

PROMENADES MATHÉMATIQUES - « LA COURBE DE VON KOCH »

RÉGION MATHÉMATIQUE : Géométrie et analyse

NIVEAU DE DIFFICULTÉ : Première

ÉQUIPEMENT NÉCESSAIRE : Suites numériques

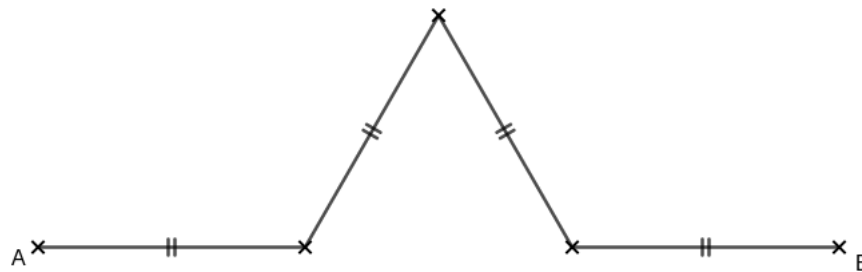
Limite d'une suite.

Remarque. Une courbe fractale est une courbe invariante par changement d'échelle. Il existe un bestiaire foisonnant d'objets fractals parmi lesquels la courbe de Takagi (ou de Blanc-manger), l'île de Gosper, le lapin de Douady, le triangle de Sierpiński ou encore l'éponge de Menger. Ici, nous nous arrêterons sur une courbe fractale particulière et relativement simple à appréhender, la courbe de Von Koch¹ inventée en 1904.

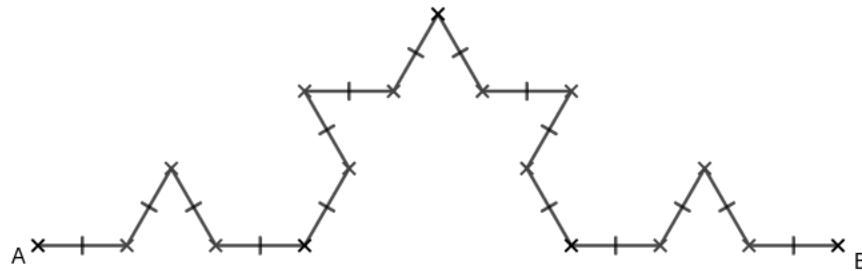
Soit F_0 le segment $[AB]$ de longueur 1 :



On le partage en trois segments égaux, et l'on remplace celui du milieu par deux segments de même longueur que celui retiré : obtient alors la courbe F_1 , constituée de quatre segments de longueur $\frac{1}{3}$:



On partage chacun de ces quatre segments en trois segments égaux et l'on remplace les segments du milieu par deux segments de même longueur que celui retiré : on obtient alors la courbe F_2 :



On continue ainsi suivant le même procédé, on obtient les courbes $F_3, F_4, \dots, F_n$. On note l_n la longueur de la courbe F_n , et a_n l'aire de la partie du plan située entre F_n et le segment $[AB]$.

1. Exprimer, en fonction de n , le nombre de segments constituant la courbe F_n .
2. Exprimer, en fonction de n , la longueur de chacun de ces segments.
3. En déduire l'expression de l_n en fonction de n . Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n$.
4. Pour tout entier naturel n , exprimer a_n sous la forme d'une somme d'aires de triangles.
5. En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = \frac{5\sqrt{3}}{4} \times \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$.
6. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Remarque. Cet objet a donc cette particularité rare et contre-intuitive : il est doté d'une aire finie mais d'un périmètre infini...

1. Helge von Koch est un mathématicien suédois né en 1870 et mort en 1924.