\, x \longmapsto x^2$ est la fonction carrée.
5. $j \,:\, x \longmapsto x^3$ est la fonction cube.

Remarque. On peut d'ores et déjà effectuer plusieurs remarques :
— Lorsque v est l'image de u par f, on dit aussi que u est un antécédent de v par f et l'on note : $v = f(u)$.
— La symétrie centrale, la symétrie axiale, la rotation et la translation sont des fonctions.

Définition 100. Soit f une fonction d'un ensemble A vers un un ensemble B. On appelle domaine de définition de f l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f. On le note $\mathscr{D}_f$.

Exemple. Voici deux fonctions dont le domaine de définition n'est pas $\mathbb{R}$:

1. La fonction racine carrée, $f \,:\, x \longmapsto \sqrt{x}$, est définie sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels positifs.
2. La fonction inverse, $f \,:\, x \longmapsto \frac{1}{x}$, est définie sur $\mathbb{R}^*$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels non nuls.

Remarque. On peut déterminer algébriquement une image et d'éventuels antécédents lorsque ceux-ci existent.

Exemple. Soit $f \,:\, x \longmapsto 9x^2 - 12x + 4$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Calculer l'image de 0 par f.
3. Déterminer les éventuels de 0 par f sur $\mathscr{D}_f$.

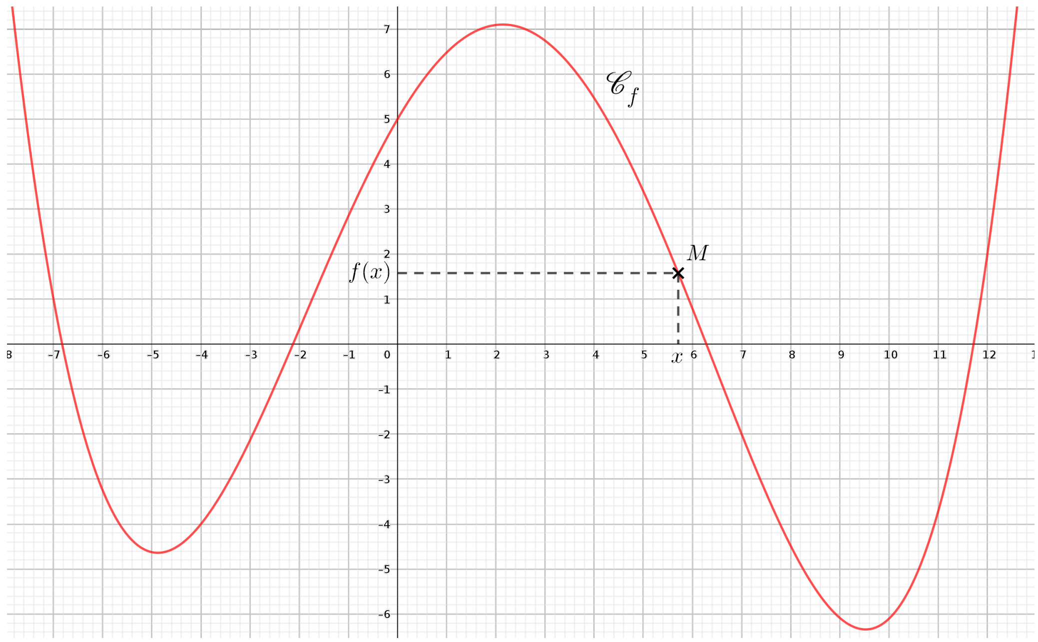
Remarque. On peut effectuer deux remarques :
— Tout réel du domaine de définition possède une unique image.
— Un réel peut ne pas voir d'antécédent, en avoir un seul, plusieurs, et même une infinité !

14.2 Point de vue géométrique

Définition 101. Soit $(O; I, J)$ un repère du plan. Soit f une fonction numérique d'une variable réelle. On appelle courbe représentative, représentation graphique ou encore graphe de f l'ensemble des points $M\left(x; f(x)\right)$, où $x \in \mathscr{D}_f$. On la note $\mathscr{C}_f$. Formellement, on a :

$$\mathscr{C}_f = \left\{M\left(x; f(x)\right), \, x \in \mathscr{D}_f\right\}$$

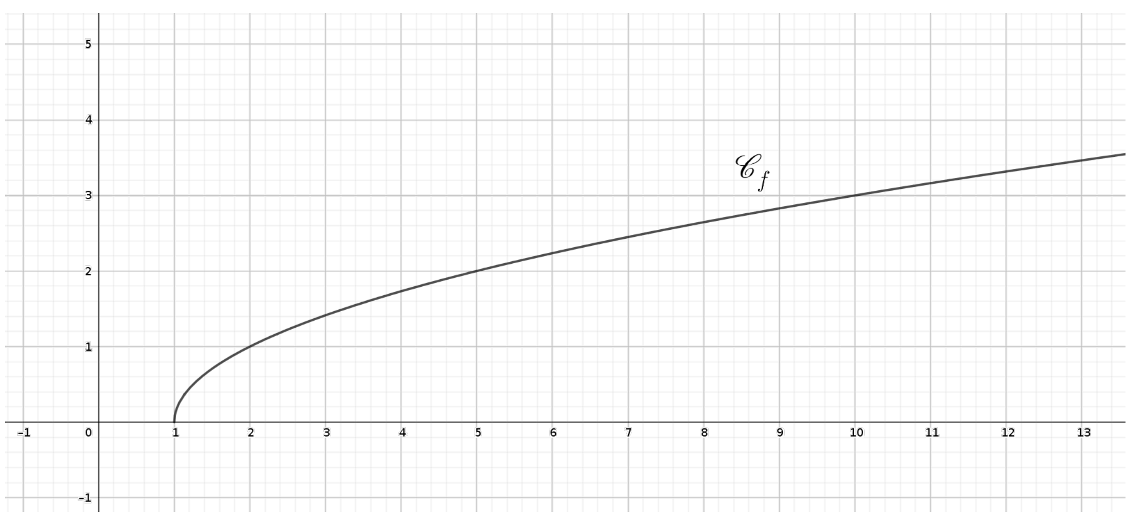
Illustration :



Remarque. On a l'équivalence suivante : $(M(x;y) \in \mathscr{C}_f) \Leftrightarrow (x \in \mathscr{D}_f \text{ et } y = f(x))$.

Exemple. Le point $A(-2;7)$ appartient-il à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f : x \longmapsto 3x^2 - 5x - 12$?

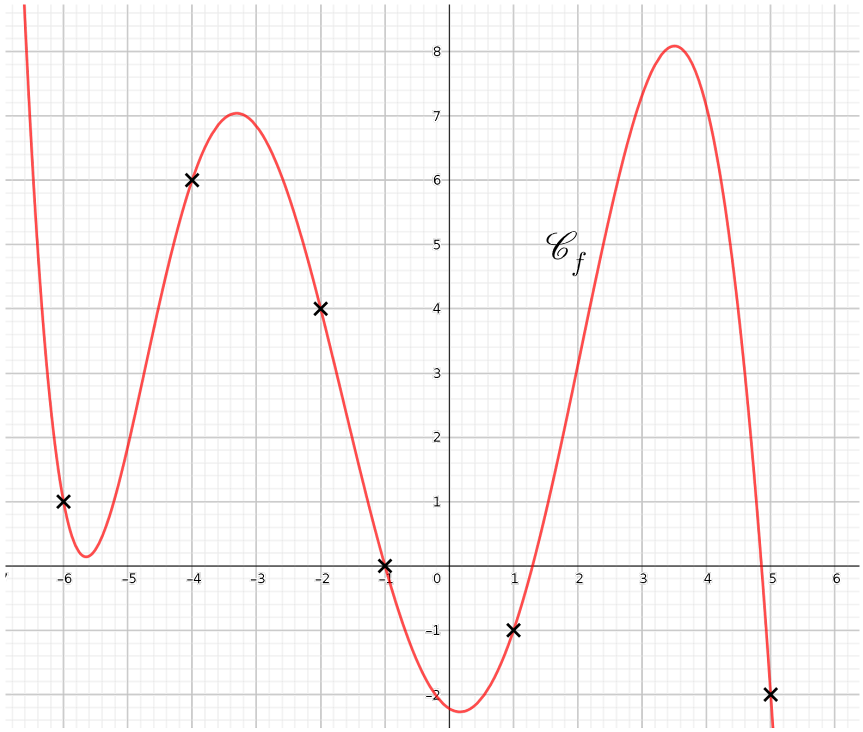
Illustration : Voici la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x-1}$:



Vocabulaire : On dit que $y = f(x)$ est l'équation cartésienne de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Remarque. On peut déterminer géométriquement une image et d'éventuels antécédents lorsque ceux-ci existent.

Exemple. Soit f une fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessous :



Lisons quelques images par f.

Chapitre 15

Fonctions linéaires

Gottfried Wilhelm Leibniz

(Leipzig 1646 - Hanovre 1716)

15.1 Point de vue algébrique

Définition 102. Soit a un nombre réel. On appelle fonction linéaire f de coefficient a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a \times x = ax$.

Exemple. $f : x \longmapsto 3x$, $g : \longmapsto \pi x$ et $h : x \longmapsto -x$ sont linéaires.

Proposition 103. *Soit f une fonction linéaire. Soient x, y et k trois réels. On a :*

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $f(k \times x) = k \times f(x)$

Démonstration. Soit a le coefficient de la fonction linéaire f. Soient x, y et k trois réels. On a :
1. $f(x + y) = a \times (x + y) = a \times x + a \times y = f(x) + f(y)$
2. $f(k \times x) = a \times (k \times x) = (a \times k) \times x = (k \times a) \times x = k \times (a \times x) = k \times f(x)$

□

Remarque. On a les deux réciproques suivantes :

Proposition 104. *Soit f une fonction. Si, pour tous nombres réels k et x, $f(kx) = kf(x)$, alors f est linéaire.*

Démonstration. Posons $a := f(1)$. Soit x un nombre réel. On a : $f(x) = f(x \times 1) = x \times f(1) = x \times a = ax$. □

Proposition 105. *Soit f une fonction. Si, pour tous nombres réels x et y, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, alors f est linéaire.*

Démonstration. Soient x et y deux nombres réels. Supposons x entier relatif. Alors on a :

$$f(x \times y) = f(\underbrace{y + \ldots + y}_{x \text{ termes } y}) = \underbrace{f(y) + \ldots + f(y)}_{x \text{ termes } f(y)} = x \times f(y)$$

Donc, d'après la proposition 97, f est linéaire. On admet le cas où x n'est pas un entier relatif. □

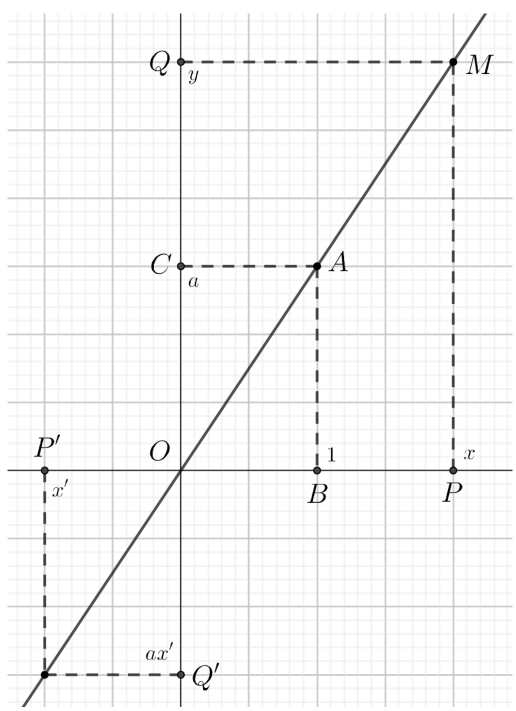
Remarque. On peut effectuer quatre remarques :

1. Les égalités (1) et (2) caractérisent la linéarité d'une fonction.
2. Tout nombre réel admet une unique image par une fonction linéaire.
3. Tout nombre réel admet un unique antécédent par une fonction linéaire.
4. Ce n'est pas le cas de toutes les fonctions. Exemples : fonction inverse et fonction carrée.

15.2 Point de vue géométrique

Théorème 106. *Soit f une fonction. Si f est linéaire, alors sa courbe représentative dans un repère du plan est une droite passant par l'origine du repère.*

Démonstration. Soit f une fonction linéaire de coefficient a. Alors la courbe représentative de f dans un repère du plan est, par définition, l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ qui vérifient $y = f(x) = a \times x$.
Soit A le point de coordonnées $(1; a)$. Soit B le point d'intersection de la parallèle à l'axe des ordonnées passant par A. Soit C le point d'intersection de la parallèle à l'axe des abscisses passant par A. On a : $\overline{OB} = 1$ et $\overline{OC} = a$.
Démontrons que tout point de la droite (OA) appartient à la courbe représentative de f et réciproquement.



$\Rightarrow$: soit M un point de la droite (OA). Soit P le point d'intersection de la parallèle à l'axe des ordonnées passant par M. Soit Q le point d'intersection de la parallèle à l'axe des abscisses passant par M. Les coordonnées de M sont alors : $\overline{OP} = x$ et $\overline{OQ} = y$. Démontrons que ces coordonnées x et y vérifient la relation : $y = ax$.
D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OP}}$ et $\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OQ}}$. D'où : $\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OQ}}$, soit : $\frac{1}{x} = \frac{a}{y}$. D'où : $y = ax$.
$\Leftarrow$: soit x' un nombre réel. Soit M' le point de coordonnées $(x'; ax')$. Démontrons que M' appartient à (OA). Soit P' le point de l'axe des abscisses tel que $\overline{OP} = x'$. La parallèle à l'axe des ordonnées passant par P' coupe (OA) en M'. Donc, d'après ce qui précède, $M' \in (OA)$ et a pour ordonnée ax'. Ainsi, le point de coordonnées $(x'; ax')$ est le point M' et il appartient à (OA).

□

Remarque. Le nombre réel a est appelé le coefficient directeur de la droite (OA).

Proposition 107. *Avec les notations de la démonstration précédente, si l'on suppose le repère orthonormé, alors on a :* $\tan(\widehat{BOA}) = |a|$.

Démonstration. Évidente d'après la définition de la tangente. □

Proposition 108. *Soit d une droite non parallèle à l'axe des ordonnées du repère du plan choisi. Alors d est la courbe représentative d'une fonction linéaire.*

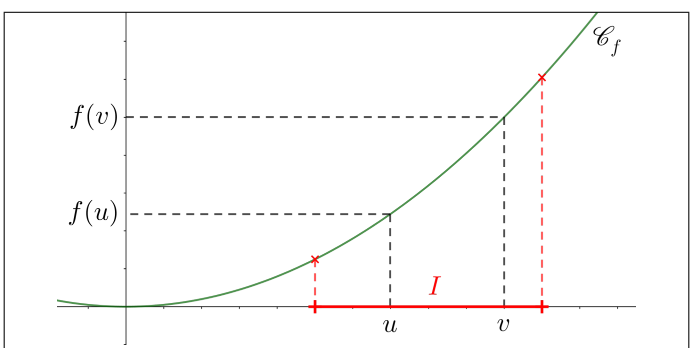
Démonstration. Laissée en exercice. On pourra utiliser le théorème de Thalès. □

15.3 Sens de variation d'une fonction linéaire

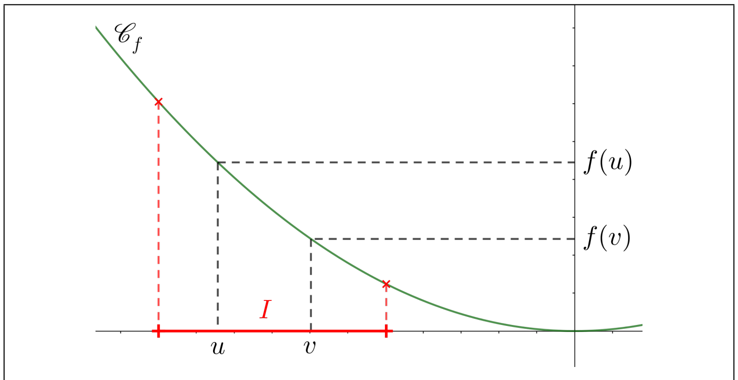
Définition 109. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que :

1. f est constante sur I si, pour tous u, $v \in I$, $f(u) = f(v)$.
2. f est croissante sur I si, pour tous u, $v \in I$,$(u < v) \Rightarrow (f(u) \leqslant f(v))$.
3. f est strictement croissante sur I si, pour tous u, $v \in I$,$(u < v) \Rightarrow (f(u) < f(v))$.
4. f est décroissante sur I si, pour tous u, $v \in I$,$(u < v) \Rightarrow (f(u) \geqslant f(v))$.
5. f est strictement décroissante sur I si, pour tous u, $v \in I$,$(u < v) \Rightarrow (f(u) > f(v))$.
6. f est monotone sur I si f est croissante ou décroissante sur I.
7. f est strictement monotone sur I si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

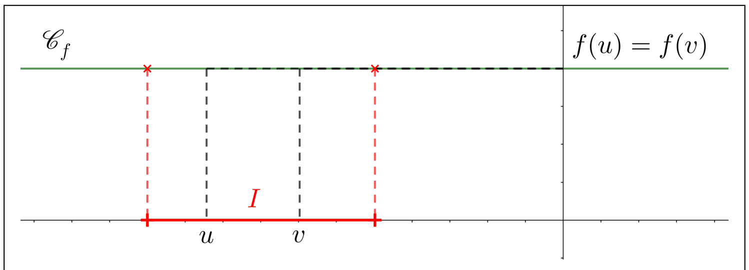
Illustration : Voici les illustration de ces définitions :



f est strictement croissante sur $I \Leftrightarrow \mathscr{C}_f$ « monte » sur I



f est strictement décroissante sur $I \Leftrightarrow \mathscr{C}_f$ « descend » sur I



f est constante sur $I \Leftrightarrow \mathscr{C}_f$ ne monte, ni ne descend sur I

Remarque. On résume souvent les variations d'une fonction dans un tableau de variations.

Exemple. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, croissante sur $]-\infty;-2]$ et décroissante sur $[-2;+\infty[$, alors on résume cela ainsi :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f		$\nearrow$	10	$\searrow$	

Proposition 110. *Soit f une fonction linéaire de coefficient a. Alors :*

1. *Si $a > 0$:*

x	$-\infty$		$+\infty$
f		$\nearrow$	

2. *Si $a < 0$:*

x	$-\infty$		$+\infty$
f		$\searrow$	

3. *Si $a = 0$:*

x	$-\infty$		$+\infty$
f		$\rightarrow$	

Démonstration. 1. Soient x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$. Alors : $ax_1 < ax_2$ car $a > 0$. D'où : $f(x_1) < f(x_2)$. Par définition, f est donc strictement croissante.
2. et 3. : laissées en exercice. □

Exercice. Soit f la fonction linéaire par $f(x) = -\frac{3}{2}x$. Dresser le tableau de variations de f.

15.4 Signe d'une fonction linéaire

Proposition 111. *Soit f une fonction linéaire de coefficient a. Alors :*

1. *Si $a > 0$:*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. *Si $a < 0$:*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

3. *Si $a = 0$:*

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		0	

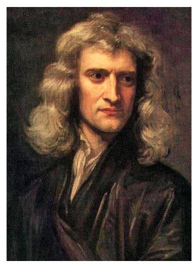
Démonstration. 1. Si $x < 0$, alors : $ax < 0$ car $a > 0$. On en déduit : $f(x) < 0$.
Si $x > 0$, alors : $ax > 0$ car $a > 0$. On en déduit : $f(x) > 0$. Si $x = 0$, alors $f(x) = f(0) = a \times 0 = 0$.
2. et 3. : laissées en exercices.

□

Exercice. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{3}{2}x$. Dresser le tableau de signes de f.

Chapitre 16

Fonctions affines



Isaac Newton

(Woolsthorpe 1642 - Kensington 1727)

16.1 Point de vue algébrique

Définition 112. Soient a et b deux nombres réels. On appelle fonction affine associée au couple $(a; b)$ le fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

Exemple. $f : x \longmapsto -6x + 11$ est une fonction affine. En effet, $a = -6$ et $b = 11$.

Proposition 113. *Soit f une fonction affine associée au couple de nombres réels $(a; b)$. Alors les accroissements de x et de $f(x)$ sont proportionnels. Plus formellement, pour tous nombres réels x_1 et x_2, on a : $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$.*

Démonstration. Soient x_1 et x_2 deux nombres réels. On a :

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = ax_2 + b - ax_1 - b = a(x_2 - x_1)$$

□

Proposition 114. *Soit f une fonction affine associée au couple de nombres réels $(a; b)$ avec $a \neq 0$. Soit y un nombre réel fixé. Alors y admet un unique antécédent par f, à savoir le nombre réel $x = \frac{y-b}{a}$.*

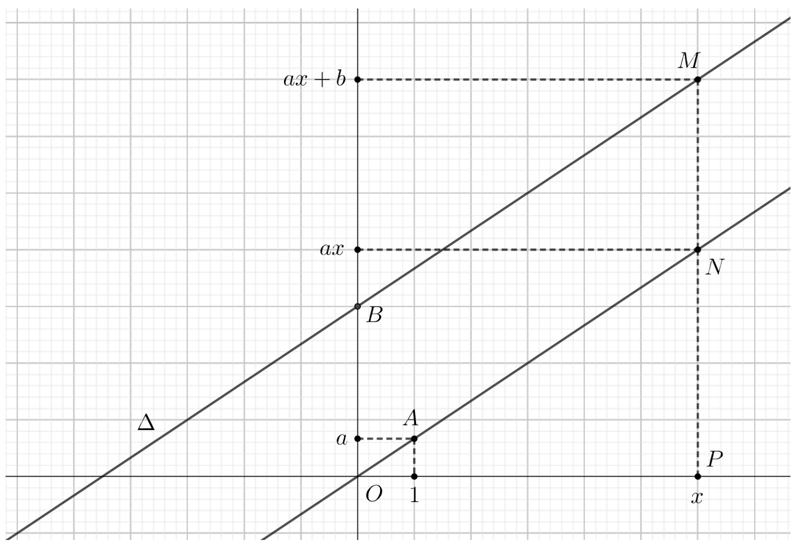
Démonstration. Supposons qu'il existe un nombre réel x tel que $f(x) = y$. Alors $y = ax + b$, et donc $x = \frac{y-b}{a}$. Réciproquement, si $x = \frac{y-b}{a}$, alors $f(x) = a \times \frac{y-b}{a} + b = y - b + b = y$. □

Remarque. Si $a = 0$, alors pour tout nombre réel x, $f(x) = b$. Ainsi, b a une infinité d'antécédents par f et tout autre nombre que b n'a pas d'antécédent par f.

16.2 Point de vue géométrique

Théorème 115. *Si f est une fonction affine associées au couple $(a; b)$, alors la courbe représentative de f dans un repère du plan est une droite. Plus précisément, cette droite passe par le point de coordonnées $(0; b)$ et est parallèles à la droite qui représente la fonction linéaire g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \longmapsto ax$.*

Démonstration. Soit $(a; b)$ un couple de nombres réels. Soit f la fonction affine associée au couple $(a; b)$. Soient $A(1; a)$ et $B(0; b)$ deux points du plan muni d'un repère. D'après le théorème 106, la fonction linéaire $g : x \longmapsto ax$ admet pour courbe représentative la droite (OA), où O est l'origine du repère. Soit Δ la droite parallèle à la droite (OA) passant par B. Démontrons que Δ est la courbe représentative de f.
$\supset$: soit $M(x; y)$ un point de la courbe représentative de f. Alors, par définition, $y = f(x)$, soit : $y = ax + b$. La parallèle à l'axe des ordonnées passant par M coupe l'axe des abscisses en P et (OA) en N. Par définition de l'abscisse, les points M, N et P ont la même abscisse x. Or N appartient à la courbe représentative de g, donc N a pour ordonnée ax. Ainsi, d'après la relation de Chasles, on a : $\overline{PM} = \overline{PN} + \overline{NM}$, soit $\overline{NM} = \overline{PM} - \overline{PN} = (ax + b) - ax = b$. Or $\overline{OB} = b$, donc les segments $[OB]$ et $[MN]$ ont même longueur et même orientation. Ainsi, par propriété, $OBMN$ est un parallélogramme. Donc M appartient à la droite parallèle à (OA) passant par B, c'est-à-dire Δ.



$\subset$: laissée en exercice. On pourra s'inspirer de la démonstration pour les fonctions linéaires. □

Remarque. La réciproque est elle aussi vraie.

Proposition 116. *Si une droite du plan n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors elle est la courbe représentative d'une fonction affine.*

Démonstration. Laissée en exercice. □

Définition 117. On dit qu'une droite a pour équation $y = ax + b$ lorsqu'elle est la courbe représentative de la fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$. Le nombre réel a est appelé le coefficient directeur de la droite et le nombre réel b est appelé l'ordonnée à l'origine de la droite.

Remarque. On comprend bien la dénomination de a et b. Observons l'influence de ces deux paramètres sur l'allure de la droite à l'aide du logiciel GéoGebra.

16.3 Sens de variation d'une fonction affine

Proposition 118. *Soient a, $b \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$. Alors :*

1. Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\nearrow$	

2. Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\searrow$	

3. Si $a = 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\rightarrow$	

Démonstration. 1. Soient x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$. Alors : $ax_1 < ax_2$ car $a > 0$. D'où : $ax_1 + b < ax_2 + b$, c'est-à-dire : $f(x_1) < f(x_2)$. Par définition, f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. et 3. : laissées en exercice. □

Exercice. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{3}{2}x + 1$. Dresser le tableau de variations de f.

16.4 Signe d'une fonction affine

Proposition 119. *Soient a, $b \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$. Alors :*

1. Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

3. Si $a = 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de b	

Démonstration. 1. Si $x < -\frac{b}{a}$, alors : $ax < -b$ car $a > 0$. On en déduit : $ax + b < 0$, c'est-à-dire : $f(x) < 0$.

Si $x > -\frac{b}{a}$, alors : $ax > -b$ car $a > 0$. On en déduit : $ax + b > 0$, c'est-à-dire : $f(x) > 0$. Si $x = -\frac{b}{a}$, alors $ax + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$.
2. et 3. : laissées en exercices.

$\square$

Exercice. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{3}{2}x + 1$. Dresser le tableau de signes de f.

16.5 Fonctions affines et droites

Remarque. Il existe au moins deux méthodes pour tracer la droite Δ d'équation $y = ax + b$.

1. On place deux points distincts de cette droite :
   On commence par placer $B(0; b)$, le point d'intersection de Δ et l'axe des abscisses. Puis, de deux choses l'une :
   (a) Si $a = 0$, alors Δ est la parallèle à l'axe des abscisses passant par B.
   (b) Si $a \neq 0$, alors on place le point $C\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ qui est le point d'intersection de Δ et l'axe des abscisses. On a $\Delta = (BC)$.
2. On place $B(0; b)$, puis on utilise la formule : $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$ pour placer un second point. En effet, lorsque x varie de $+1$, y varie de a. On peut donc partir du point B, « avancer » d'une unité vers la droite puis « monter » ou « descendre » de $|a|$.

Exemple. Traçons les droites suivantes :

1. $d_1 : y = \frac{3}{2}x + 2$
2. $d_2 : y = 2$
3. $d_3 : y = -\frac{3}{2}x + 2$

Chapitre 17

Systèmes linéaires

Carl Friedrich Gauss

(Brunswick 1 777 - Göttingen 1 855)

17.1 Introduction

Exemple. Nous avons vu au chapitre 16 que l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient l'équation $x - 3y = -3$ est une droite d de coefficient directeur $\frac{1}{3}$ et d'ordonnée à l'origine 1. De même, l'équation $x - y = 1$ caractérise la droite d' de coefficient directeur 1 et d'ordonnée à l'origine -1. On désire déterminer les coordonnées du point d'intersection. Pour cela, on peut tracer le droites d et d' dans un repère du plan et lire les coordonnées du point d'intersection I. Dans notre cas, on lit : $x_I = 3$ et $y_I = 2$. Puis on vérifie que le couple $(3;2)$ vérifie les équations de d et d'. Ainsi, $I(3;2)$ est le point d'intersection des droites d et d'.

Remarque. Malheureusement, il n'est pas toujours facile de lire les coordonnées du point d'intersection I. Il nous faut donc une méthode qui permette de trouver de manière exacte les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes.

Définition 120. Voici quelques définitions :

1. On appelle équation linéaire à deux inconnues x et y, toute équation qui se mettre sous la forme $ax + by = c$, où a, b et c sont des nombres réels tels que $(a;b) \neq (0;0)$.
2. On appelle système linéaire de deux équations à deux inconnues tout système d'équations qui peut se mettre sous la forme : $(\mathscr{S})$: $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$, où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels tels que $(a;b) \neq (0;0)$ et $(a';b') \neq (0;0)$.
3. On appelle solution du système $(\mathscr{S})$ tout couple de réels $(x;y)$ vérifiant à la fois l'équation (1) et l'équation (2).
4. Deux systèmes linéaires sont dits équivalents s'ils admettent le même ensemble de solutions.

17.2 Nombre de solutions

Proposition 121. *Soit le système linéaire* $(\mathscr{S})$: $\begin{cases} ax+by=c & (1) \\ a'x+b'y=c' & (2) \end{cases}$, *où* a, b, c, a', b' *et* c' *sont des nombres réels tels que* $(a;b) \neq (0;0)$ *et* $(a';b') \neq (0;0)$. *Soit* d *la droite d'équation* $ax+by=c$. *Soit* d' *la droite d'équation* $a'x+b'y=c'$. *Alors :*

1. d *et* d' *sont sécantes si, et seulement si,* $ab'-a'b \neq 0$.
2. d *et* d' *sont parallèles si, et seulement si,* $ab'-a'b=0$.

Démonstration. Démontrons le point 2. dans le cas où $b \neq 0$ et $b' \neq 0$. Dans ce cas, le système $(\mathscr{S})$ est équivalent à : $\begin{cases} y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b} \\ y=-\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{b'} \end{cases}$. Ainsi, les droites d et d' ont respectivement pour coefficient directeur $-\frac{a}{b}$ et $-\frac{a'}{b'}$. Ainsi, d et d' sont parallèles si, et seulement si, $-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$, c'est-à-dire si, et seulement si, $ab'-a'b=0$. □

Définition 122. On appelle déterminant su système linéaire $(\mathscr{S})$: $\begin{cases} ax+by=c & (1) \\ a'x+b'y=c' & (2) \end{cases}$ le nombre réel $\Delta = ab'-a'b$.

Remarque. Le déterminant d'un système se calcule aisément avec le tableau suivant :

$$\begin{vmatrix} a & & b \\ & \rtimes & \\ a' & & b' \end{vmatrix}$$

Théorème 123. *Soit le système linéaire* $(\mathscr{S})$: $\begin{cases} ax+by=c & (1) \\ a'x+b'y=c' & (2) \end{cases}$.

1. *Si* $\Delta \neq 0$, *alors* $(\mathscr{S})$ *admet un unique couple solution.*
2. *Si* $\Delta = 0$, *alors* $(\mathscr{S})$ *admet soit une infinité de couples solutions, soit aucun couple solution.*

Démonstration. 1. Si $\Delta = 0$, alors les droites d et d' d'équations respectives (1) et (2) sont sécantes. Donc leur intersection est réduite à un point. Autrement dit, le système $(\mathscr{S})$ admet un unique couple solution, les coordonnées du point d'intersection de d et d'.
2. Si $\Delta \neq 0$, alors les droites d et d' sont parallèles :
Si elles sont confondues, alors le système $(\mathscr{S})$ admet une infinité de couples solutions, à savoir les coordonnées de tous les points de d.
Si elles sont strictement parallèles, alors les droites d et d' n'ont aucun point commun. Autrement dit, le système $(\mathscr{S})$ n'admet aucune solution. On dit parfois que le système est incompatible. □

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Si k est un réel non nul, alors les équations $ax+by=c$ et $(ka)x+(kb)y=kc$ sont équivalentes et elles définissent donc la même droite.
2. Si $\Delta = 0$, $a' \neq 0$, $b' \neq 0$ et $c' \neq 0$, alors :
   (a) Si $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$, alors les deux équations du système représentent le même droite. Le système admet alors une infinité de couples solutions.
   (b) Si l'un des rapports $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$ et $\frac{c}{c'}$ est différent des deux autres, alors les deux droites sont strictement parallèles. Le système n'admet alors aucun couple solution.

Exemple. Résolvons les systèmes linéaires suivants :

1. $(\mathscr{S}_1)$: $\begin{cases} x - 3y = -3 & (1) \\ x - y = 1 & (2) \end{cases}$
2. $(\mathscr{S}_2)$: $\begin{cases} x + y\sqrt{2} = 3 & (1) \\ x\sqrt{2} + 2y = 3\sqrt{2} & (2) \end{cases}$

Remarque. Résoudre le système $(\mathscr{S}_3)$: $\begin{cases} 0,4x - 0,6y = -1,2 & (1) \\ 2x - 3y = -3 & (2) \end{cases}$.

17.3 Méthodes de résolution

Remarque. Après avoir vu comment déterminer le nombre de solutions d'un système linéaire, nous allons donner deux méthodes permettant d'obtenir algébriquement le (les) couple(s) solution(s) d'un système linéaire donné.

17.3.1 Résolution par substitution

Exemple. Résolvons le système linéaire $(\mathscr{S}_1)$: $\begin{cases} 2x - 3y = -5 & (1) \\ 7x - 4y = 2 & (2) \end{cases}$

1. On calcule le déterminant Δ du système linéaire.
2. On exprime x en fonction de y à l'aide de l'équation (1).
3. On substitue à x son expression en fonction de y dans l'équation (2).
4. On résout l'équation (2), on obtient y.
5. On injecte la valeur trouvée pour y dans l'équation (1) ou (2), on obtient x.
6. On vérifie que le couple $(x; y)$ trouvé vérifie bien le système.

Remarque. La vérification n'a aucune valeur logique ici et n'est pas nécessaire. Elle est un simple moyen de se rassurer.

17.3.2 Résolution par combinaison

Exemple. Résolvons le système linéaire $(\mathscr{S}_1)$: $\begin{cases} 4x - 3y = 7 & (1) \\ 7x - 2y = -4 & (2) \end{cases}$

1. On calcule le déterminant Δ du système linéaire.
2. On égalise les coefficients en y en multipliant les équations par un réel k.
3. On remplace l'une des deux équations par la différence des deux.
4. On résout l'équation issue de la différence.
5. On détermine l'autre inconnue en injectant la valeur trouvée dans l'une des deux équations.
6. On vérifie que le couple $(x; y)$ trouvé vérifie bien le système.

Remarque. Là encore, la vérification n'a aucune valeur logique et n'est pas nécessaire. Elle est un simple moyen de se rassurer.

Chapitre 18

Probabilités

Pierre-Simon de Laplace

(Beaumont-en-Auge 1749 - Paris 1827)

18.1 Généralités

Définition 124. On appelle expérience aléatoire une expérience renouvelable dont les résultats possibles sont connus sans que l'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

Remarque. L'objectif de ce chapitre est de mathématiser les expériences aléatoires.

Définition 125. On appelle univers d'une expérience aléatoire l'ensemble des issues possibles appelées également éventualités ou événements élémentaires. On le note Ω.

Exemple. Voici quelques exemples d'expériences aléatoires et d'univers associés :

1. Le lancer d'un dé ou plusieurs dés ;
2. Le tirage d'un carte dans un jeu classique de 32 cartes ou 54 cartes ;
3. Le prélèvement d'un jeton dans une urne.

Définition 126. On appelle événement un sous-ensemble de l'univers. Il peut toujours se décrire à l'aide d'issues.

Exemple. Si l'expérience aléatoire est le lancer d'un dé classique équilibré, alors l'événement : « Obtenir un nombre pair » est la réunion des issues : « Obtenir 2 », « Obtenir 4 » et « Obtenir 6 ».

18.2 Calculs de probabilités

Définition 127. On appelle probabilité d'une issue d'une expérience aléatoire la « chance » qu'elle a de se réaliser. Cette « chance » est égale au quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas total. On appelle probabilité d'un événement la somme des probabilités des événements le constituant. Si A désigne un tel événement, alors on note $p(A)$ la probabilité de l'événement A.

Remarque. On a évidemment : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Vocabulaire :

1. Un événement dont la probabilité est nulle est dit impossible.
2. Un événement dont la probabilité est égale à 1 est dit certain.

Définition 128. On appelle modèle équiréparti une modélisation de l'expérience aléatoire où chaque issue a la même probabilité valant :

$$\frac{1}{\text{Nombre d'issues possibles}}$$

On dit aussi qu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

Remarque. C'est le choix de l'univers qui engendre ou non une situation d'équiprobabilité.

Définition 129. On appelle loi de probabilité sur un univers la donnée de chaque issue à laquelle est associé un nombre de l'intervalle $[0; 1]$ appelé sa probabilité.

Exemple. Voici la loi de probabilité relative au lancer d'un dé légèrement pipé :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Remarque. La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1.
Dans un modèle équiréparti, pour déterminer la probabilité d'un événement, il suffit de compter les issues constituant cet événement puis de la diviser par le nombre d'issues total.

Proposition 130. *Soit A un événement. On appelle événement contraire de A, noté $\overline{A}$, l'événement constitué des issues de l'univers n'appartenant pas à A. On a : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.*

Démonstration. Par définition de l'événement contraire, on a : $A \cup \overline{A} = \Omega$. D'où : $P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega)$.
Soit : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Ainsi : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. □

Exemple. Si l'expérience aléatoire est le lancer d'un dé classique équilibré, si A désigne l'événement : « Obtenir 1 », alors $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Exercice. Voici deux exercices :

1. On lance cinq dés classiques équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux nombres identiques ?
2. (Les dés de Sicherman) On appelle dés de Sicherman une paire de dés dont les faces sont numérotées de la façon suivante :
   Premier dé : 1, 2, 2, 3, 3 et 4.
   Deuxième dé : 1, 3, 4, 5, 6 et 8.
   On lance les deux dés de Sicherman simultanément et on s'intéresse à la somme des points obtenus sur les faces supérieures.
   (a) Calculer les probabilités des différentes valeurs que cette somme peut prendre.

(b) Comparer ces probabilités avec celles obtenues lorsque l'on lance deux dés classiques équilibrés.

Remarque. Lorsque la probabilité d'un événement est inacessible en raison du nombre important de paramètres physiques à prendre en compte, il peut être judicieux de faire appel aux statistiques. En pratique, on remplace alors la probabilité théorique inconnue car inacessible dans l'état des connaissances actuelles par une fréquence observée sur un grand échantillon en vertu de la « loi faible des grands nombres » :

Théorème 131. *(Loi faible des grands nombres) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On répète n fois de façon identique et indépendante une expérience aléatoire. Alors la fréquence d'une issue va se stabiliser autour de sa probabilité lorsque n augmente.*

Exercice. Écrire un algorithme permettant de simuler le lancer d'un dé classique équilibré.

Chapitre 19

Statistiques

Antoine Deparcieux

(Mas du Clotet 1703 - Paris 1768)

19.1 Étendue d'une série statistique

Définition 132. On appelle étendue d'une série statistique la longueur sur laquelle s'étend la série des données. Plus concrètement, c'est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur du caractère étudié.

Exemple. (Classe - Pointure)

Remarque. Il s'agit d'un paramètre de dispersion de la série statistique. Il mesure l'homogénéité d'une série statistique.

19.2 Quartiles

Définition 133. On appelle premier quartile d'une série statistique numérique, noté Q_1, la plus petite valeur prise par le caractère telle qu'au moins 25 % des valeurs lui soient inférieures ou égales. On appelle troisième quartile d'une série statistique numérique, noté Q_3, la plus petite valeur prise par le caractère telle qu'au moins 75 % des valeurs lui soient inférieures ou égales.

Exemple. (Classe - Pointure)

Remarque. Les quartiles sont des paramètres dits de « position » car ils permettent de positionner la population sur un axe gradué.

Définition 134. On appelle écart interquartile d'une série statistique la différence $Q_3 - Q_1$.

Exemple. (Classe - Pointure)

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. L'écart interquartile $Q_3 - Q_1$ est quant à lui un paramètre de dispersion.
2. Les fréquences cumulées croissantes (F.C.C.) et les fréquences cumulées décroissantes facilitent considérablement la recherche de la médiane et des quartiles.

19.3 Diagramme de Tukey [1]

Définition 135. Le diagramme de Tukey (ou encore diagramme en boîte, diagramme en moustache) est un diagramme présentant les quartiles, la médiane, l'écart interquartile, l'étendue et éventuellement la moyenne d'une série statistique sur un axe.

Exemple. (Classe - Pointure)

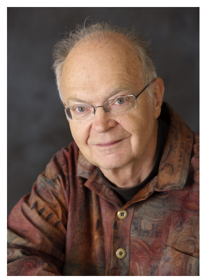
Remarque. Ce diagramme permet une visualisation rapide des grandes répartitions de la série :

1. L'étendue va d'une extrémité à l'autre ;
2. L'écart interquartile est la longueur de la boîte et couvre au moins 50 % des valeurs ;
3. Chaque « moustache », limites comprises, contient au moins 25 % des valeurs ;
4. La médiane, marquée par un trait vertical, sépare la boîte en deux parties contenant chacune (limites comprises) au moins 25 % des valeurs.

1. John Tukey est un statisticien américain né en 1915 et mort en 2000.

Chapitre 20

Algorithmique



Donald Knuth

(Milwaukee 1938)

20.1 Boucle conditionnelle

Remarque. On a souvent besoin de faire répéter par l'ordinateur un certain nombre d'instructions similaires. Bien entendu, ces instructions ne doivent pas être effectuées indéfiniment, il est nécessaire, qu'au bout d'un certain temps, l'ordinateur arrête de travailler et nous renvoie la sortie attendue. Il doit donc y avoir une condition qui indique si les instructions en question doivent encore ou non être exécutées.

Exemple. Imaginons que l'on veuille demander à l'ordinateur d'afficher tous les multiples de 17 inférieurs à 500. On peut pour cela considérer une variable x que l'on initialise à 0 et que l'on augmente de 17 à chaque itération *tant que* son contenu est inférieur à 500. Une telle structure informatique s'appelle une boucle conditionnelle (ou encore boucle « tant que »). Tant que la condition n'est pas remplie, on répète le corps de la boucle. Le nombre d'exécutions du corps de la boucle n'est pas défini avant le début des itérations. On peut représenter cette boucle par l'arbre décisionnel ci-dessous :

$$\downarrow$$

$$a \leftarrow 0$$

$$\downarrow$$

$$a < 500\,? \qquad \rightarrow \text{NON}$$

$$\nearrow \qquad \downarrow \text{OUI}$$

$$\uparrow$$

$$\nwarrow \qquad \text{Afficher } a$$

$$a \leftarrow a + 17$$

Remarque. Dans les langages de programmation, la syntaxe pour une boucle conditionnelle fait souvent appel au mot-clé « tant que ».

Exemple. L'algorithme d'Euclide : on effectue des divisions euclidiennes successives tant que le reste de ces divisions euclidiennes n'est pas nul.

Tant que b ne divise pas a

  $r \leftarrow$ reste de la division euclidienne de a par b

  $a \leftarrow b$

  $b \leftarrow r$

Afficher r

Fin

Après exécution de ces instructions, le contenu de la variable r est égal au PGCD des nombres initialement stockées dans les variables a et b[1].

20.2 Boucle itérative

Remarque. A côté des boucles conditionnelles, les langages de programmation proposent souvent une structure que l'on appelle boucle itérative (ou boucle « pour »). On utilise une telle structure lorsque l'on sait, avant le début des itérations, le nombre d'itérations qui seront effectuées. La syntaxe peut ressembler à celle ci-dessous :

Pour k allant de a à b

  instructions à répéter faisant éventuellement intervenir k

Fin

La variable k joue un rôle particulier, elle permet de compter les boucles déjà effectuées. On l'appelle ainsi « compteur » ou encore « indice » de la boucle. Au début l'ordinateur stocke a dans k et exécute une première les instructions. Puis, il augmente d'une unité la valeur de la variable k (on parle d'incrémentation d'une unité que l'on pourrait noter $k \leftarrow k+1$) et exécute une nouvelle fois les instructions. Ainsi de suite jusqu'à ce que k ait pris la valeur b et les instructions aient été exécutées une dernière fois. Le nombre d'itérations est donc connu a priori (il est égal à $b-a+1$) contrairement au cas d'une boucle conditionnelle.

Exemple. Calcul de la somme des n premiers entiers naturels. On souhaite calculer la somme :

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 1\,000$$

On peut écrire l'algorithme suivant :

$S \leftarrow 0$

Pour k allant de 1 à 100

  $S \leftarrow S + k$

Afficher S

Fin

Le « prince des mathématiciens », Carl Friedrich Gauss[2] avait quant à lui trouver un moyen astucieux de calculer cette somme bien avant l'ère de l'informatique...

1. Sauf dans le cas où le contenu initial de b divisait déjà a, auquel cas, le PGCD est égal au contenu initial de b.
2. Gauss est un mathématicien allemand né en 1 777 et mort en 1 855.

Exercice. Voici deux exercices :

1. Écrire un algorithme renvoyant la somme des n premiers entiers naturels pairs (impairs).
2. Écrire un algorithme renvoyant la somme de tous les nombres présents dans le tableau ci-dessous :

$\times$	1	2	$\dots$	99	100
1	1	2	$\cdots$	99	100
2	2	4	$\cdots$	198	200
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
99	99	198	$\cdots$	9 801	9 900
100	100	200	$\cdots$	9 900	10 000

Remarque. Toute boucle itérative peut être réécrite en une boucle conditionnelle :

Pour k allant de a à b
    Instructions
Fin

DEVIENT

$k \leftarrow a$
Tant que $k \leqslant b$
    Instructions
    $k \leftarrow k + 1$
Fin

Index