FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN - EXERCICES

Exercice 1

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \longmapsto x\ln(x) - x + 3$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction $g : x \longmapsto \ln(x^2+1) + x$.
3. Résoudre les (in)équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

$(E_1) : \ln\left(7 - \frac{x}{2}\right) = 1$	$(E_2) : \ln\left(\frac{x+1}{2x+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$	$(E_3) : \ln(3x-1) - \ln(x+2) = -\ln(2)$
$(I_1) : \ln(2x-1) + \ln(x+3) \geqslant \ln(15)$	$(I_2) : \ln(x) \geqslant \ln(4) - \ln(x+1)$	$(I_3) : \ln(1+e^x) + \ln(1-e^x) \geqslant \frac{1}{2}$

Exercice 2

Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{\ln(x)}$. Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit g la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x)$. Soit $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \ln(x))$. Interpréter graphiquement.
3. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4. Soit $a \in]1;+\infty[$. Soit $\mathscr{T}_a$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.
   Démontrer que $O \in \mathscr{T}_a$ si, et seulement si, $f(a) - af'(a) = 0$.
5. Soit h la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - xf'(x)$.
   Démontrer que résoudre l'équation $h(x)$ sur $]1;+\infty[$ est équivalent à résoudre l'équation $(\ln(x))^3 - (\ln(x))^2 - \ln(x) - 1 = 0$ sur $]1;+\infty[$.
6. Soit k la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $k(x) = t^3 - t^2 - t - 1$.
   (a) Démontrer que l'équation $k(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]1;+\infty[$.
   (b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
7. Démontrer qu'il existe alors une unique tangente à $\mathscr{C}_f$ passant par O. La préciser.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2+1)}{n}$.

1. Dresser le tableau de variations de f_1.
2. Dresser le tableau de variations de f_n.
3. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $\mathbb{R}_+$.
4. Démontrer que, tout entier naturel n non nul, $0 < \alpha_n < 1$.
5. Démontrer que, tout entier naturel n non nul, $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.
6. Démontrer que la suite α est croissante. En déduire qu'elle est convergente.
7. Déterminer la limite de la suite α.

Exercice 4

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$.

Partie A :

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n < 1$.
2. Déterminer le sens de variation de u.
3. La suite u converge-t-elle ?

Partie B :

1. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $\ln(x) \geqslant 1 - \frac{1}{x}$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel k non nul, $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leqslant \ln(2) \leqslant u_n + \frac{1}{2n}$.
4. Déterminer la limite de la suite u.