

Seconde - Cours de mathématiques

Mathieu KIEFFER



Table des matières

Table des matières	3
Introduction	7
1 Éléments de logique	9
1.1 Les tables de vérité	9
1.2 Les quantificateurs	12
1.3 Différents types de raisonnement	13
1.3.1 Le raisonnement direct	13
1.3.2 Le raisonnement par disjonctions de cas	13
1.3.3 Le raisonnement par contre-exemple	14
1.3.4 Le raisonnement par contraposition	14
1.3.5 Le raisonnement par l'absurde	15
1.3.6 Le raisonnement par analyse-synthèse	15
2 Algorithmique	17
2.1 Notion d'algorithme	17
2.2 Les instructions conditionnelles	21
2.3 Les types de données	23
2.4 Les boucles	27
2.5 Une structure fondamentale : la liste	30
3 Ensembles de nombres	37
3.1 Généralités sur les ensembles	37
3.2 Cas particulier des ensembles de nombres	40
3.3 Intervalles de $\mathbb{R}$	41
4 Expressions algébriques	43
4.1 Les polynômes	43
4.2 Les fractions rationnelles	45
5 Géométrie analytique dans le plan	47
5.1 Repères du plan	47
5.2 Coordonnées du milieu d'un segment	48
5.3 Longueur d'un segment	49
6 Notion de fonction	51
6.1 Point de vue algébrique	51
6.2 Point de vue géométrique	52
6.3 Variations d'une fonction	54
6.4 Opérations sur les fonctions	56

7	Vecteurs	57
7.1	En géométrie pure	57
7.1.1	Présentation	57
7.1.2	Calcul vectoriel	59
7.2	En géométrie analytique	61
8	Fonctions de référence (1)	65
8.1	Fonction affine	65
8.2	Fonction carrée	67
8.3	Fonction inverse	68
8.4	Fonction valeur absolue	69
8.5	Fonction racine carrée	70
9	Géométrie pure dans le plan	73
9.1	Les transformations du plan	73
9.1.1	La symétrie axiale	73
9.1.2	La symétrie centrale	74
9.1.3	La rotation	75
9.1.4	La translation	75
9.1.5	L'homothétie	76
9.2	Composée de deux applications	76
9.2.1	Composée de deux symétries axiales	76
9.2.2	Composée de deux symétries centrales	77
9.2.3	Composée de deux rotations	77
9.2.4	Composée de deux translations	77
9.3	Les triangles	78
9.4	Les quadrilatères	78
9.5	Le cercle	79
10	Fonctions de référence (2)	81
10.1	Fonction polynôme de degré deux	81
10.1.1	Différentes formes	81
10.1.2	Courbe représentative	84
10.2	Fonction homographique	85
10.2.1	Étude générale	85
10.2.2	Courbe représentative	85
11	Géométrie pure dans l'espace	87
11.1	Positions relatives de droites et de plans dans l'espace	88
11.2	Étude du parallélisme	90
11.2.1	Parallélisme de deux droites	90
11.2.2	Parallélisme d'une droite et d'un plan	90
11.2.3	Parallélisme de deux plans	91
11.3	Solides usuels	92
12	Équations - Inéquations	93
12.1	Équations	93
12.2	Inéquations	95
13	Trigonométrie	97
13.1	Le cercle trigonométrique	97
13.2	Cosinus, sinus et tangente	99

14 Droites du plan en géométrie analytique	101
14.1 Équations de droites	101
14.2 Systèmes linéaires	103
15 Probabilités sur un ensemble fini	107
15.1 Généralités	107
15.2 Calculs de probabilités	108
16 Statistiques	111
16.1 Statistique descriptive	111
16.1.1 Série statistique	111
16.1.2 Médiane, quartiles et moyenne	112
16.2 Statistique inférentielle	113
16.2.1 Échantillonnage	113
16.2.2 Intervalle de fluctuation	114
16.2.3 Intervalle de confiance	114
Bibliographie	117
Index	118

Introduction

Ce cours est celui dispensé sur le terrain à mes élèves de Seconde. Il reprend les thèmes évoqués par le programme officiel avec un certain souci de rigueur tout en s'octroyant quelques libertés. Les objets mathématiques utilisés y sont toujours présentés via une définition claire et précise. Les théorèmes et autres résultats mathématiques sont démontrés dans la mesure du possible avec plus ou moins de détails. Les rares propositions laissées sans démonstration le sont car il n'existe tout simplement pas de démonstration accessible à ce niveau ; une référence au cours de Première ou de Terminale est alors requise. Aussi, certaines démonstrations ont volontairement été rédigées de manière succincte voire très incomplète. L'objectif est clair : que l'élève prenne son stylo afin de se frotter à cette réalité mathématique et d'en délier le vrai du faux par sa propre expérience, ses propres efforts. De la même façon, vous trouverez des exemples et des exercices non traités tout au long de ce cours. En effet, lire un corrigé ou une solution n'apporte quasiment rien à la compréhension d'une notion. Apprendre, c'est avant tout faire par soi-même.

Ce cours comporte sans aucun doute des erreurs et est voué à évoluer à l'épreuve des séances. Il représente le strict minimum que tout élève de Seconde désireux d'étudier les mathématiques doit maîtriser en fin d'année scolaire. C'est pourquoi j'invite vivement cet élève à prolonger ses études en visitant mon site internet (www.mathieu-kieffer.com) qui rassemble de nombreuses ressources lui permettant d'apprendre les mathématiques et de se passionner pour elles. Enfin, puisque rien ne peut se substituer à la relation professeur-élève, j'encourage chacun de mes élèves à me demander de l'aide, à en savoir davantage, en un mot, à être éclairé, il n'en sera que plus heureux...



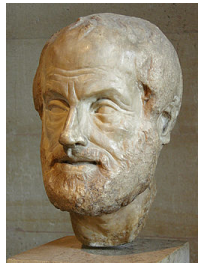
« Il n'y a de progrès, pour nul écolier au monde, ni en ce qu'il entend, ni en ce qu'il voit, mais seulement en ce qu'il fait. »

Émile-Auguste Chartier dit « Alain »

Chapitre 1

Éléments de logique

Le mot grec « logos » signifie en quelque sorte *la mise en rapport*. En premier lieu il désigne la parole comme vecteur de pensée, car elle met en rapport les individus. Il désigne aussi la raison, celle que l'on perd parfois, puisque l'acte de penser est considéré comme la synthèse, donc la mise en rapport de différents arguments. Aristote appelait « logike » l'étude du raisonnement dont le syllogisme était un élément essentiel. Le mot *logique* est repris en français vers 1920 sur le latin « logica » dans le sens aristotélicien. Il faut attendre le *XVII^{ème}* siècle pour voir s'étendre son domaine d'application avec les travaux de Leibniz et Lambert. Vers 1850, George Boole est l'initiateur d'une approche mathématique de la logique. Les questions sur les fondements des mathématiques amènent le développement de ce qu'on appelle d'abord *logique moderne* puis *logique mathématique*.



Aristote

(Stagire 384 avt J.-C. - Chalcis 322 avt J.-C.)



George Boole

(Lincoln 1815 - Ballintemple 1864)

1.1 Les tables de vérité

Le raisonnement déductif est un processus cognitif qui permet de partir de quelques assertions vraies pour en déduire de nouvelles. Il élabore le savoir de façon sûre en appliquant les règles élémentaires de logique suivantes :

1. *Principe du tiers exclu* : toute proposition est soit vraie, soit fausse.

Exemple. « 2017 est premier » est une proposition vraie.

2. *Principe de non-contradiction* : une proposition ne peut pas être à la fois vraie et fausse.

Exemple. « Le triangle ABC est isocèle et ne l'est pas » est une contradiction.

3. *Modus ponens* : étant données deux propositions A et B , si A est vraie, et si l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie, alors B est vraie.

Exemple. « Cosinus est un chat, le fait d'être un chat entraîne celui d'être un animal, donc Cosinus est un animal »

4. *Modus tollens* : étant données deux propositions A et B , si B est fausse, et si l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie, alors A est fausse.

Exemple. « Mon téléphone n'est pas un animal, le fait d'être un chat entraîne celui d'être un animal, donc mon téléphone n'est pas un animal ».

Définition. Voici quelques définitions élémentaires :

- *La négation* : si P désigne une assertion, alors la négation de P , notée $\neg P$, est une nouvelle assertion qui est vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie. On a la table de vérité suivante :

P	$\neg P$
V	F
F	V

- *L'équivalence* : si P et Q désignent deux assertions, alors on définit une nouvelle assertion « P équivalente à Q », que l'on note $P \Leftrightarrow Q$, comme étant l'assertion qui est vraie si, et seulement si, P et Q sont de même nature. On a la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- *La conjonction* : il s'agit du connecteur « et ». L'assertion « P et Q », notée $P \wedge Q$, est vraie si, et seulement si, P et Q sont simultanément vraies. On a la table de vérité suivante :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- *La disjonction* : il s'agit du connecteur « ou ». L'assertion « P ou Q », notée $P \vee Q$, est vraie si, et seulement si, P est vraie ou si Q est vraie, et est fausse seulement dans le cas où P et Q sont simultanément fausses. On a la table de vérité suivante :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- Le « *ou exclusif* », noté *XOR* : l'assertion « $P \text{ XOR } Q$ » est vraie si, et seulement si, P est vraie ou Q est vraie, sans que P et Q soient vraies en même temps. On a la table de vérité suivante :

P	Q	$P \text{ XOR } Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- *L'implication* : l'assertion « P implique Q », notée $P \Rightarrow Q$, est vraie dans tous les cas sauf lorsque P est vraie et Q est fausse. On a la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exercice. Démontrer les propriétés suivantes à l'aide des tables de vérité :

1. $P \wedge \neg P$ est toujours fausse.
2. $P \vee \neg P$ est toujours vraie.
3. $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$.
4. Commutativité :

$$\begin{aligned} P \wedge Q &\Leftrightarrow Q \wedge P \\ P \vee Q &\Leftrightarrow Q \vee P \end{aligned}$$

5. Associativité :

$$\begin{aligned} P \wedge (Q \wedge R) &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R \\ P \vee (Q \vee R) &\Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R \end{aligned}$$

6. Distributivité :

$$\begin{aligned} P \wedge (Q \vee R) &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \\ P \vee (Q \wedge R) &\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (P \vee Q) \end{aligned}$$

7. Lois de De Morgan :

$$\begin{aligned} \neg(P \wedge Q) &\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \\ \neg(P \vee Q) &\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \end{aligned}$$

8. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

9. Contraposition :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

10. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$

11. Négation d'une implication :

$$\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$$

12. Transitivité de l'implication :

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R)$$

13. Transitivité de l'équivalence :

$$((P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow R)$$

14. Disjonction de cas :

$$((P \vee Q) \wedge (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow R$$

1.2 Les quantificateurs

Définition. On appelle quantificateur existentiel, noté $\exists$, le quantificateur signifiant « il existe au moins un ».

Exemple. $\exists x < 0, x^2 > 100$ signifie : « il existe au moins un nombre strictement négatif dont le carré est strictement supérieur à 100 ». Cette assertion est vraie.

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. En mathématiques, par convention, lorsque l'on dit « il existe un chat noir à Brie Comte Robert », cela signifie : « il existe au moins un chat noir à Brie Comte Robert ».
2. Le symbole $\exists$ est un E renversé, première lettre du mot anglais « exists ».
3. Lorsqu'en plus de l'existence, on a l'unicité, on écrit : $\exists!$, qui signifie « il existe un unique ».

Exemple. $\exists! x, 2x + 3 = 0$ signifie : « il existe un unique nombre x tel que $2x + 3 = 0$ ». Cette assertion est vraie, ce nombre est : $-\frac{3}{2}$.

Définition. On appelle quantificateur universel, noté $\forall$, le quantificateur signifiant « quel que soit » ou encore « pour tout ».

Exemple. $\forall x > 10, x > 4$ signifie : « quel que soit le nombre strictement supérieur à 10, celui-ci est strictement supérieur à 4 ». Cette assertion est évidemment vraie.

Remarque. Le symbole $\forall$ est un A renversé, première lettre du mot allemand « alles ».

Définition. On appelle prédicat toute propriété des objets de l'univers du discours exprimée dans le langage en question. Cette propriété peut porter sur :

- des objets : on parle de prédicat unaire ;
- des couples d'objets : on parle de prédicat binaire ;
- des triplets d'objets : on parle de prédicat ternaire ;
- etc.

Exemple. Voici deux exemples de prédicats :

1. $P(x) : \ll x \geq 10 \gg$ est un prédicat unaire.
2. $Q(x, y) : \ll x^2 + y^2 \leq 1 \gg$ est un prédicat binaire.

Affirmation. Les règles de logique suivantes sont fondamentales :

1. $\neg (\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg P(x)$
2. $\neg (\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg P(x)$
3. $\forall x, P(x) \wedge Q(x) \Leftrightarrow (\forall x, P(x)) \wedge (\forall x, Q(x))$
4. $\exists x, P(x) \vee Q(x) \Leftrightarrow (\exists x, P(x)) \vee (\exists x, Q(x))$

Exemple. Voici quelques exemples :

1. Si $P(x)$ signifie « le chat x est noir », alors $\forall x, P(x)$ signifie « quel que soit le chat considéré, il est noir ». Ainsi, la négation de cette assertion est bien : « il existe un chat x qui n'est pas noir », qui s'écrit formellement : $\exists x, \neg P(x)$. Plus simplement, pour démontrer que tous les chats ne sont pas noirs, il suffit de prouver qu'il existe un chat qui n'est pas noir.
2. Si $P(x)$ signifie « le chat x est noir », alors $\exists x, P(x)$ signifie « il existe un chat noir ». Ainsi, la négation de cette assertion est bien : « quel que soit le chat considéré, il n'est pas noir », qui s'écrit formellement : $\forall x, \neg P(x)$.
3. Si $P(x)$ signifie « le chat x est noir » et $Q(x)$ signifie : « le chat x possède quatre pattes », alors $\forall x, P(x) \wedge Q(x)$ signifie « quel que soit le chat considéré, il est noir et possède quatre pattes ». Ce que l'on peut aussi traduire en : « quel que soit le chat considéré, il est noir, et, quel que soit le chat considéré, il possède quatre pattes », qui s'écrit formellement : $(\forall x, P(x)) \wedge (\forall x, Q(x))$.
4. Si $P(x)$ signifie « le chat x est noir » et $Q(x)$ signifie : « le chat x possède quatre pattes », alors $\exists x, P(x) \vee Q(x)$ signifie « il existe un chat x qui est noir ou qui possède quatre pattes ». Ce que l'on peut traduire en : « il existe un chat x noir, ou il existe un chat x possédant quatre pattes », qui s'écrit formellement : $(\exists x, P(x)) \vee (\exists x, Q(x))$.

1.3 Différents types de raisonnement

1.3.1 Le raisonnement direct

Ce type de raisonnement, appelé aussi « raisonnement déductif direct » ou « raisonnement déductif simple », est courant en mathématiques. On suppose qu'une assertion A est vraie, et l'on montre qu'une propriété B en découle en utilisant les règles de la logique déductive. On démontre donc directement l'implication : « si A est vraie alors B est vraie », soit $A \Rightarrow B$.

Le raisonnement déductif direct est donc basé sur la règle du modus ponens suivant laquelle :

$$\begin{cases} A \text{ est vraie} \\ A \Rightarrow B \end{cases} \Rightarrow B \text{ est vraie}$$

Il faut veiller à ne pas confondre l'affirmation « $A \Rightarrow B$ est vraie » et l'affirmation « A est vraie et $A \Rightarrow B$ est vraie », car seule la seconde entraîne que « B est vraie ». Autrement dit, l'implication $A \Rightarrow B$ peut être vraie sans que B le soit, il suffit pour cela que A ne soit pas vraie.

Exemple. Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres respectifs O et O' se coupent en deux points distincts A et B . Démontrer que les droites (OO') et (AB) sont perpendiculaires.

On a : $OA = OB$ et $O'A = O'B$ donc, d'après une proposition de Sixième, O et O' appartiennent à la médiatrice de $[AB]$. Ainsi, par définition de la médiatrice, $(OO') \perp (AB)$.

1.3.2 Le raisonnement par disjonctions de cas

Pour démontrer que l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie, on distingue un ensemble complet de conclusions possibles obtenues à partir de l'assertion A , disons les assertions $A_1, A_2, \dots, A_n$, puis on démontre chacune des implications : $A_1 \Rightarrow B, A_2 \Rightarrow B, \dots, A_n \Rightarrow B$. La disjonction de cas peut être représentée par l'implication suivante :

$$(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) \wedge (A_1 \Rightarrow B) \wedge (A_2 \Rightarrow B) \wedge \dots \wedge (A_n \Rightarrow B)$$

Exemple. Démontrer que deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles.

Soient d et d' deux droites perpendiculaires à une droite Δ .

Si d et d' sont sécantes en M , alors par unicité de la perpendiculaire à une droite passant par un point, d et d' sont confondues, donc parallèles.

Si d et d' ne sont pas sécantes, elles sont parallèles.

1.3.3 Le raisonnement par contre-exemple

Le raisonnement par contre-exemple peut être décrit ainsi. Soit un ensemble E . Si x est un élément, alors on considère une assertion $P(x)$ concernant x , qui peut être vraie ou fausse. Pour démontrer qu'une assertion du type : $\forall x, P(x)$ est fausse, on peut démontrer que sa négation : $\exists x, \neg P(x)$ est vraie.

Exemple. Voici deux exemples de raisonnement par contre-exemple :

1. Si x désigne un chat, et $P(x)$ signifie « le chat x est noir ». Alors l'assertion $\forall x, P(x)$ signifie « quel que soit le chat x , il est noir ». Si l'on souhaite démontrer que cette dernière assertion est fausse, il suffit de trouver un chat qui n'est pas noir, autrement dit, de prouver l'assertion : $\exists x, \neg P(x)$.
2. Démontrer que l'assertion « deux rectangles de même périmètre ont la même aire » est fausse.

Il suffit de trouver deux rectangles ayant le même périmètre mais une aire différente. Prenons un premier rectangle de longueur 3 et de largeur 2 et un second rectangle de longueur 4 et de largeur 1. Les deux ont un périmètre de 10 mais le premier a une aire de 6 alors que le second a une aire de 4.

1.3.4 Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement par contraposition utilise l'équivalence logique suivante :

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Exercice. Démontrer l'équivalence précédente en utilisant les tables de vérité.

On dit que la contraposée de la proposition $A \Rightarrow B$ est $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Exemple. L'assertion « il pleut donc je prends mon parapluie » est équivalente à sa contraposée « je ne prends pas mon parapluie donc il ne pleut pas ».

Si l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie, alors on dit que B est une condition nécessaire pour la réalisation de A et que A est une condition suffisante pour la réalisation de B . S'il est nécessaire d'avoir B pour que A soit vraie, alors si B est fausse, il est légitime de penser que A sera fausse.

Exemple. Soit n un entier naturel. Démontrer l'assertion suivante : « si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair ».

Raisonnons par contraposition. Supposons n non pair, c'est-à-dire n impair. Alors il existe un entier naturel k tel que : $n = 2k + 1$. Mais alors, $n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$. Or $k(k + 1)$ est nécessairement pair puisqu'il s'agit du produit d'un entier naturel pair par un entier naturel impair. Donc il existe un entier naturel k' tel que : $k(k + 1) = 2k'$. D'où : $n^2 - 1 = 8k'$. Ainsi, $n^2 - 1$ est divisible par 8.

Remarque. Il ne faut pas confondre la contraposée d'une assertion et sa réciproque. La réciproque de l'implication $A \Rightarrow B$ est $B \Rightarrow A$, alors que la contraposée de l'implication $A \Rightarrow B$ est $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Exemple. Voici un exemple concret :

ASSERTION	Si un quadrilatère est un losange, alors c'est un parallélogramme	<i>VRAI</i>
CONTRAPOSÉE	Si un quadrilatère n'est pas un parallélogramme, alors ce n'est pas un losange	<i>VRAI</i>
RÉCIPROQUE	Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors c'est un losange	<i>FAUX</i>
CONTRAPOSÉE DE LA RÉCIPROQUE	Si un quadrilatère n'est pas un losange, alors ce n'est pas un parallélogramme	<i>FAUX</i>

1.3.5 Le raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde est une forme de raisonnement qui consiste à démontrer une assertion en supposant son contraire pour aboutir à une absurdité. L'absurdité provient toujours d'une assertion que l'on démontrera être à la fois vraie et fausse, c'est qui absolument interdit d'après le principe de non-contradiction. Pour montrer qu'une assertion A est vraie, on suppose que $\neg A$ est vraie et l'on essaye d'en déduire une absurdité. La force du raisonnement par l'absurde réside dans le fait que n'importe quelle absurdité permettra de conclure, ce qui n'est pas le cas du raisonnement par contraposition. Le raisonnement par contraposition est un cas particulier du raisonnement par l'absurde. En effet, pour démontrer que $A \Rightarrow B$ est vraie en raisonnant par contraposition, on suppose que $\neg B$ est vraie puis on démontre que $\neg A$ est vraie. Pour démontrer que $A \Rightarrow B$ est vraie en raisonnant par l'absurde, on suppose que A est vraie et que $\neg B$ est vraie. On démontre alors que $\neg B \Rightarrow \neg A$ comme on l'a fait en raisonnant par contraposition, pour constater que A et $\neg A$ sont vraies, ce qui est absurde d'après le principe de non-contradiction.

Exemple. Voici deux exemples classiques de raisonnement par l'absurde :

- Démontrer que l'équation $x(x - 5) + 9x - (x + 1)(x + 3) = 10$ n'admet pas de solution réelle.
Si un nombre x vérifie cette équation, alors, après simplifications, on aurait : $-3 = 10$, ce qui est faux.
Donc il n'existe pas de tel nombre x .
- Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe deux entiers naturels p et q , avec $q \neq 0$, premiers entre eux tels que : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Dans ce cas, $2 = \frac{p^2}{q^2}$, soit $p^2 = 2q^2$. Donc 2 Par conséquent divise p^2 . Comme 2 est premier, 2 divise p . Donc, il existe un entier naturel p' tel que : $p = 2p'$. D'où : $4p'^2 = 2q^2$ puis : $2p'^2 = q^2$. Ainsi, 2 divise q^2 , donc 2 divise q . Par conséquent, 2 divise p et q . Ce qui est impossible puisque p et q ont été supposés premiers entre eux. Il n'existe donc pas d'entiers naturels p et q , avec $q \neq 0$, premiers entre eux tels que : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Autrement dit, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1.3.6 Le raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse permet de démontrer l'existence, et parfois l'unicité, d'un objet vérifiant des propriétés données. Il se déroule en deux temps :

- L'analyse* : on suppose que l'objet existe, et l'on déduit un certain nombre de conditions qui doivent être satisfaites et réduisent le champ d'investigation. A un certain stade, les conditions trouvées définissent peu d'objets qui répondent à la question. On s'arrête quand on ne voit plus comment réduire encore le nombre des ces objets. On peut alors affirmer que : si l'objet que l'on cherche existe, alors il appartient à une certaine collection.
- Synthèse* : on prend chacun des objets de la collection précédente et on les teste pour savoir s'ils vérifient les conditions requises. Si la réponse est affirmative, on possède une solution au problème, sinon on la rejette. Il n'y aura pas d'autres solutions possibles car la collection est formée des seuls objets susceptibles de répondre à nos attentes.

Le raisonnement par analyse-synthèse est souvent utilisé quand on ne voit pas comment débiter une recherche. Il permet de se focaliser sur les conséquences de l'existence d'un objet pour déduire des conditions tellement restrictives qu'elles finissent par définir parfaitement les quelques objets susceptibles de convenir. Un tel raisonnement est précieux et d'une efficacité redoutable car permettant de débiter une recherche en suivant un programme précis en laissant libre cours à ses idées et interprétations pour réduire le champ des possibles.

Exemple. Voici deux exemples de raisonnement par analyse-synthèse :

1. Démontrer que le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que le triangle AMB est rectangle en M .

$\Leftarrow$: si MAB est rectangle en M , alors notons I le milieu de $[AB]$. La perpendiculaire à (MA) passant par A coupe la perpendiculaire à (MB) passant par B en W . Le quadrilatère $MAWB$ possède trois angles droits, c'est donc un rectangle. Par propriété du rectangle, ses diagonales sont sécantes en leur milieu, donc $IM = IA = IB$. Ainsi, M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

$\Rightarrow$: supposons que M appartienne au cercle de diamètre $[AB]$. Notons I le milieu de $[AB]$. La droite (MI) coupe le cercle de diamètre $[AB]$ en W , et le quadrilatère $MAWB$ possède deux diagonales de même longueur et sécantes en leur milieu, c'est donc un rectangle. Par conséquent, l'angle $\widehat{AMB}$ est droit et le triangle MAB est donc rectangle en M .

2. Soient B et C deux points distincts du plan. Soit M un point n'appartenant pas à la droite (BC) . Déterminer, s'il existe, un point A vérifiant l'assertion suivante : M est l'orthocentre du triangle ABC .

On raisonne par analyse-synthèse :

Analyse : si A est solution, alors A appartient à l'intersection de la perpendiculaire d_1 à (CM) passant par B et à la perpendiculaire d_2 à (BM) passant par C .

Synthèse : on trace d_1 et d_2 . Celles-ci sont sécantes en un point A qui est solution du problème. Pour vérifier que l'intersection de d_1 et d_2 est réduite à un seul point, on peut raisonner par l'absurde en supposant d_1 et d_2 parallèles. Dans ce cas, (CM) et (BM) sont parallèles. Donc B , C , et M sont alignés, ce qui est absurde d'après l'énoncé. Ainsi, il existe un unique point A solution.

Chapitre 2

Algorithmique

« Algorithmus » en latin médiéval, francisé en *algorithme*, est une déformation du nom du mathématicien persan Al-Khwarizmi. La terminaison est influencée par le mot grec « arithmos », *nombre* que l'on retrouve dans *arithmétique* et dans *logarithme*. Al-Khwarizmi vivait à Bagdad au IX^{ème} siècle. La grande diffusion en Occident de l'ouvrage où il expose différentes méthodes de calcul à l'aide de la numération de position explique ce succès. Les précurseurs du calcul avec des chiffres arabes étaient appelés des *algoristes*.



Al-Khwarizmi
(Khiva 780 - Bagdad 850)



Donald Knuth
(Milwaukee 1938)

2.1 Notion d'algorithme

Voici la définition du mot *algorithme* dans le dictionnaire : « *Ensemble de règles opératoires dont l'application permet de résoudre un problème énoncé au moyen d'un nombre fini d'opérations. Un algorithme peut être traduit, grâce à un langage de programmation, en un programme exécutable par un ordinateur.* ».

Définition. On appelle algorithme tout ensemble fini d'instructions d'un calcul ou de la résolution d'un problème. On appelle programme la traduction d'un algorithme dans un langage de programmation exécutable par un ordinateur.

Exemple. Voici un algorithme de calcul élémentaire :

- Choisir un nombre.
- Lui soustraire 1.
- Élever au carré la somme obtenue.
- Ajouter l'opposé de 4.
- Écrire le résultat.

Appliquons cet algorithme au nombre 3 : $3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 0$.

On souhaite automatiser ce calcul pour l'appliquer à n'importe quel nombre x de départ. L'algorithme suivant, écrit en langage symbolique, donne toutes les étapes pour y parvenir :

En langage symbolique :

Variables :
Réels : x, a, b, R
Entrée :
Saisir x
Traitement :
$a \leftarrow x - 1$
$b \leftarrow a^2$
$R \leftarrow b - 4$
Sortie :
Afficher R

En Python :

```
In [1]: x=float(input("Choisissez une valeur pour x : "))
...: a=x-1
...: b=a**2
...: R=b-4
...: print("Le résultat est :", R)

Choisissez une valeur pour x : 8
Le résultat est : 45.0
```

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Le symbole $\leftarrow$ est celui de l'affectation.
2. Dans certains algorithmes apparaît en plus une phase d'initialisation. Elle correspond à l'affectation d'une variable lors de la définition de celle-ci. Toute modification de la valeur de la variable après sa définition n'est plus une initialisation mais une affectation.
3. Il est parfois bien difficile de séparer l'entrée, l'initialisation, le traitement et la sortie de l'algorithme. On peut donc réécrire l'algorithme précédent de la façon suivante :

Variables :
Réels : x, a, b, R
Début :
Saisir x
$a \leftarrow x - 1$
$b \leftarrow a^2$
$R \leftarrow b - 4$
Afficher R
Fin

Exemple. L'exemple suivant illustre une démarche très importante en algorithmique, celle de prendre une variable auxiliaire ou temporaire pour échanger le contenu de deux variables A et B . On évite ainsi d'« écraser » l'une des deux valeurs de A ou B .

En langage symbolique :

Variables :
Réels : $A, B, Temp$
Début :
Saisir A, B
$Temp \leftarrow A$
$A \leftarrow B$
$B \leftarrow Temp$
Afficher A, B
Fin

En Python :

```
In [2]: a=float(input("Choisissez une valeur pour a : "))
...: b=float(input("Choisissez une valeur pour b : "))
...: temp=a
...: a=b
...: b=temp
...: print("Désormais a vaut : ",a)
...: print("Désormais b vaut : ",b)

Choisissez une valeur pour a : 5

Choisissez une valeur pour b : 13
Désormais a vaut : 13.0
Désormais b vaut : 5.0
```

Voici un exemple d'exécution de cet algorithme :

A	B	$Temp$	Instructions
2	3		Saisir A, B
2	3	2	$Temp \leftarrow A$
3	3	2	$A \leftarrow B$
3	2	2	$B \leftarrow Temp$
3	2		Afficher A, B

Exercice. Écrire un algorithme permutant les valeurs de 3 variables puis l'exécuter sur un exemple.

Remarque. Un ordinateur communique avec l'utilisateur par les entrées (instruction « Saisir ») et les sorties (instruction « Afficher »). L'instruction « Saisir » transmet une information à l'ordinateur par le clavier. Cette information est stockée dans la mémoire centrale pour être utilisée immédiatement ou plus tard selon les besoins du programme. Les résultats du traitement de l'information par l'ordinateur sont communiqués à l'utilisateur par l'instruction « Afficher » en général sur l'écran vidéo.

Exercice. Voici trois exercices d'application :

1. Déterminer la fonction f définie par l'algorithme suivant :
En langage naturel :

Variables :	
Réels : x, a, b, c	
Début :	
Saisir x	
$a \leftarrow x + 1$	
$b \leftarrow a^2$	
$c \leftarrow b - a + 1$	
Afficher c	
Fin	

En Python :

```
In [4]: x=float(input("Choisissez une valeur de x : "))
...: a=x+1
...: b=a**2
...: c=b-a+1
...: print("Le résultat est :",c)
```

2. Réécrire un langage symbolique l'algorithme de calcul suivant :
 - Choisir un nombre.
 - Élever ce nombre au carré.
 - Soustraire 5.
 - Prendre l'inverse de ce nombre.
 - Ajouter 3.
 - Afficher le résultat.
3. Écrire un algorithme permutant les valeurs de 4 variables puis l'exécuter sur un exemple.
4. On considère l'algorithme suivant :
En langage symbolique :

Variables :	
Réels : c, d	
Début :	
$c \leftarrow 2, 5$	
$d \leftarrow 5$	
$c \leftarrow c + d$	
$d \leftarrow c - d$	
$c \leftarrow c - d$	
Afficher c, d	
Fin	

En Python :

```
In [7]: c=2.5
...: d=5
...: c=c+d
...: d=c-d
...: c=c-d
...: print("Voici c :",c)
...: print("Voici d :",d)
```

(a) Compléter le tableau d'exécution suivant :

c	d	INSTRUCTIONS

(b) Écrire un algorithme plus performant effectuant la même tâche.

2.2 Les instructions conditionnelles

Dans un algorithme, selon qu'une condition est vraie ou fausse, on exécute un bloc d'instructions ou l'autre. On traduit ce test par l'instruction conditionnelle suivante : « Si ... Alors ... Sinon ... » ou plus simplement : « Si ... Alors ... ».

Exemple. Voici trois exemples d'utilisation de l'instruction conditionnelle :

1. Étudier la parité d'un entier.

En langage symbolique :

Variables :	
Entiers : n	
Début :	
Saisir n	
Si $2 * \text{ent}(n/2) = n$ alors	
	Afficher « La valeur entrée est paire. »
Sinon	
	Afficher « La valeur entrée est impaire. »
Fin	

En Python :

```
In [9]: # Etude de la parité d'un entier
...: import math
...: n=int(input("Choisissez un entier n : "))
...: if 2*math.floor(n/2)==n:
...:     print("Votre entier n est pair.")
...: else:
...:     print("Votre entier n est impair.")

Choisissez un entier n : 8
Votre entier n est pair.
```

2. Déterminer le plus grand de deux nombres donnés.

En langage symbolique :

Variables :	
Entiers : n	
Réels : a, b	
Début :	
Saisir a, b	
Si $a > b$ alors	
	Afficher « La plus grand nombre est : »
	Afficher a
Si $b > a$ alors	
	Afficher « La plus grand nombre est : »
	Afficher b
Si $a = b$ alors	
	Afficher « Les deux nombres sont égaux. »
Fin	

En Python :

```
In [12]: # Déterminer le plus grand de deux nombres choisis
...: a=float(input("Chosissez un premier nombre : "))
...: b=float(input("Chosissez un deuxième nombre : "))
...: if a>b:
...:     print("Le plus grand des deux nombres est :",a)
...: if a<b:
...:     print("Le plus grand des deux nombres est :",b)
...: if a==b:
...:     print("Les deux nombres sont égaux.")

Chosissez un premier nombre : 84
Chosissez un deuxième nombre : 157
Le plus grand des deux nombres est : 157.0
```

On peut améliorer cet algorithme en diminuant le nombre de comparaisons effectuées.

3. *Modéliser un tirage dans une urne.*

On considère une urne qui contient 2 boules blanches, 3 boules noires et 5 boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne et l'on note sa couleur. L'instruction *hasard* retourne un nombre décimal aléatoire compris entre 0 et 1. Plus précisément, on a : $0 \leq \text{hasard} < 1$. L'instruction $\text{ent}(\text{hasard} \times 10) + 1$ renvoie un nombre entier aléatoire compris entre 1 et 10. Plus précisément, on a : $1 \leq \text{ent}(\text{hasard} \times 10) + 1 \leq 10$. Nous pouvons ainsi modéliser le tirage de boule :

- (a) Si $\text{ent}(\text{hasard} \times 10) + 1 \in \{1; 2\}$, alors on tiré une boule blanche.
- (b) Si $\text{ent}(\text{hasard} \times 10) + 1 \in \{3; 4; 5\}$, alors on tiré une boule noire.
- (c) Si $\text{ent}(\text{hasard} \times 10) + 1 \in \{6; 7; 8; 9; 10\}$, alors on tiré une boule rouge.

D'où l'algorithme suivant en langage symbolique :

Variables :					
Entiers : T					
Début :					
$T \leftarrow \text{ent}(\text{hasard} \times 10) + 1$					
Si $T \leq 2$ alors	Afficher « La boule tirée est blanche. »				
Sinon	<table border="0" style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px; vertical-align: top;">Si $T \leq 5$ alors</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; vertical-align: top;">Afficher « La boule tirée est noire. »</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px; vertical-align: top;">Sinon</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; vertical-align: top;">Afficher « La boule tirée est rouge. »</td> </tr> </table>	Si $T \leq 5$ alors	Afficher « La boule tirée est noire. »	Sinon	Afficher « La boule tirée est rouge. »
Si $T \leq 5$ alors	Afficher « La boule tirée est noire. »				
Sinon	Afficher « La boule tirée est rouge. »				
Fin					

En Python :

```
In [20]: # Tirage dans un urne
...: import random
...: T=random.randint(1,10)
...: if T<=2:
...:     print("La boule prélevée est blanche.")
...: else:
...:     if T<=5:
...:         print("La boule prélevée est noire.")
...:     else:
...:         print("La boule prélevée est rouge.")
La boule prélevée est rouge.
```

Exercice. Écrire un algorithme simulant la roulette du casino.

2.3 Les types de données

Jusqu'à présent nous n'avons utilisé que des variable du type nombre (entier ou réel). Il existe aussi des variables du type :

1. *Booléen* : qui prennent deux valeurs, soit VRAI, soit FAUX, ou encore 1 ou 0.
2. *Chaîne de caractères* : par exemple « coucou papa » est une chaîne de caractères de longueur 11. L'espace entre les mots a aussi été comptabilisé. Un caractère est soit une lettre minuscule ou majuscule, soit un

chiffre ou un symbole. Plus précisément, les valeurs des caractères sont les symboles issus de la table des codes A.S.C.I.I. (American Standard Code For Information Interchange qui signifie « Code américain normalisé pour l'échange d'information »).

Exemple. Voici trois exemples :

1. *Affecter une expression booléenne dans une variable booléenne.*

En langage symbolique :

Variables :	
Entiers : x	
Booléen : A	
Début :	
Saisir x	
Si $x < 1$ alors	
	$A \leftarrow VRAI$
Sinon	
	$A \leftarrow FAUX$
Afficher A	
Fin	

En Python :

```
In [24]: x=int(input("Choisissez un entier x : "))
...: if x<1:
...:     A=True
...: else:
...:     A=False
...: print(A)

Choisissez un entier x : -2
True
```

Lorsque $x < 1$, A est VRAI et l'algorithme affichera VRAI ou 1.

Lorsque $x \geq 1$, A est FAUX et l'algorithme affichera FAUX ou 0.

Plus simplement, on peut aussi écrire :

En langage symbolique :

Variables :
Entiers : x
Booléen : A
Début :
Saisir x
$A \leftarrow (x < 1)$
Afficher A
Fin

En Python :

```
In [26]: x=int(input("Choisissez un entier x : "))
...: A=(x<1)
...: print(A)

Choisissez un entier x : 5
False
```

2. *Produit de trois expressions booléennes.*

En langage symbolique :

Variables :	
Entiers : A, B, C	
Début :	
Saisir A, B, C	
Si $(A = B) * (B = C) * (A = C) = 1$ alors	
	Afficher « Les trois nombres sont égaux. »
Sinon	
	Afficher « Les trois nombres ne sont pas égaux. »
Afficher A	
Fin	

En Python :

```
In [28]: A=int(input("Choisissez un premier entier : "))
...: B=int(input("Choisissez un deuxième entier : "))
...: C=int(input("Choisissez un troisième entier : "))
...: if (A==B)*(B==C)*(C==A)==True:
...:     print("Vos trois entiers sont égaux.")
...: else :
...:     print("Vos trois entiers ne sont pas égaux.")

Choisissez un premier entier : 4

Choisissez un deuxième entier : 4

Choisissez un troisième entier : 4
Vos trois entiers sont égaux.
```

Lorsque $A = B$, $B = C$ et $A = C$, le produit des trois booléens $(A = B) * (B = C) * (A = C)$ est égal à 1 donc la condition globale $(A = B) * (B = C) * (A = C)$ est vraie.

3. *Utiliser une variable booléenne comme témoin.*

Le mot « radar » est un palindrome à cinq lettres car il s'écrit de la même manière dans les deux sens. Utilisons une variable booléenne témoin qui prend la valeur VRAI dès que le mot est un palindrome et FAUX sinon.

En langage symbolique :

Variables :		
Chaîne de caractères : <i>mot</i>		
Booléen : <i>t</i>		
Début :		
Afficher « Entrer un mot de cinq lettres. »		
Saisir <i>mot</i>		
$t \leftarrow FAUX$		
Si ($mot[1] = mot[5]$)	Si ($mot[2] = mot[4]$) alors	$t \leftarrow VRAI$
Si $t = VRAI$ alors	Afficher « Le mot est un palindrome. »	
Sinon	Afficher « Le mot n'est pas un palindrome. »	
Fin		

En Python :

```
In [32]: mot=str(input("Entrez un mot de cinq lettres : "))
...: t=False
...: if mot[0]==mot[4]:
...:     if mot[1]==mot[3]:
...:         t=True
...: if t==True:
...:     print("Votre mot est un palindrome.")
...: else:
...:     print("Votre mot n'est pas un palindrome.")
```

```
Entrez un mot de cinq lettres : hello
Votre mot n'est pas un palindrome.
```

```
In [33]: mot=str(input("Entrez un mot de cinq lettres : "))
...: t=False
...: if mot[0]==mot[4]:
...:     if mot[1]==mot[3]:
...:         t=True
...: if t==True:
...:     print("Votre mot est un palindrome.")
...: else:
...:     print("Votre mot n'est pas un palindrome.")
```

```
Entrez un mot de cinq lettres : radar
Votre mot est un palindrome.
```

2.4 Les boucles

Une boucle permet de répéter plusieurs fois un même bloc d'instructions. Deux cas se présentent alors :

1. Soit le nombre d'itérations à faire est connu dès le départ, c'est la boucle itérative : « Pour ... de ... jusqu' ... faire ... ».

Pour i de 1 jusqu' n faire Fin	Instruction(s)
---	----------------

La variable i est appelé le compteur ou indice de boucle. C'est une variable entière qui est incrémentée de 1 à chaque itération. La boucle n'est plus exécutée dès que le compteur atteint la valeur entière finale $n > 1$. Une fois cette valeur maximale atteinte, l'algorithme se poursuit.

2. Soit le nombre d'itérations dépend d'une condition, c'est la boucle conditionnelle : « Tant que ... faire ... »

Tant que condition(s) faire Fin	Instruction(s)
--	----------------

La condition dans le corps de la boucle est testée chaque fois en début de boucle. Dès que la condition de début de boucle est mise en défaut, on sort de la boucle. L'algorithme se poursuit alors.

Remarque. On peut faire l'analogie avec la course automobile. La boucle itérative est une course de Formule ou le nombre de tours est défini avant le départ de la course alors la boucle conditionnelle est une course d'endurance (comme les 24 heures du Mans) où nous ignorons le nombre de tours que parcourront les pilotes en 24 heures.

Exemple. Voici quelques exemples de boucles :

1. *Créer un « menu ».*

En langage symbolique :

Variables Entiers : T Début : $T \leftarrow 1$ Tant que $(T = 1)$ faire Fin	Afficher « Taper 1 pour continuer ou 2 pour arrêter. » Saisir T
--	--

En Python :

```
In [34]: t=1
...: while t==1:
...:     print("Tapez 1 pour continuer et 2 pour arrêter.")
...:     t=int(input())
...:
Tapez 1 pour continuer et 2 pour arrêter.

1
Tapez 1 pour continuer et 2 pour arrêter.

1
Tapez 1 pour continuer et 2 pour arrêter.

1
Tapez 1 pour continuer et 2 pour arrêter.

1
Tapez 1 pour continuer et 2 pour arrêter.

2
```

2. *Compter le nombre de diviseurs.*

On désire compter le nombre de diviseurs d'un entier n .

En langage symbolique :

Variables	
Entiers : n, d, c	
Début :	
Saisir n	
$c \leftarrow 0$	
Pour d de 1 jusque n faire	
	Si $d * \text{ent}(n/d) = n$ alors
	$c \leftarrow c + 1$
Afficher c	
Fin	

En Python :

```
In [37]: import math
...: n=int(input("Choisissez un entier naturel n : "))
...: c=0
...: for d in range(1,n+1):
...:     if d*math.floor(n/d)==n:
...:         c=c+1
...: print(c)

Choisissez un entier naturel n : 36
9
```

3. *Calculer la somme des premiers entiers.*

On désire calculer la somme : $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 + n$.

En langage symbolique :

Variables	
Entiers : S, i, n	
Début :	
Saisir n	
$S \leftarrow 0$	
Pour i de 1 jusque n faire	
	$S \leftarrow S + i$
Afficher S	
Fin	

En Python :

```
In [38]: n=int(input("Jusqu'à quel entier naturel n souhaitez-vous effectuer le somme des entiers ? "))
...: S=0
...: for i in range(1,n+1):
...:     S=S+i
...: print(S)
```

```
Jusqu'à quel entier naturel n souhaitez-vous effectuer le somme des entiers ? 100
5050
```

Exercice. Voici quelques exercices sur les boucles :

1. Écrire un algorithme calculant la somme : $S = (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (2 + 3 + \dots + n) + \dots (n - 1 + n) + n$.
2. Écrire un algorithme renvoyant le premier entier pair n à partir duquel : $2^n > 100\,000$.
3. Écrire un algorithme permettant d'afficher la structure suivante :

```

*
*  *
*  *  *
:      :
*  *  ...  *  *
```

4. Écrire un algorithme permettant de calculer la somme : $S = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.
5. Écrire un algorithme permettant de simuler le jeu suivant :

Le but est de trouver un nombre secret. Le joueur doit deviner un nombre secret entre 0 et 100. S'il propose un nombre trop petit, alors l'ordinateur lui répond : « Plus grand ». S'il propose un nombre trop grand, alors l'ordinateur lui répond « Plus petit ». Dans ces deux cas, le joueur est invité à entrer un autre nombre. Le jeu s'arrête quand le nombre secret est trouvé. On pourra demander à l'ordinateur d'afficher le « temps de jeu ».

2.5 Une structure fondamentale : la liste

Définition. Une liste est un tableau à une seule dimension.

Exemple. $L = [1, 2, 7, 5, 3]$ est une liste de cinq nombres. La troisième valeur de cette liste est 7, on note : $L[3] = 7$. On a ainsi :

RANG i	1	2	3	4	5
VALEUR $L[i]$	1	2	7	5	3

Remarque. On peut d'ores et déjà effectuer plusieurs remarques :

1. Certains langages de programmation utilisent une indexation à partir de 0. Dans ce cas, le premier terme de la liste est : $L[0]$.
2. En général les listes ne peuvent contenir que des éléments d'un même type simple comme les nombres et les caractères.
3. La création d'une liste varie d'un langage à l'autre. On notera : $L \leftarrow []$.
4. L'instruction $\dim(L)$ renvoie la longueur (la dimension) de la liste L .
5. Il est possible de concaténer deux listes. On utilise l'instruction *concat* qui « fusionne » ces deux listes.

Exemple : soient les listes : $L = [1, 2, 7, 5, 3]$, $M = [1, u, v, w]$ et $N = [3, 2, 5, 5, 7]$.

— $J \leftarrow \text{concat}(L, M)$ donne la liste $[1, 2, 7, 5, 3, 1, u, v, w]$ tandis que $[L, M] = [[1, 2, 7, 5, 3], [1; u; v; w]]$ est une liste de deux listes. On a donc : $[L, M][1] = [1, 2, 7, 5, 3]$ et $[L, M][2] = [1, u, v, w]$.

— $K \leftarrow \text{concat}(L, N)$ donne la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ car les deux listes L et N ont la même dimension.

— On a : $\dim(L) = 5$, $\dim([L, M]) = 2$ et $\dim(K) = (2, 5)$ car K est une matrice à deux lignes et cinq colonnes.

Exemple. Voici cinq exemples d'utilisation des listes :

1. *Échanger deux termes d'une liste.*

Voici une séquence d'instructions qui échange deux termes de rang i et j d'une liste donnée L de nombres. Une variable *temp* a été utilisée pour ne pas « écraser » et donc perdre une des deux valeurs.

En langage symbolique :

Variables
Entiers : i, j
Réels : <i>temp</i>
Listes : L
Début :
$\text{temp} \leftarrow L[i]$
$L[i] \leftarrow L[j]$
$L[j] \leftarrow \text{temp}$
Fin

En Python :

```
In [40]: L=list(input("Saisissez une liste : "))
...: i=int(input("Quel terme de la liste souhaitez-vous déplacer ? "))
...: j=int(input("A quelle place souhaitez-vous le déplacer ? "))
...: temp=L[i]
...: L[i]=L[j]
...: L[j]=temp
...: print("Voici votre nouvelle liste :",L)
```

Saisissez une liste : 1853

Quel terme de la liste souhaitez-vous déplacer ? 2

A quelle place souhaitez-vous le déplacer ? 0

Voici votre nouvelle liste : ['5', '8', '1', '3']

2. Stocker les termes d'une liste dans l'ordre décroissant de saisie.

L'algorithme suivant stocke les valeurs de la liste L dans l'ordre « décroissant de saisie ». Si l'on saisit les quatre valeurs : 5, 2, 3, 4 dans cet ordre, alors l'algorithme affichera la liste : $L = [4, 3, 2, 5]$.

En langage symbolique :

Variables

Entiers : i, N

Réels : Val

Listes : L

Début :

Saisir N

Pour i de 0 jusque $N - 1$ faire

Saisir Val

$L[N - i] \leftarrow Val$

Afficher L

Fin

En Python :

```
In [5]: L=[]
...: N=int(input("Combien de termes souhaitez-vous placer dans la liste ? "))
...: for i in range(0,N):
...:     val=int(input("Choisissez un terme : "))
...:     L.insert(0,val)
...: print("Voici votre liste contenant les termes choisis dans l'ordre inverse de saisie :",L)
```

Combien de termes souhaitez-vous placer dans la liste ? 4

Choisissez un terme : 8

Choisissez un terme : 5

Choisissez un terme : 7

Choisissez un terme : 1

Voici votre liste contenant les termes choisis dans l'ordre inverse de saisie : [1, 7, 5, 8]

3. *Permutation circulaire d'une liste.*

Soit L une liste de dimension N . Voici un algorithme qui effectue une permutation circulaire des éléments de la liste L . Par exemple, si $L = [1, 2, 3, 4]$ alors $L = [2, 3, 4, 1]$. Le principe est de prendre une variable temporaire $temp$ pour sauvegarder la première valeur.

En langage symbolique :

Variables	
Entiers : i, N	
Réels : $temp$	
Listes : L	
Début :	
$temp \leftarrow L[1]$	
Pour i de 2 jusque N faire	
	$L[i-1] \leftarrow L[i]$
$L[N] \leftarrow temp$	
Afficher L	
Fin	

En Python :

```
In [13]: L=list(input("Saisissez une liste : "))
...: temp=L[0]
...: for i in range(1,len(L)):
...:     L[i-1]=L[i]
...: L[len(L)-1]=temp
...: print(L)

Saisissez une liste : Coucou
['o', 'u', 'c', 'o', 'u', 'C']
```

4. *Calculer la moyenne arithmétique d'une liste de nombres.*

L'algorithme suivant calcule la moyenne arithmétique des nombres d'une liste L .

En langage symbolique :

Variables	
Entiers : i	
Réels : M	
Listes : L	
Début :	
$M \leftarrow 0$	
Pour i de 1 jusque $dim(L)$ faire	
	$M \leftarrow M + L[i]$
Afficher $M/dim(L)$	
Fin	

En Python :

```
In [15]: L=list(input("Saisissez une liste de nombres : "))
...: S=0
...: for i in range(0,len(L)):
...:     S=S+float(L[i])
...: M=S/len(L)
...: print("La moyenne arithmétique des éléments de votre liste est : ",M)

Saisissez une liste de nombres : 18762
La moyenne arithmétique des éléments de votre liste est : 4.8
```

5. *Calculer des images par une fonction.*

L'algorithme suivant trace la courbe de la fonction $f : x \longrightarrow 3x^2 + 1$ sur un intervalle $[a; b]$ en prenant n subdivisions de pas constant égal à : $p = \frac{b-a}{n}$. Cet algorithme stockera les points $M(x; f(x))$ dans une liste L avant de les afficher.

En langage symbolique :

Variables	
Entiers : n	
Réels : a, b, x, p	
Listes : L	
Début :	
Saisir n	
$L \leftarrow []$	
$p \leftarrow (b - a)/n$	
$x \leftarrow a$	
Tant que $x \leq b$ faire	
	$L \leftarrow \text{concat}(L, M(x; f(x)))$
	$x \leftarrow x + p$
Afficher L	
Fin	

En Python :

```
In [19]: # Définition de la fonction
...: def f(x):
...:     return x**2+3*x-1
...: # Calculs d'images par f
...: A=[]
...: I=[]
...: a=float(input("Choisissez la borne inférieure de votre intervalle : "))
...: b=float(input("Choisissez la borne supérieure de votre intervalle : "))
...: n=int(input("Combien de subdivisions de votre souhaitez-vous ? "))
...: p=(b-a)/n
...: x=a
...: while x<=b:
...:     A.append(x)
...:     I.append(f(x))
...:     x=x+p
...: for i in range(0,len(A)):
...:     print("L'image de {} par f est {}".format(A[i],I[i]))
```

Choisissez la borne inférieure de votre intervalle : 0

Choisissez la borne supérieure de votre intervalle : 1

Combien de subdivisions de votre souhaitez-vous ? 10

L'image de 0.0 par f est -1.0

L'image de 0.1 par f est -0.69

L'image de 0.2 par f est -0.35999999999999999

L'image de 0.30000000000000004 par f est -0.0099999999999999787

L'image de 0.4 par f est 0.36000000000000003

L'image de 0.5 par f est 0.75

L'image de 0.6 par f est 1.1599999999999997

L'image de 0.7 par f est 1.5899999999999994

L'image de 0.7999999999999999 par f est 2.04

L'image de 0.8999999999999999 par f est 2.51

L'image de 0.9999999999999999 par f est 2.9999999999999999

Exercice. Voici quelques exercices d'entraînement sur les listes :

1. Si $L = [1, 2, 3]$ et $M = [1, 2, 5]$, alors que renvoient $\text{concat}(L, M)$, $\text{concat}(M, L)$, $\text{concat}(L, [1])$ et $[L, M]$?
2. Soient L et M deux listes de dimensions supérieures à 1. Quelles sont les dimensions des listes : $\text{concat}(L, M)$, $[L; M]$, $\text{concat}(L, [12])$ et $[M, [12]]$?
3. Soit L une liste de listes de nombres.
 - (a) Écrire un algorithme qui renvoie la moyenne arithmétique de chaque sous-liste de nombres.
 - (b) Que doit renvoyer cet algorithme avec la liste $L = [[1, 2, 3], [1, 5, 4], [1, 7, 5, 4]]$?
4. Écrire un algorithme qui calcule le produit des termes d'une liste de nombres.
5. Écrire un algorithme qui crée d'abord une liste d'entiers naturels puis qui cherche dans cette liste le grand entier ainsi que son rang.

6. Que renvoie l'algorithme suivant ?

Variables	
Entiers : T, i, N	
Liste : L	
Début :	
Saisir N	
$L \leftarrow [0; 0]$	
Pour i de 1 jusque N faire	
	$T \leftarrow \text{ent}(5 * \text{hasard} + 1)$
	Si $T \leq 2$ alors
	$L[1] \rightarrow L[1] + 1$
	Sinon
	$L[2] \leftarrow L[2] + 1$
$L \leftarrow L/N$	
Afficher L	
Fin	

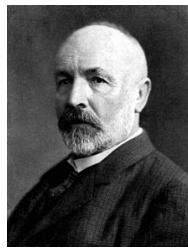
7. Écrire un algorithme renvoyant si un mot écrit au clavier est un palindrome.

8. Soit L une liste d'entiers rangés dans l'ordre croissant de taille N . Écrire un algorithme renvoyant si oui ou non un entier x appartient à cette liste L .

Chapitre 3

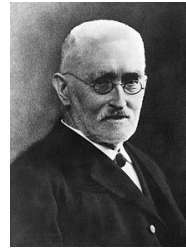
Ensembles de nombres

Ensemble reprend au $XI^{\text{ème}}$ siècle le latin impérial « insimul » signifiant *en même temps*. Le français médiéval y ajoute l'idée d'action conjuguée. Le mot *ensemble* désigne une action faite en même temps par plusieurs personnes. De nos jours, la connotation temporelle a disparu. Le mot se substantive à la fin du $XVII^{\text{ème}}$ siècle et désigne alors les éléments d'un tout. Inspiré par les travaux de Georg Cantor, Richard Dedekind introduit en 1883 la notion d'ensemble en mathématiques et l'appelle « Menge ».



Georg Cantor

(Saint-Petersbourg 1845 - Halle 1918)



Richard Dedekind

(Brunswick 1831 - Brunswick 1916)

3.1 Généralités sur les ensembles

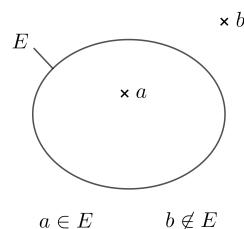
Définition 1. On appelle ensemble toute collection d'éléments.

Remarque. On peut d'ores et déjà effectuer deux remarques :

1. Il existe des ensembles finis et des ensembles infinis. Exemples : /
2. La question essentielle est de savoir si un élément appartient ou non à tel ensemble.

Notation : soit E un ensemble. Soit a un élément. « a appartient à E » se note $a \in E$. « a n'appartient pas à E » se note $a \notin E$.

Illustration : voici un diagramme de Venn



Remarque. Il existe deux grandes façons de définir un ensemble :

1. En extension : on écrit entre deux accolades la liste des éléments de l'ensemble.
Exemple : $E = \{\text{Théo, Emma, Coline, Auguste}\}$.
2. En compréhension : l'ensemble est déterminé par un critère d'appartenance.
Exemple : $E = \{x, x \text{ est un chat noir}\}$.

Vocabulaire :

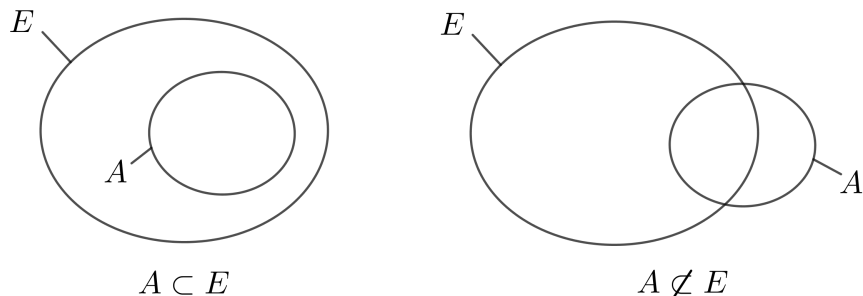
- Un ensemble constitué d'un seul élément est appelé un singleton.
- Un ensemble constitué de deux éléments est appelé une paire.
- Un ensemble ne contenant aucun élément est appelé ensemble vide. Il est noté $\emptyset$.

Définition 2. Un ensemble A est un sous-ensemble (ou une partie) d'un ensemble E , si tout élément de A est élément de E . On dit alors que A est inclus (ou contenu) dans E . On note $A \subset E$.

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. Formellement, on a l'équivalence : $(A \subset E) \Leftrightarrow (\forall x, (x \in A) \Rightarrow (x \in E))$.
2. Si A n'est pas inclus dans E , alors il existe un élément de A n'appartenant pas à E .
Formellement : $\exists x \in A, x \notin E$.

Illustration : voici deux diagrammes de Venn.

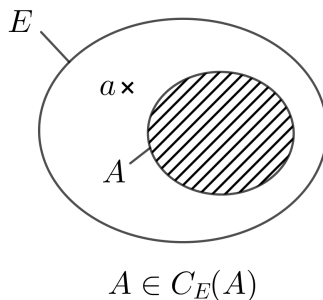


Exemple. Le sous-ensemble des filles de Seconde 8 est inclus dans l'ensemble des élèves de Seconde 8. Le sous-ensemble des filles du lycée n'est pas inclus dans l'ensemble des élèves de Seconde.

Définition 3. Soient E un ensemble et A une partie de E . On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A . On le note $C_E(A)$ ou $\bar{A}$.

Remarque. Formellement, on a l'équivalence suivante : $(x \in C_E(A)) \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A)$.

Illustration : voici un diagramme de Venn.



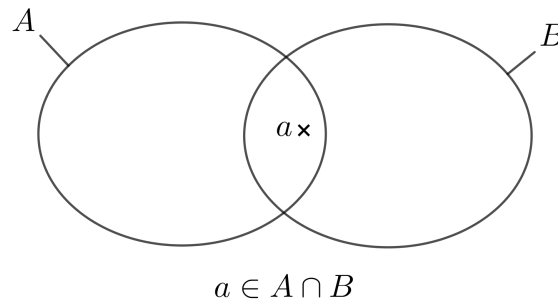
Exemple. Louis étant un garçon de Seconde 8, il appartient au complémentaire du sous-ensemble des filles de Seconde 8 dans l'ensemble des élèves de Seconde 8.

Définition 4. On appelle intersection de deux ensembles A et B , l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B . On note cet ensemble $A \cap B$ et on lit « A inter B ».

Remarque. On peut effectuer trois remarques :

1. Formellement, on a l'équivalence suivante : $(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$.
2. Si $A \cap B = \emptyset$, alors on dit que A et B sont disjoints.
3. A et $C_E(A)$ sont disjoints par définition.

Illustration : voici un diagramme de Venn.



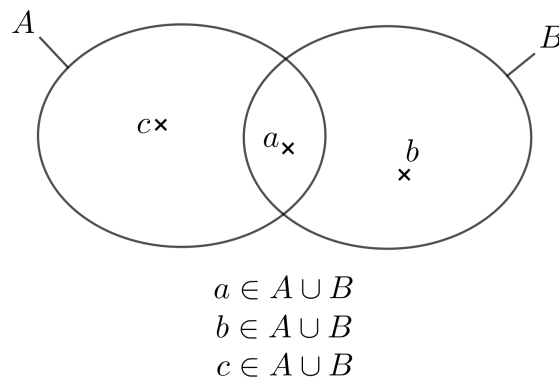
Exemple. Soit A le sous-ensemble des élèves de Seconde 8 pratiquant le tennis. Soit B le sous-ensemble des élèves de Seconde 8 pratiquant le badminton. Alors $A \cap B$ est le sous-ensemble des élèves de Seconde 8 pratiquant le tennis **et** le badminton.

Définition 5. On appelle réunion de deux ensembles A et B , l'ensemble des éléments appartenant à l'un, au moins, des ensembles A et B . On note cet ensemble $A \cup B$ et on lit « A union B ».

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. Formellement, on a l'équivalence suivante : $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$.
2. $(A \cap B) \subset (A \cup B)$.

Illustration : voici un diagramme de Venn.



Exemple. Soit A le sous-ensemble des élèves de Seconde 8 pratiquant le tennis. Soit B le sous-ensemble des élèves de Seconde 8 pratiquant le badminton. Alors $A \cup B$ est le sous-ensemble des élèves de Seconde 8 pratiquant le tennis **ou** le badminton.

3.2 Cas particulier des ensembles de nombres

Définition 6. On note :

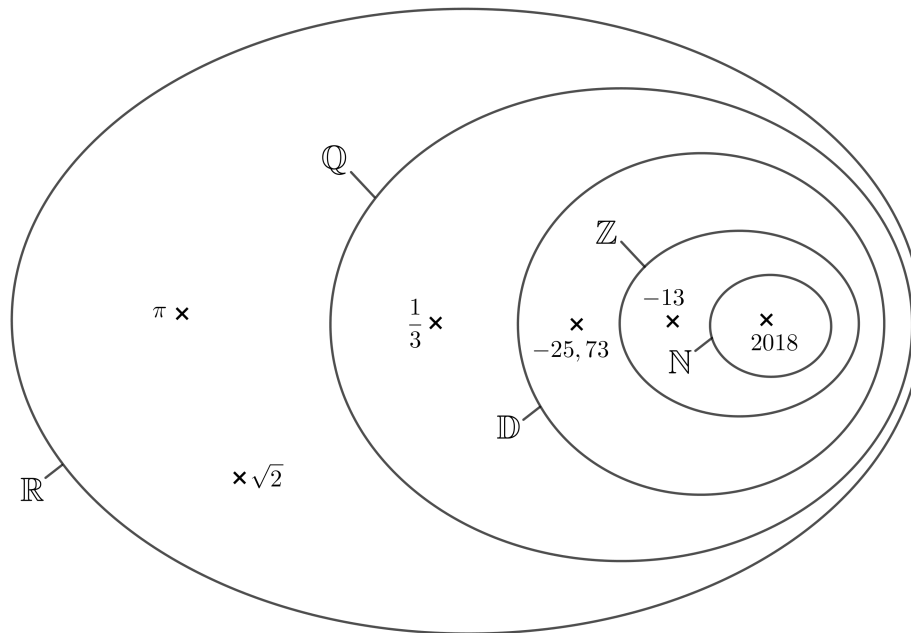
- $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$ l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{Z} = \{0; 1; -1; 2; -2; 3; -3; \dots\}$ l'ensemble des entiers relatifs.
- $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux, c'est-à-dire des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme : $\frac{a}{10^n}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme : $\frac{a}{b}$, où $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$.
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire de tous les nombres que l'on connaît à l'heure actuelle.

Exemple. (En classe)

Proposition 7. On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Démonstration. En classe. □

Illustration : voici un diagramme de Venn.



Notation : Quelques notation sont à connaître :

- $\mathbb{R}^*$ désigne l'ensemble des nombres réels privé de 0. On note aussi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs.
- $\mathbb{R}_-$ désigne l'ensemble des nombres réels négatifs.

Exercice. Voici deux exercices classiques :

1. Démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (cf. chapitre 1)
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que si $\sqrt{n}$ n'est pas un entier, alors il est irrationnel.

3.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 8. Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. L'ensemble des réels compris entre a et b est appelé un intervalle de $\mathbb{R}$. Plus précisément on a :

NOTATION	LECTURE	INÉGALITÉ(S)	REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE
$[a; b]$	Intervalle a, b fermé	$a \leq x \leq b$	
$[a; b[$	Intervalle a, b fermé en a , ouvert en b	$a \leq x < b$	
$]a; b]$			
$]a; b[$			
$[a; +\infty[$			
$]a; +\infty[$			
$] - \infty; b]$			
$] - \infty; b[$			

Exemple. Voici quelques exemples :

1. $C_{\mathbb{R}}(]-\infty; 5]) =]5; +\infty[$.
2. $C_{]-8; 15]}(]-2; 7]) =]-8; -2] \cup]7; 15]$.
3. $] - \infty; 22[\cap [11; +\infty[= [11; 22[$.
4. $] - 6; 11] \cup [5; 97[=]-6; 97[$.

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. $[a; a] = \{a\}$ et $]a; a[= \emptyset$
2. $\mathbb{R} =] - \infty; +\infty[$
3. $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ et $\mathbb{R}_- =] - \infty; 0]$
4. $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$ et $\mathbb{R}_-^* =] - \infty; 0[$

Chapitre 4

Expressions algébriques

Algèbre provient du mot arabe « al jabr », que l'on retrouve dans le titre du livre de Al-Khwarizmi « Kitab al jabr wa muqabala », et signifiant *remise en place*. A la Renaissance, l'algèbre désigne une extension des méthodes de calculs généralisées à des nombres éventuellement négatifs avec utilisation d'inconnues et de paramètres. Au début du $XIX^{\text{ème}}$ siècle, l'algèbre est encore considérée comme une arithmétique avec des symboles. On s'intéresse alors de plus en plus aux opérations en elles-mêmes. On se rend compte que sur différents ensembles de nombres elles vérifient des propriétés. Ceci conduit à l'étude des structures abstraites comme les groupes : c'est l'algèbre abstraite.



Al-Khwarizmi

(Khiva 780 - Bagdad 850)



François Viète

(Fontenay-le-Comte 1540 - Paris 1603)



Évariste Galois

(Bourg-la-Reine 1811 - Paris 1832)

4.1 Les polynômes

Définition 9. On appelle polynôme toute expression algébrique pouvant s'écrire sous la forme :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

où n est un entier naturel, $a_0, \dots, a_n$ sont des réels avec $a_n \neq 0$.

Vocabulaire :

- n est appelé le degré du polynôme.
- $\forall k \in \{0; 1; \dots; n\}$, $a_k x^k$ est appelé terme de degré k . Il s'agit d'un monôme.
- Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, alors on dit que $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ est la forme développée réduite du polynôme $P(x)$.

Exemple. Voici quelques exemples :

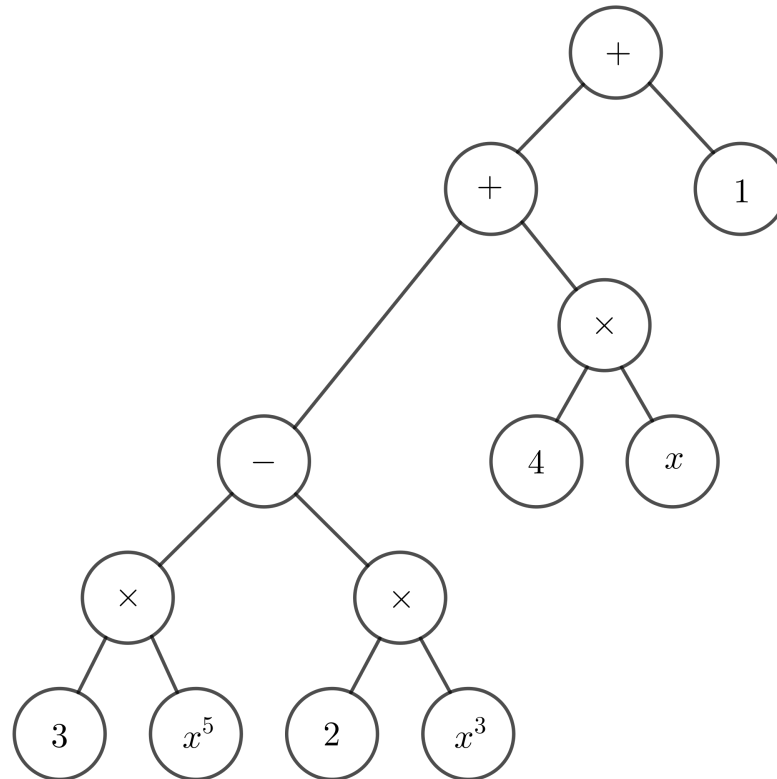
- $P(x) = 3x - 2$ est un polynôme de degré 1.
- $Q(x) = 5x^2 - 4x + 1$ est un polynôme de degré 2 appelé aussi « trinôme du second degré ».
- $R(x) = x^{17} - 1$ est un polynôme de degré 17.

Remarque. Un polynôme n'est pas nécessairement connu sous sa forme développée réduite. Il peut être connu sous une forme factorisée ou encore une forme mixte.

Exemple. Voici trois exemples de polynômes :

1. $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4x + 1$ est donné sous sa forme développée réduite.

Voici son arbre de structure :



2. $Q(x) = (3x - 4)(x + 3) - 36x^2 + 64$ est donné sous une forme mixte.

Dresser son arbre de structure.

3. $R(x) = -4(x + 3)(2x - 5)$ est donné sous une forme factorisée.

Dresser son arbre de structure.

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. La forme factorisée sera privilégiée lors de la résolution de l'équation $P(x) = 0$ car elle aboutit à une équation produit aisée à résoudre. Les solutions de cette équation sont appelées les racines du polynôme $P(x)$.
2. Il est parfois possible de passer d'une forme mixte à une forme factorisée en exhibant un facteur commun ou en reconnaissant une identité remarquable. Rappel et preuve géométrique.
3. Il est toujours possible d'obtenir la forme développée réduite à partir d'une forme mixte ou d'une forme factorisée en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Rappel et preuve géométrique.

Exemple. Il est difficile de résoudre $P(x) = 0$. Il est possible de factoriser et de développer $Q(x)$. Il est aisé de résoudre $R(x) = 0$.

Exercice. Compléter le tableau suivant :

LA FORME DÉVELOPPÉE RÉDUITE	UNE FORME MIXTE	UNE FORME FACTORISÉE
	$(3 - 4x)(2x - 5) - 7x(3 - 4x)$	
	$(9x + 5)^2 - 8(9x + 5)$	
	$(4x + 3)(5x - 2) - (4x + 3)(x - 3)$	
	$(4x - 5)(x + 2) - 2(x + 2)(x - 1)$	
$18x^2 + 27x - 45$		
$21x^4 - 14x^2 + 49x^3$		
$16x^2 + 40x + 25$		
$25 - 20x + 4x^2$		
$1 - 16x^2$		
$49x^2 - 14x$		
	$8x(x - 2)^2 - 2x^3$	
	$(-2x - 1)^2 - 9(3x + 4)^2$	
	$(x - 2)(5x + 1) - (x^2 - 4x + 4)$	
	$3(4x + 1)(3x - 1) - 16x^2 + 1$	
	$49x^2 + 28x + 4 + (7x + 2)(x + 4)$	

Exercice. Écrire un algorithme permettant de développer le produit de deux polynômes de degré 1.

4.2 Les fractions rationnelles

Définition 10. On appelle fraction rationnelle toute fraction de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes.

Exemple. Voici trois exemples de fractions rationnelles :

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{2}{x+3} \\ F_2(x) &= \frac{4x-7}{9x-1} \\ F_3(x) &= \frac{x^3-2}{(x+1)(x-1)} \end{aligned}$$

Remarque. La fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ a pour ensemble de définition l'ensemble des nombres réels privés des racines de Q .

Exemple. Déterminer l'ensemble de définition des fractions rationnelles suivantes :

$$\begin{aligned} - F_1(x) &= \frac{2x^2-x-3}{x-1} \\ - F_2(x) &= \frac{x^2-x-6}{9-x^2} \\ - F_3(x) &= \frac{2x+5}{x^2+1} \end{aligned}$$

Remarque. Il peut être bienvenu de simplifier certaines expressions algébriques comportant des fractions rationnelles.

Exemple. Simplifier $F_2(x) = \frac{x^2-x-3}{9-x^2}$ et $F_4(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{2x}{x^2-1}$.

Chapitre 5

Géométrie analytique dans le plan

Le participe passé du verbe *ordonner* adjectivé vers le $XIII^{ème}$ siècle. Son féminin se substantive lorsque René Descartes en 1639 le repérage des points du plan par deux coordonnées. Le mot désigne d'abord chacune des composantes qui sont ainsi les coordonnées. Très rapidement il ne désigne que celle de l'axe dit « vertical », celle de l'axe horizontal s'appelant l'abscisse.



René Descartes

(La-Haye 1596 - Stockholm 1650)



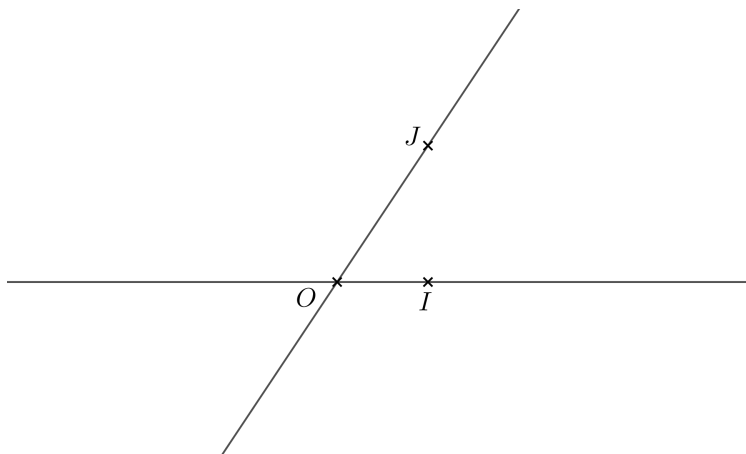
Pierre de Fermat

(Beaumont-de-Lomagne 1605 - Castres 1665)

5.1 Repères du plan

Définition 11. On appelle repère du plan la donnée de trois points O , I et J non alignés. On le note $(O; I, J)$.

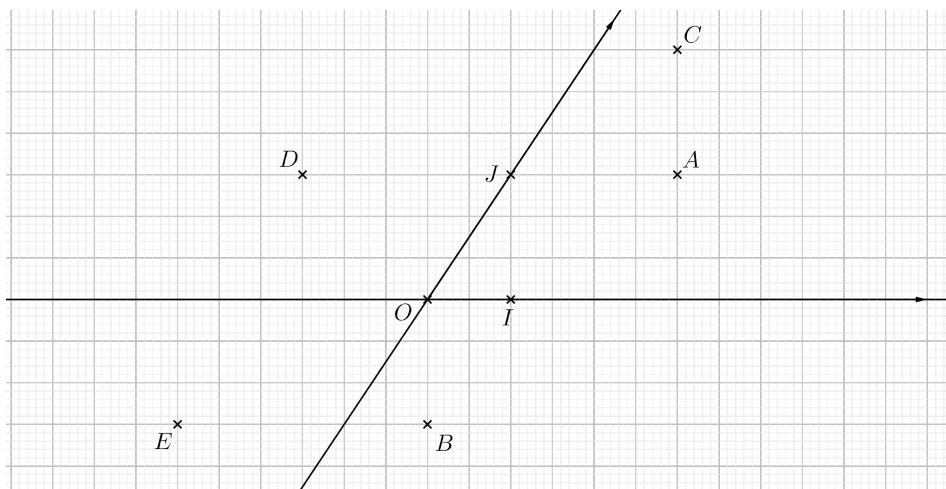
Illustration :



Vocabulaire :

- O est appelé l'origine du repère.
- La droite (OI) orientée de O vers I est appelée l'axe des abscisses du repère. La longueur OI est l'unité sur cet axe.
- La droite (OJ) orientée de O vers J est appelée l'axe des ordonnées du repère. La longueur OJ est l'unité sur cet axe.
- Si $(OI) \perp (OJ)$, alors le repère $(O; I, J)$ est dit orthogonal.
- Si $OI = OJ$, alors le repère $(O; I, J)$ est dit normé.
- Un repère orthogonal et normé est dit orthonormé.

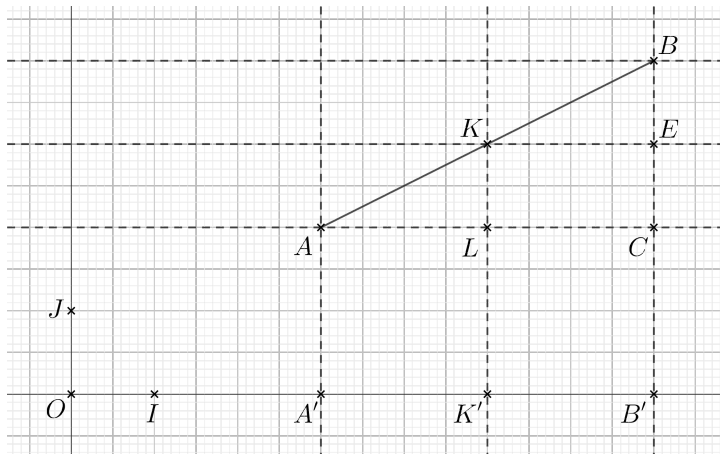
Exemple. Lisons les coordonnées des points A, B, C, D et E placés dans le repère $(O; I, J)$ ci-dessous :



5.2 Coordonnées du milieu d'un segment

Proposition 12. Soit $(O; I, J)$ un repère du plan. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. Soit $K(x_K; y_K)$ le milieu du segment $[AB]$. Alors :
$$\begin{cases} x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_K = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}.$$

Démonstration. Si $x_A = x_B$, alors il est évident que $x_K = x_A$. Or, $\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{x_A + x_A}{2} = x_A$. Donc $x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$. Sinon, on peut supposer pour fixer les idées, que $x_B > x_A$.



Soient A' , K' et B' les projetés respectifs de A , K et B sur l'axe des abscisses et parallèlement à l'axe des ordonnées. On trace la parallèle à l'axe des abscisses passant par A . Celle-ci coupe (KK') en L et (BB') en C . (KL) et (BC) sont parallèles et K est le milieu de $[AB]$. Donc, d'après le théorème des milieux, L est le milieu de $[AC]$. Donc $AC = 2AL$. De plus, $ALK'A'$ et $ACB'A'$ sont des parallélogrammes par construction. Donc $AC = A'B'$ et $AL = A'K'$. D'où $A'B' = 2A'K'$. Or $A'B' = x_B - x_A$ et $A'K' = x_K - x_A$, donc on en déduit $x_B - x_A = 2(x_K - x_A)$ puis $x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$. Le raisonnement est identique pour démontrer que $y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$. $\square$

Remarque. L'abscisse du milieu d'un segment est la moyenne arithmétique des abscisses des extrémités de ce segment. L'ordonnée du milieu d'un segment est la moyenne arithmétique des ordonnées des extrémités de ce segment.

Exemple. Soient $A(-2; -3)$, $B(1; 4)$ et $D(6; -1)$ trois points du plan muni d'un repère. Déterminer les coordonnées du point C du plan tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

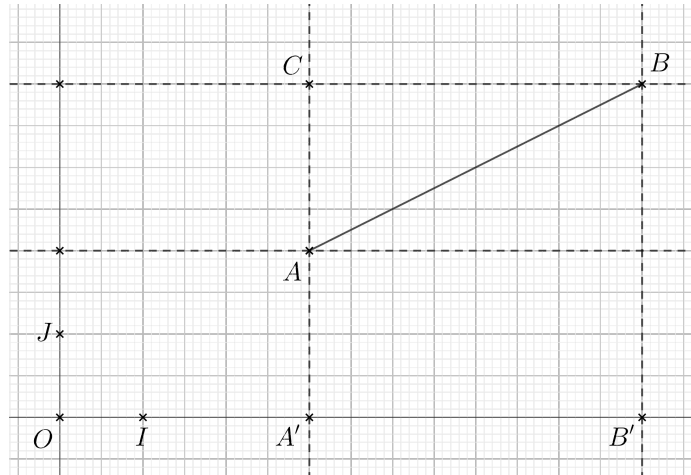
Exercice. Écrire un algorithme permettant de déterminer si quatre points du plan dont on connaît les coordonnées forment un parallélogramme.

5.3 Longueur d'un segment

Proposition 13. Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormé du plan. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. Alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Démonstration. Soient A' et B' les projetés respectifs de A et B sur l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées.



La parallèle à l'axe des abscisses passant par B coupe (AA') en C . Le quadrilatère $BCA'B'$ est évidemment un rectangle, par conséquent le triangle ABC est rectangle en C . D'après le théorème de Pythagore, on a alors : $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Or $CB = A'B' = |x_B - x_A|$ et $AC = |y_C - y_A|$ par une construction similaire. D'où $AB^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_C - y_A|^2$, c'est-à-dire : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. $\square$

Remarque. La démonstration ci-dessus fait intervenir le théorème de Pythagore, donc le triangle ABC doit être rectangle en C . Or ceci n'est le cas que si $(O; I, J)$ est orthogonal. De plus, il est nécessaire que l'on calcule les distances avec les mêmes unités dans toutes les directions, donc le repère $(O; I, J)$ doit être normé. En réalité cela n'explique pas pourquoi cette formule n'est valable que dans un repère orthonormé car il pourrait exister une autre démonstration de celle-ci ne faisant pas intervenir le théorème de Pythagore...

Exemple. Soient $S(-3, 2; 3, 2)$, $A(8; 1, 6)$ et $W(3, 2; 8)$ trois points du plan muni d'un repère orthonormé. Déterminer la nature du triangle SAW .

Exercice. Écrire un algorithme permettant d'étudier la nature d'un triangle formé par trois points dont on connaît les coordonnées.

Chapitre 6

Notion de fonction

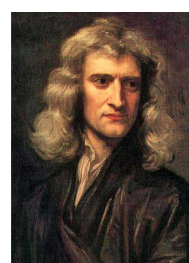
Le mot latin « *functio* », *accomplissement*, *exécution* vient du verbe « *fungi* », *s'acquitter de*. Il donne dès le $XVI^{ème}$ siècle en français *fonction* dans le sens *exercice d'une charge*. Son sens s'étend pour désigner le rôle actif de n'importe quel agent, pas forcément humain. *Fonction* apparaît en mathématiques dans une lettre de Jean Bernoulli à Gottfried Wilhelm Leibniz dans l'expression Φx , Φ fonction de x . Bernoulli l'emploie comme un mot du langage courant. C'est tout au long du $XVIII^{ème}$ et $XIX^{ème}$ siècle que se forge petit à petit la notion de fonction. Il faut attendre la fin du $XIX^{ème}$ siècle et l'étude des espaces fonctionnels pour qu'on en donne une définition précise et que l'on considère une fonction comme un élément. Emprunté du latin « *variatio* », *action de varier*, *variation* apparaît en français au début du $XIV^{ème}$ siècle. Son utilisation en mathématiques date du $XVIII^{ème}$ siècle. Le calcul des variations, alors très en vogue, correspondant à des recherches d'extremums. Le mot s'emploie en analyse dans diverses expressions comme *variation des constantes* ou *fonction à variation bornée*.



Jean Bernoulli
(Bâle 1667 - Bâle 1748)



Gottfried Wilhelm Leibniz
(Leipzig 1646 - Hanovre 1716)

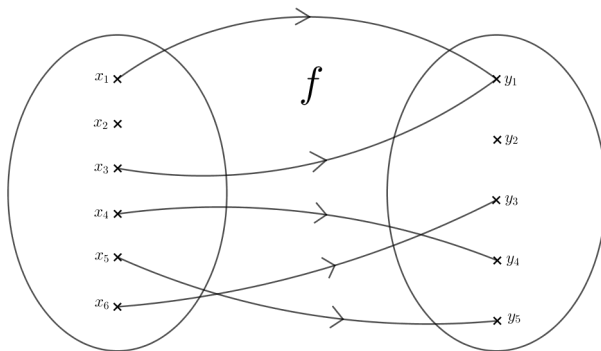


Isaac Newton
(Woolsthorpe 1642 - Kensington 1727)

6.1 Point de vue algébrique

Définition 14. Soient A et B deux ensembles. On appelle fonction f de A vers B toute correspondance qui, à chaque élément de A , associe un ou zéro élément de B . L'ensemble A est appelé la source et B le but.

Illustration : Voici un diagramme sagittal ou diagramme d'Euler.



Vocabulaire :

- On dit que f est la fonction de A vers B qui, à x , associe $f(x)$.
- x est appelé la variable et $f(x)$ est appelé l'image de x par f .
- Si B est un ensemble de nombres réels, alors on dit que f est une fonction numérique.
- Si A est un ensemble de nombres réels, alors on dit que f est une fonction d'une variable réelle.
- Si $A = \mathbb{N}$, alors on dit que f est une suite.

Notation : (notation standard)

Exemple. (Fonctions constante, linéaire, affine, carrée, cube)

Remarque. On peut d'ores et déjà effectuer plusieurs remarques :

- Lorsque v est l'image de u par f , on dit aussi que u est un antécédent de v par f et l'on note : $v = f(u)$.
- La symétrie centrale, la symétrie axiale, la rotation et la translation sont des fonctions.

Définition 15. Soit f une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B . On appelle domaine de définition de f l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f . On le note $\mathcal{D}_f$.

Exemple. (Fonctions inverse et racine carrée)

Exercice. Déterminer le domaine de définition de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x+3} + \frac{1}{2x+5}$.

Remarque. On peut déterminer algébriquement une image et d'éventuels antécédents lorsque ceux-ci existent.

Exemple. Soit $f : x \mapsto 9x^2 - 12x + 4$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
2. Calculer l'image de 0 par f .
3. Déterminer les éventuels de 0 par f sur $\mathcal{D}_f$.

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

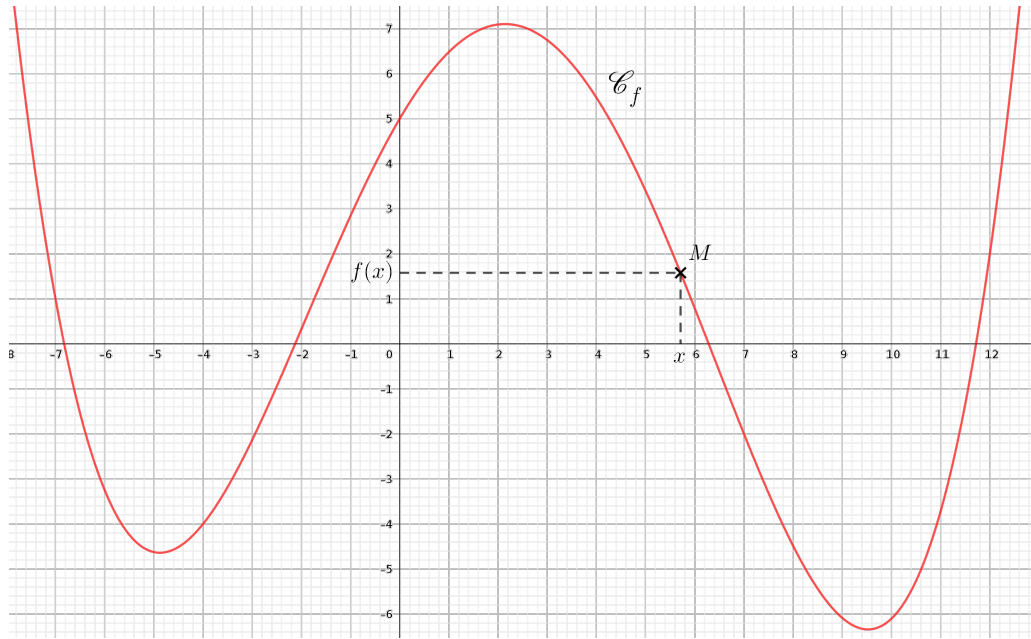
- Tout réel du domaine de définition possède une unique image.
Formellement : $\forall x \in \mathcal{D}_f, \exists! y \in \mathbb{R}, y = f(x)$.
- Un réel peut ne pas avoir d'antécédent, en avoir un seul, plusieurs, et même une infinité !

6.2 Point de vue géométrique

Définition 16. Soit $(O; I, J)$ un repère du plan. Soit f une fonction numérique d'une variable réelle. On appelle courbe représentative, représentation graphique ou encore graphe de f l'ensemble des points $M(x; f(x))$, où $x \in \mathcal{D}_f$. On la note $\mathcal{C}_f$. Formellement, on a :

$$\mathcal{C}_f = \{M(x; f(x)), x \in \mathcal{D}_f\}$$

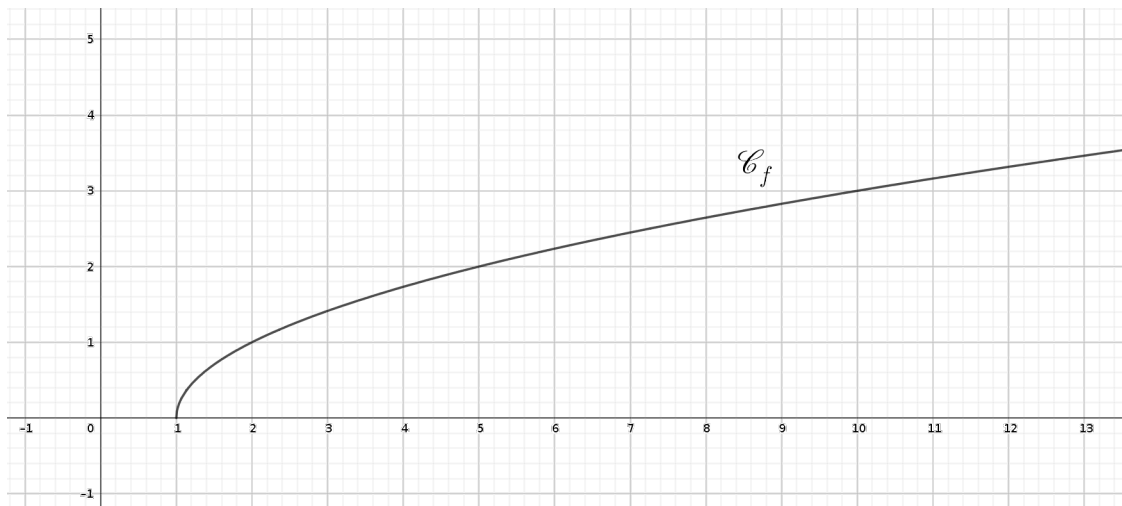
Illustration :



Remarque. On a l'équivalence suivante : $(M(x; y) \in \mathcal{C}_f) \Leftrightarrow (x \in \mathcal{D}_f \text{ et } y = f(x))$.

Exemple. Le point $A\left(-\frac{2}{3}; -\frac{27}{22}\right)$ appartient-il à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{3x-1}{x^2+2}$?

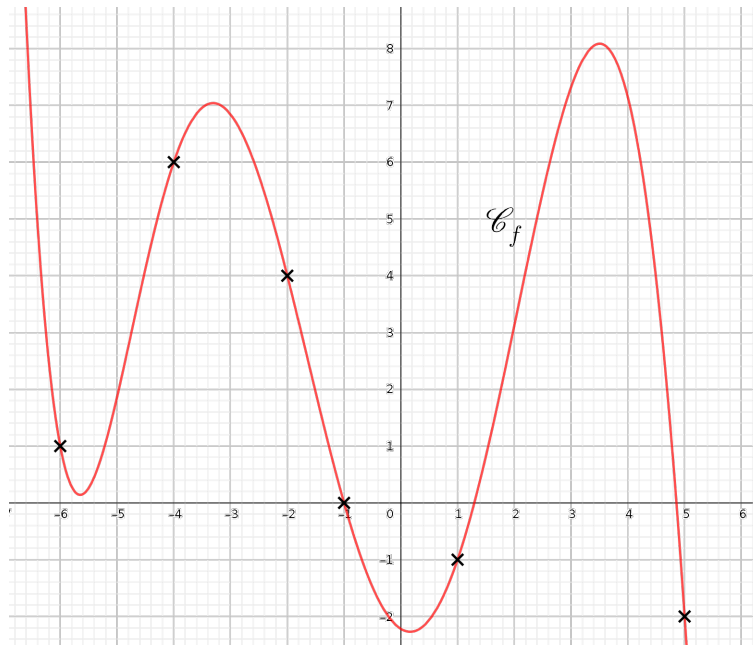
Illustration : Voici la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x-1}$:



Vocabulaire : On dit que $y = f(x)$ est l'équation cartésienne de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Remarque. On peut déterminer géométriquement une image et d'éventuels antécédents lorsque ceux-ci existent.

Exemple. Soit f une fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessous :



Lisons quelques images par f .

Problème. La courbe représentative d'une fonction étant donnée, on peut se poser les deux questions suivantes :

1. Quelle est sa longueur ?
2. Quelle est l'aire d'un domaine situé sous cette courbe ?

Exercice. Soit $f : [-4; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

1. Écrire un algorithme permettant de calculer une valeur approchée de la longueur de la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Écrire un algorithme permettant de calculer une valeur approchée de l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = -4$ et $x = 4$.

6.3 Variations d'une fonction

Définition 17. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit a un élément de E . Soit $M \in \mathbb{R}$. On dit que :

1. f est majorée par M sur E si, pour tout $x \in E$, $f(x) \leq M$.
2. f est minorée par M sur E si, pour tout $x \in E$, $f(x) \geq M$.
3. f admet un maximum en a sur E valant $f(a)$ si, pour tout $x \in E$, $f(x) \leq f(a)$.
4. f admet un minimum en a sur E valant $f(a)$ si, pour tout $x \in E$, $f(x) \geq f(a)$.
5. f admet un extremum sur E si f admet un minimum ou un maximum sur E .

Exemple. Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 + 2\sqrt{x-4}$. La fonction f admet-elle un minimum, un maximum, sur son domaine de définition ?

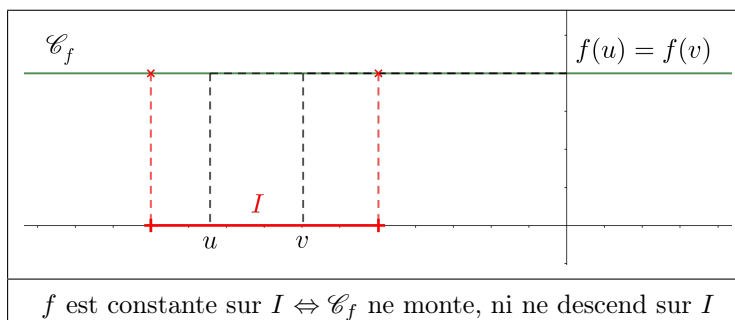
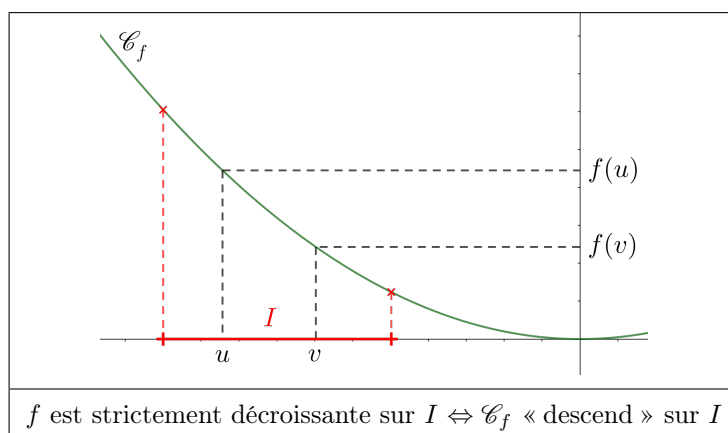
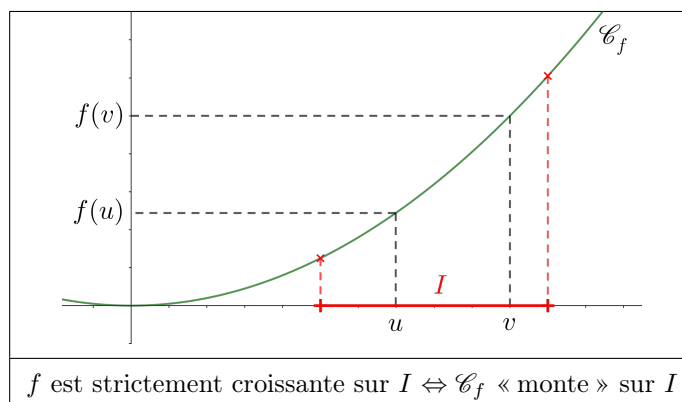
Remarque. La notion d'extremum est relative à l'ensemble d'étude E .

Exemple. Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 - 1$. Déterminer le minimum de g sur $[-4; 4]$ puis sur $[2; 5]$.

Définition 18. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que :

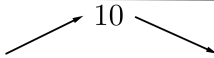
1. f est constante sur I si, pour tous $u, v \in I$, $f(u) = f(v)$.
2. f est croissante sur I si, pour tous $u, v \in I$, $(u < v) \Rightarrow (f(u) \leq f(v))$.
3. f est strictement croissante sur I si, pour tous $u, v \in I$, $(u < v) \Rightarrow (f(u) < f(v))$.
4. f est décroissante sur I si, pour tous $u, v \in I$, $(u < v) \Rightarrow (f(u) \geq f(v))$.
5. f est strictement décroissante sur I si, pour tous $u, v \in I$, $(u < v) \Rightarrow (f(u) > f(v))$.
6. f est monotone sur I si f est croissante ou décroissante sur I .
7. f est strictement monotone sur I si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I .

Illustration : Voici les illustration de ces définitions :



Remarque. On résume souvent les variations d'une fonction dans un tableau de variations.

Exemple. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, croissante sur $] -\infty; -2]$ et décroissante sur $[-2; +\infty[$, alors on résume cela ainsi :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f			

Remarque. On peut émettre une conjecture quant aux variations d'une fonction en observant sa courbe représentative à la calculatrice.

Exemple. Voici deux exemples :

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 5)^2$. Démontrons que f est strictement décroissante sur $] -\infty; -5]$ et strictement croissante sur $[-5; +\infty[$.
- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5x - 1$. La fonction g admet-elle un minimum, un maximum, sur son domaine de définition ?

Exercice. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x + 7)^2 + 5$.

1. Démontrer que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.
2. Dresser le tableau de variations de f .

Exercice. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 9x^2 + 15x - 9$. Démontrer que g n'est ni croissante ni décroissante sur $[-5; 1]$.

6.4 Opérations sur les fonctions

Définition 19. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions définies sur I . On appelle :

1. Somme de f et g la fonction notée $f + g$ et définie sur I par : $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$.
2. Produit de f par g la fonction notée $f \times g$ et définie sur I par : $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.
3. Quotient de f par g la fonction notée $\frac{f}{g}$ définie sur $I \setminus \{x \in I, g(x) = 0\}$ par : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Remarque. La somme et le produit de deux fonctions sont clairement commutatifs alors que le quotient ne l'est évidemment pas.

Exemple. Soient $f : x \mapsto 3x - 5$ et $g : x \mapsto x^2 - 16$. Exprimons $f + g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$.

Définition 20. Soit f une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans un ensemble F . Soit g une fonction définie sur F . On appelle composée de f suivie de g la fonction notée $g \circ f$ définie sur E par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \sqrt{x}$. Alors la fonction $g \circ f$ est définie sur $[-\frac{1}{2}; +\infty[$ par $(g \circ f)(x) = \sqrt{2x + 1}$.

Remarque. En général, $g \circ f \neq f \circ g$. Dans l'exemple précédent, $f \circ g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $(f \circ g)(x) = 2\sqrt{x} + 1$.

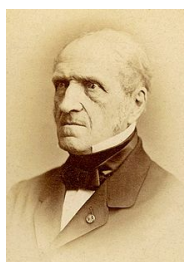
Chapitre 7

Vecteurs

En latin classique, « vector » désignait le passager comme celui qui transporte. « Vector » venait lui-même du verbe « vehere », *transporter* qui a donné les mots *voiture* et *véhicule*. Au Moyen-Âge et jusqu'à la Renaissance, le vecteur est le conducteur d'un bateau ou d'un véhicule, mais ce mot tombe alors en désuétude. *Vecteur* est repris au milieu du *XVIII^{ème}* siècle par les astronomes sous forme d'adjectif dans les expressions *tourbillon vecteur* pour désigner le mouvement d'une planète et *rayon vecteur* pour joindre le foyer à une position sur l'orbite. En 1844, le mathématicien et astronome irlandais William Hamilton introduit le mot « vector » pour désigner le vecteur joignant deux points. Cependant ce mot se répand sous l'impulsion de l'école de physique mathématique anglaise, en particulier grâce à Maxwell. Vers 1900, les vecteurs deviennent libres, liés ou glissants. Bientôt, avec le développement de la théorie des espaces vectoriels, le vecteur n'est plus qu'un élément d'un ensemble sans lien nécessaire avec deux points.



William Rowan Hamilton
(Dublin 1805 - Dublin 1865)



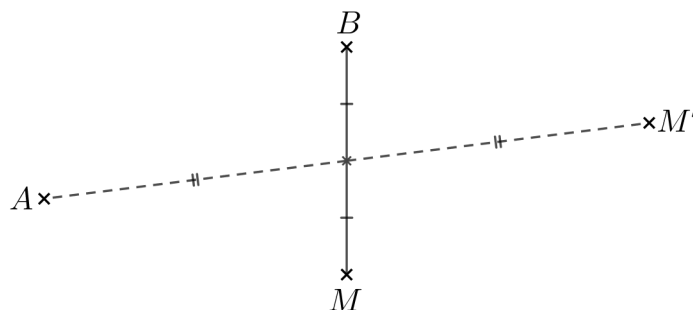
Michel Chasles
(Epernon 1793 - Paris 1880)

7.1 En géométrie pure

7.1.1 Présentation

Définition 21. Soient A et B deux points du plan. On appelle translation envoyant A en B la transformation du plan qui, à tout point M du plan, associe le point M' du plan tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont le même milieu, c'est-à-dire tel que $ABM'M$ est un parallélogramme. M' est appelé l'image de M par cette translation et M est appelé un antécédent de M' par cette translation.

Illustration :

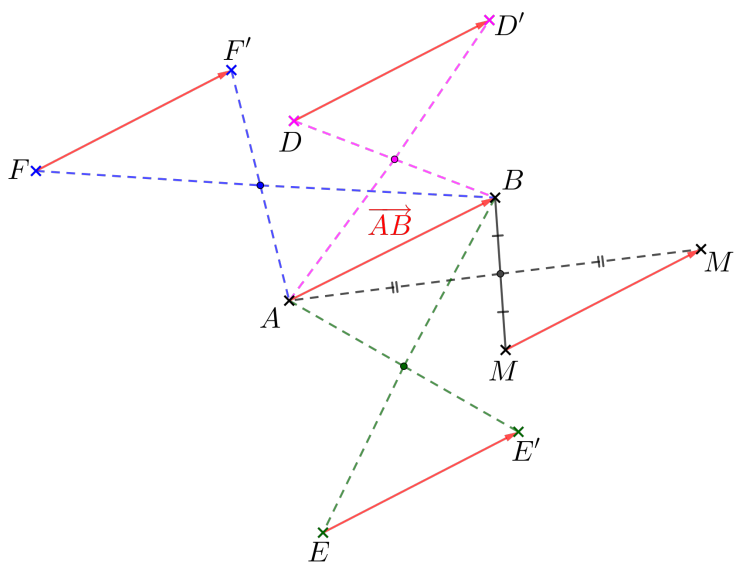


Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. A tout point M du plan, la translation envoyant A en B , associe un unique point M' du plan. Il y a unicité de l'image, du translaté.
2. Pour tout point M' du plan, il existe un unique point M du plan dont M' est l'image par la translation envoyant A en B . Il y a unicité de l'antécédent.

Définition 22. Soient A et B deux points du plan. Soit t la translation envoyant A en B . L'ensemble des couples $(M; M')$ où M' est l'image de M par t est appelé le vecteur d'origine A et d'extrémité B . Il est noté $\overrightarrow{AB}$.

Illustration :



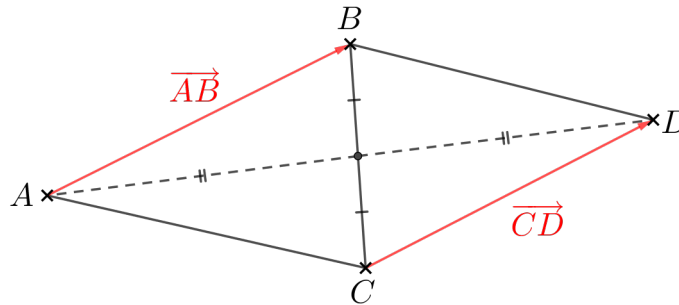
Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'a pas de « position » dans le plan.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par trois paramètres :
 - (a) Sa direction : la droite (AB) .
 - (b) Son sens : de A vers B .
 - (c) Sa norme : la longueur AB , notée aussi $\|\overrightarrow{AB}\|$.

3. Si A et B sont confondus, alors on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est nul et l'on note : $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
4. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ caractérise entièrement la translation envoyant A en B .

Définition 23. Soient A, B, C et D quatre points du plan. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits égaux si la translation envoyant A en B envoie C en D , c'est-à-dire si $ABDC$ est un parallélogramme. On écrit alors : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Illustration :

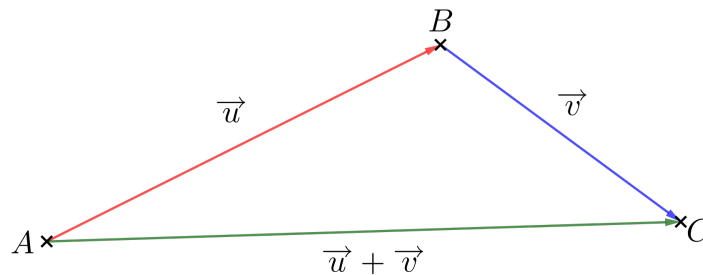


Remarque. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots = \overrightarrow{ZZ} = \vec{0}$.

7.1.2 Calcul vectoriel

Définition 24. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Soient A, B et C trois points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$. On pose : $\vec{u} + \vec{v} := \overrightarrow{AC}$.

Illustration :



Exercice. Démontrer que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$. L'addition de deux vecteurs est dite commutative.

Proposition 25. (*Relation de Chasles*) Soient A, B et C trois points du plan. Alors : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Démonstration. Découle directement de la définition précédente. □

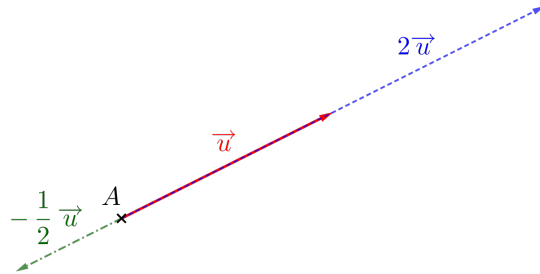
Remarque. On a : $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\| \leq \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\|$. Cette inégalité est appelée l'inégalité triangulaire.

Définition 26. Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan et λ un réel non nul. Le vecteur $\lambda\vec{u}$ est le vecteur qui a :

- la même direction que celle de $\vec{u}$.
- le même sens que celui de $\vec{u}$ si $\lambda > 0$, le sens opposé à celui de $\vec{u}$ si $\lambda < 0$.
- pour norme $|\lambda| \|\vec{u}\|$.

Par ailleurs, pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout réel λ , on pose : $0\vec{u} := \vec{0}$ et $\lambda\vec{0} := \vec{0}$.

Exemple. Voici un exemple :



Remarque. $\lambda\vec{u} = \vec{0}$ si, et seulement si, $\lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

Définition 27. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont dits colinéaires s'il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'ils ont la même direction d'après ce qui précède. Exemple : /
2. Le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur. En effet, quel que soit le vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{0} = 0\vec{u}$.
3. Lorsque $\lambda = -1$, on obtient $-1\vec{u} = -\vec{u}$ appelé vecteur opposé à $\vec{u}$. Ces deux vecteurs ont la même direction, la même norme mais sont de sens contraire.

Définition 28. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On pose $\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-\vec{v})$.

Proposition 29. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et λ, μ deux réels. Alors :

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativité de l'addition)
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associativité de l'addition)
3. $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$
4. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
5. $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda \times \mu)\vec{u}$
6. $1\vec{u} = \vec{u}$

Démonstration. Laissez en exercice. □

Exemple. Simplifier l'expression vectorielle suivante : $4\vec{u} - \vec{v} + 6\vec{w} + 3\vec{v} - 2(\vec{u} + 3\vec{w})$.

Proposition 30. (Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment) Soient A et B deux points du plan. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. I est le milieu de $[AB]$.
2. $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.
3. $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$: soit I le milieu de $[AB]$. Alors $I \in [AB]$ et $IA = IB$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ ont la même direction, la même norme mais ont un sens contraire. Ils sont donc opposés : $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$. D'où : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

$2 \Rightarrow 3$: supposons que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Alors, d'après la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. D'où : $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{IA}$, puis : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ et enfin : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$3 \Rightarrow 1$: supposons que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Alors $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont la même direction, autrement dit $I \in (AB)$. De plus, $\|\overrightarrow{AI}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|$ soit $AI = \frac{1}{2}AB$. Par conséquent, I est le milieu de $[AB]$. $\square$

Proposition 31. (*Caractérisation vectorielle du parallélogramme*) Soient A, B, C et D quatre points du plan. $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Démonstration. $\Rightarrow$: soit $ABCD$ un parallélogramme. Alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ par définition de l'égalité de vecteurs. Ainsi : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

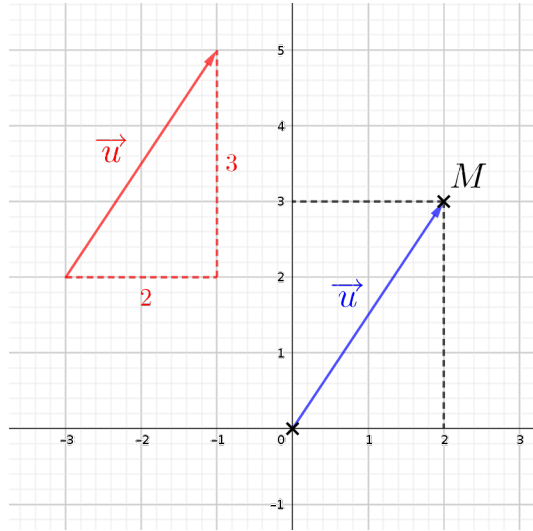
$\Leftarrow$: supposons que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Alors : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. D'où : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Ainsi, par définition de l'égalité de vecteurs, $ABCD$ est un parallélogramme. $\square$

7.2 En géométrie analytique

Dans toute cette section, on munit le plan d'une repère $(O; I, J)$.

Définition 32. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Soit M l'image du point O par la translation de vecteur $\vec{u}$. On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées du point M .

Illustration :



Notation : on note $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Proposition 33. Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées.

Démonstration. $\Rightarrow$: soient $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ deux vecteurs égaux. Démontrons que $a = a'$ et $b = b'$.

Soit M l'image de O par la translation de vecteur $\vec{u}$. Par définition, $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Soit M' l'image de O par la translation de vecteur $\vec{v}$.

Par définition, $\overrightarrow{OM'} = \vec{v}$. Or $\vec{u} = \vec{v}$, donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$.

Par conséquent M et M' sont confondus et ont les mêmes coordonnées.

$\Leftarrow$: soient $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Soit M le point de coordonnées $(a; b)$. Alors, par définition, $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$. Donc $\vec{u} = \vec{v}$. □

Proposition 34. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Démonstration. Soit M l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Soit $(x_M; y_M)$ ses coordonnées. On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Donc $OMBA$ est un parallélogramme. Ainsi, par propriété, $[OB]$ et $[AM]$ ont le même milieu. D'où :

$$\begin{cases} \frac{x_O + x_B}{2} = \frac{x_A + x_M}{2} \\ \frac{y_O + y_B}{2} = \frac{y_A + y_M}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = x_A + x_M \\ y_B = y_A + y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x_B - x_A \\ y_M = y_B - y_A \end{cases}$$

□

Proposition 35. Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix}$.
2. Le vecteur $\lambda \vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$.

Démonstration. Déroule directement de la proposition précédente. □

Proposition 36. Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $ab' - a'b = 0$.

Démonstration. $\Rightarrow$: si l'un des deux vecteurs est nul, alors clairement $ab' - a'b = 0$. Supposons donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls. Étant colinéaires, par définition, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$. Alors, d'après la proposition précédente, on a : $a' = \lambda a$ et $b' = \lambda b$. D'où : $ab' - a'b = a\lambda b - \lambda ab = 0$.

$\Leftarrow$: supposons que $ab' - a'b = 0$. Si le vecteur $\vec{u}$ était nul, alors il serait colinéaire au vecteur $\vec{v}$. Sinon, l'une au moins de ses coordonnées est non nulle. Pour fixer les idées, supposons que ce soit a . Posons alors $\lambda := \frac{a'}{a}$. La relation $ab' - a'b = 0$ devient alors : $b' = \frac{\lambda ab}{a} = \lambda b$. Ainsi $a' = \lambda a$ et $b' = \lambda b$. D'où $\vec{v} = \lambda \vec{u}$. □

Exercice. Voici trois exercices d'algorithmique :

1. Écrire un algorithme permettant de déterminer si deux vecteurs dont on connaît les coordonnées sont colinéaires ou non.
2. Écrire un algorithme permettant de déterminer si deux droites sont parallèles connaissant les coordonnées de deux points distincts de chaque droite.
3. Écrire un algorithme permettant de déterminer si trois points dont on connaît les coordonnées sont alignés.

Chapitre 8

Fonctions de référence (1)

Inverse est forgé vers 1600 sur le participe passé du verbe latin « invertire » qui signifiait *retourner*, *renverser*. Il qualifie alors ce qui est opposé. Il s'utilise dès le *XVII^{ème}* siècle en mathématiques dans les expressions *règle inverse* et *rapport inverse*. Celui-ci se substantive pour désigner le symétrique pour la multiplication puis plus généralement pour la deuxième loi d'un anneau laissant à *opposé* ce rôle pour l'addition.



Leonhard Euler

(Bâle 1707 - Saint-Petersbourg 1783)

8.1 Fonction affine

Définition 37. On appelle fonction affine toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

Vocabulaire :

1. a est appelé le coefficient directeur de f .
2. b est appelé l'ordonnée à l'origine de f .
3. Si $b = 0$, alors f est dite linéaire. Si $a = 0$, alors f est dite constante.

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. $b = f(0)$. C'est l'ordonnée du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.
2. Il existe une unique fonction linéaire et constante : la fonction nulle.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}$.

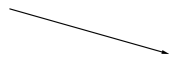
1. Calculer $f(0)$, $f(-3)$ et $f(-\frac{3}{7})$.
2. Déterminer les antécédents de 0, -6 et $\frac{2}{5}$ par f .

Proposition 38. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$. Alors :

1. Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f		

2. Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f		

3. Si $a = 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f		

Démonstration. 1. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$. Alors : $ax_1 < ax_2$ car $a > 0$. D'où : $ax_1 + b < ax_2 + b$, c'est-à-dire : $f(x_1) < f(x_2)$. Par définition, f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. et 3. : laissées en exercice. □

Exercice. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{3}{2}x + 1$. Dresser le tableau de variations de f .

Proposition 39. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$. Alors :

1. Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

2. Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

3. Si $a = 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de b	

Démonstration. 1. Si $x \in]-\infty; -\frac{b}{a}[$, alors : $x < -\frac{b}{a}$. D'où : $ax < -b$ car $a > 0$. On en déduit : $ax + b < 0$, c'est-à-dire : $f(x) < 0$.

Si $x \in]-\frac{b}{a}; +\infty[$, alors : $x > -\frac{b}{a}$. D'où : $ax > -b$ car $a > 0$. On en déduit : $ax + b > 0$, c'est-à-dire : $f(x) > 0$.

Si $x = -\frac{b}{a}$, alors $ax + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$.

2. et 3. : laissées en exercices. □

Exercice. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{3}{2}x + 1$. Dresser le tableau de signes de f .

Remarque. Une fonction peut s'annuler sans changer de signe. Exemple : la fonction $f : x \mapsto (x-2)^2$ s'annule en 2 et est positive sur $\mathbb{R}$.

Proposition 40. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$. Alors la courbe représentative de f dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Démonstration. Soient $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Pour fixer les idées, on suppose $x_1 < x_2 < x_3$ et $a > 0$. Soient $M_1(x_1; f(x_1))$, $M_2(x_2; f(x_2))$ et $M_3(x_3; f(x_3))$ trois points du plan. Il s'agit de démontrer que ces trois points sont alignés. Pour cela, on calcule les angles θ_1 et θ_2 que forment respectivement les droites (M_1M_2) et (M_1M_3) avec l'axe des abscisses. Plus précisément, on va calculer la tangente de chacun de ces angles. On a :

$$\begin{cases} \tan(\theta_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ \tan(\theta_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \end{cases}$$

Or :

$$\begin{cases} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a \\ \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{ax_3 + b - (ax_1 + b)}{x_3 - x_1} = \frac{a(x_3 - x_1)}{x_3 - x_1} = a \end{cases}$$

Ainsi, $\tan(\theta_1) = \tan(\theta_2)$. On admet alors que : $\theta_1 = \theta_2$ à un multiple de 180° près. Par conséquent, les droites (M_1M_2) et (M_1M_3) forment le même angle avec l'axe des abscisses. Par conséquent, elles sont parallèles d'après une propriété sur les angles correspondants. Enfin, puisqu'elles passent toutes les deux par M_1 , elles sont nécessairement confondues. Autrement dit, dès que l'on prend trois points distincts de $\mathcal{C}_f$, ils sont alignés. Ceci signifie bien que $\mathcal{C}_f$ est une droite. $\square$

Proposition 41. Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soit d une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. Alors il existe deux réels a et b tels que d soit la courbe représentative de la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

Remarque. On utilise le théorème de Thalès.

Proposition 42. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \neq x_2$. Alors :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Démonstration. Il suffit de l'écrire. $\square$

8.2 Fonction carrée

Définition 43. On appelle fonction carrée la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Remarque. On peut aisément calculer des images et chercher d'éventuels antécédents par la fonction carrée.

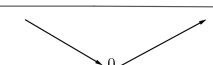
Proposition 44. La fonction carrée est positive sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Évident. $\square$

Proposition 45. La fonction carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$.

Démonstration. Démontrons que la fonction carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Soient $x_1, x_2 \in [0; +\infty[$ tels que $x_1 < x_2$. Alors $x_1^2 < x_1 \times x_2$. Or $x_1 \times x_2 < x_2^2$. D'où : $x_1^2 < x_2^2$. La stricte décroissance de la fonction carrée sur $] -\infty; 0]$ est laissée en exercice. $\square$

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Fonction carrée			

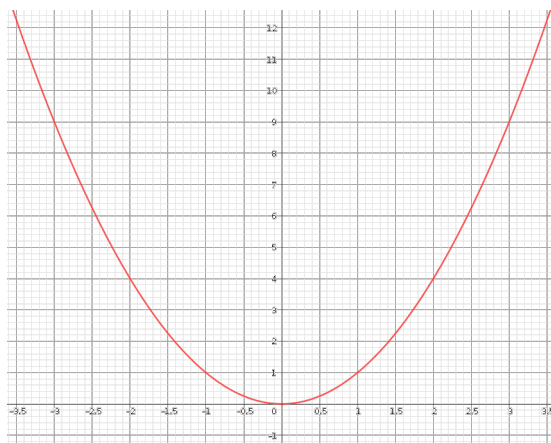
Proposition 46. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction carrée, appelée parabole, est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $M(x; x^2)$. D'après ce qui précède, M appartient à la courbe représentative de la fonction carrée. Soit M' le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées. Soit $K(0; x^2)$. Le repère étant orthogonal, M' est aussi le symétrique de M par rapport à K . D'où :

$$\begin{cases} x_K = \frac{x_M + x_{M'}}{2} \\ y_K = \frac{y_M + y_{M'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{x + x_{M'}}{2} \\ x^2 = \frac{x^2 + y_{M'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = -x \\ y_{M'} = x^2 \end{cases}$$

Ainsi M' a pour coordonnées $(-x; x^2)$. Or $(-x)^2 = x^2$. Donc M' appartient à la courbe représentative de la fonction carrée. $\square$

Illustration :



8.3 Fonction inverse

Définition 47. On appelle fonction inverse la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Remarque. On peut d'ores et déjà effectuer deux remarques :

1. On peut aisément calculer des images et chercher d'éventuels antécédents par la fonction inverse.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(f(x)) = x$. On dit que f est involutive. Existe-t-il d'autres fonctions involutives ?

Proposition 48. La fonction inverse est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration. Évident. $\square$

Proposition 49. *La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et strictement décroissante sur $] - \infty; 0[$.*

Démonstration. Démontrons que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. Soient $x_1, x_2 \in]0; +\infty[$ tels que $x_1 < x_2$. Alors : $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}$. Or $x_2 - x_1 > 0$ et $x_1 x_2 > 0$. Donc $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$. Par conséquent la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. La stricte décroissance de la fonction inverse sur $] - \infty; 0[$ est laissée en exercice. $\square$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Fonction inverse			

Remarque. Pourquoi ne pouvons-nous pas affirmer que la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$?

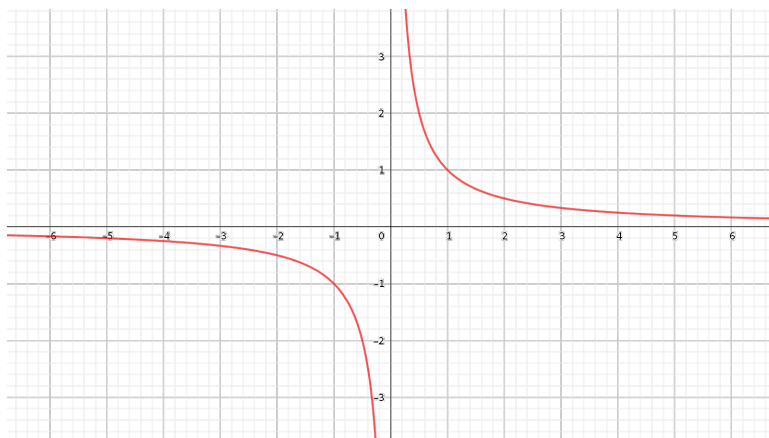
Proposition 50. *Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction inverse, appelée hyperbole, est symétrique par rapport à l'origine du repère.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Soit $M(x; \frac{1}{x})$. D'après ce qui précède, M appartient à la courbe représentative de la fonction inverse. Soit M' le symétrique de M par rapport à l'origine du repère. Alors :

$$\begin{cases} x_O = \frac{x_M + x_{M'}}{2} \\ y_O = \frac{y_M + y_{M'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{x + x_{M'}}{2} \\ 0 = \frac{\frac{1}{x} + y_{M'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = -x \\ y_{M'} = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

Ainsi M' a pour coordonnées $(-x; -\frac{1}{x})$. Or $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$. Donc M' appartient à la courbe représentative de la fonction inverse. $\square$

Illustration :



8.4 Fonction valeur absolue

Définition 51. On appelle fonction valeur absolue la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque. On peut aisément calculer des images et chercher d'éventuels antécédents par la fonction valeur absolue.

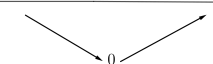
Proposition 52. La fonction valeur absolue est positive sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Évident. □

Proposition 53. La fonction valeur absolue est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$.

Démonstration. Laissée en exercice. □

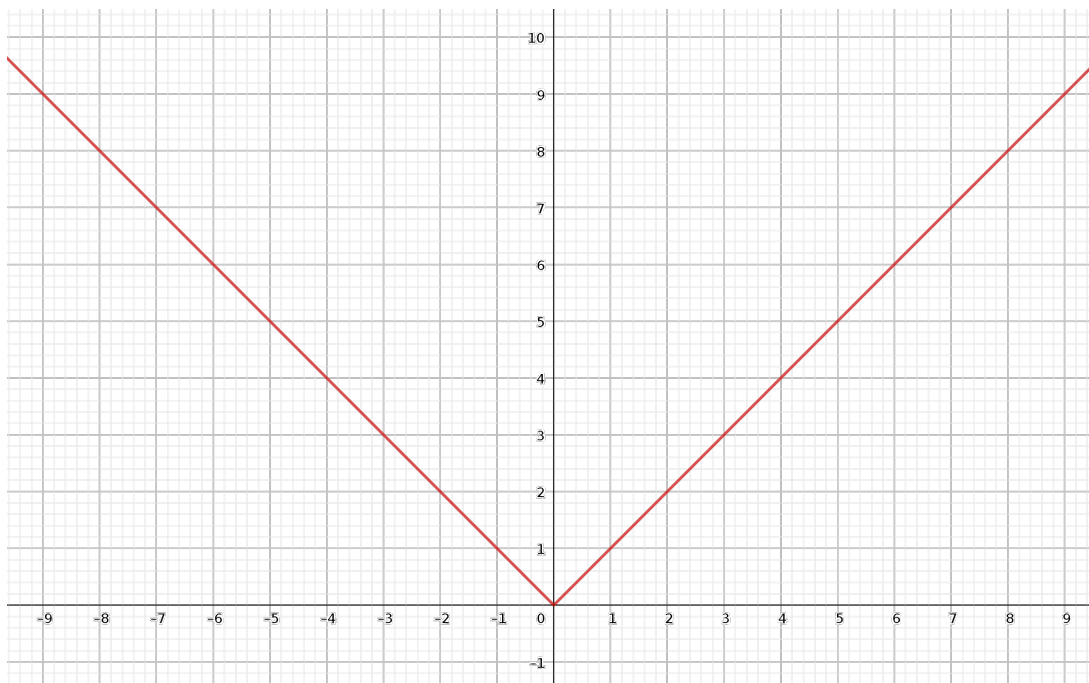
Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Fonction valeur absolue			

Proposition 54. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Démonstration. Laissée en exercice. □

Illustration :



8.5 Fonction racine carrée

Définition 55. On appelle fonction racine carrée la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Remarque. On peut aisément calculer des images et chercher d'éventuels antécédents par la fonction racine carrée.

Proposition 56. *La fonction racine carrée est positive sur $\mathbb{R}_+$.*

Démonstration. Découle directement de la définition de la racine carré d'un nombre positif : c'est l'unique nombre *positif* dont le carré est égal au nombre de départ. $\square$

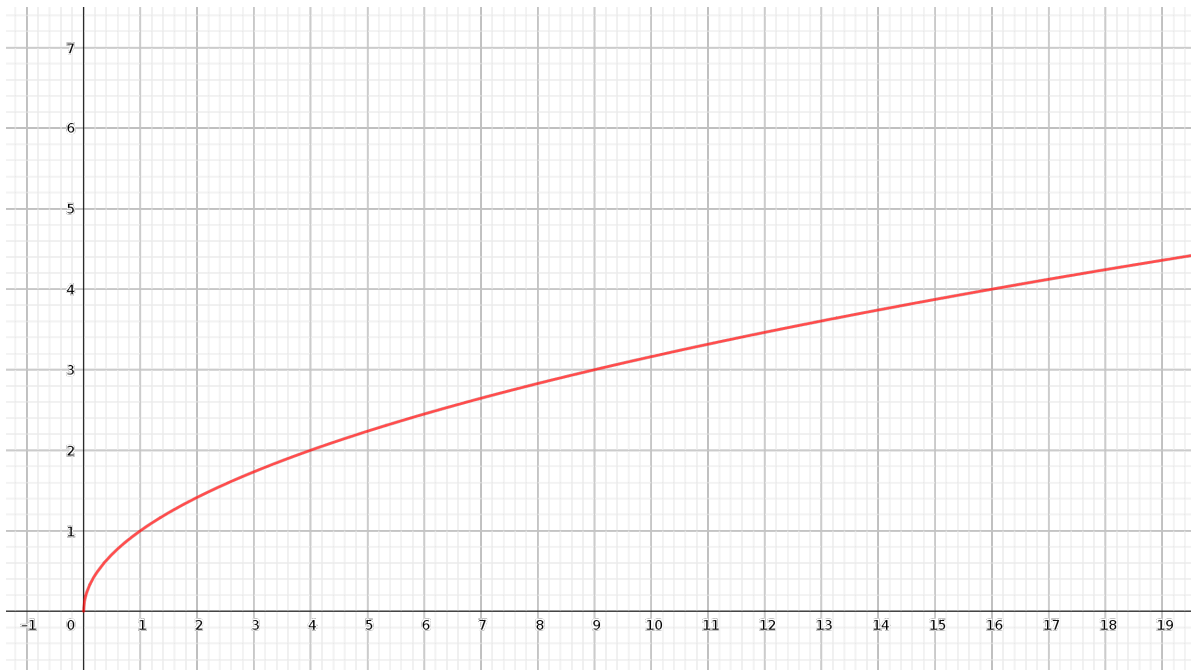
Proposition 57. *La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.*

Démonstration. Soient $x_1, x_2 \in [0; +\infty[$ tels que $x_1 < x_2$. Si $\sqrt{x_1} \leq \sqrt{x_2}$, alors par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, $(\sqrt{x_1})^2 \leq (\sqrt{x_2})^2$, c'est-à-dire : $x_1 \leq x_2$. Ce qui est contradictoire avec l'hypothèse initiale. Donc $\sqrt{x_1} > \sqrt{x_2}$. Ainsi la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. $\square$

Tableau de variation :

x	0	$+\infty$
Fonction racine carrée	0	

Illustration :



Chapitre 9

Géométrie pure dans le plan

La terre, souvent personnifiée, était « Ge » pour les Grecs. La géométrie était d'abord la mesure de la terre. Cependant, dès cette époque, le mot « geometria » désigne à la fois l'arpentage et la géométrie. *Géométrie* est attesté en français dès le *XII^{ème}* siècle avec ces deux sens. Au Moyen-Âge, il désigne avant tout l'étude des figures élémentaires. Avec René Descartes apparaît la géométrie analytique, avec Jean Victor Poncelet et Jakob Steiner la géométrie projective. Les géométries non euclidiennes appelées parfois elliptiques et hyperboliques datent du milieu du *XIX^{ème}* siècle. Le terme *géométrie différentielle* est introduit par Élie Cartan, l'un de ses fondateurs, au début du *XX^{ème}* siècle, suivi de près par *géométrie algébrique*. Plus généralement, le terme de *géométrie* s'applique à toute théorie qui généralise une représentation de l'espace qui nous environne.



René Descartes

(La-Haye 1596 - Stockholm 1650)



Jean Victor Poncelet

(Metz 1788 - Paris 1867)



Élie Cartan

(Dolomieu 1869 - Paris 1951)

9.1 Les transformations du plan

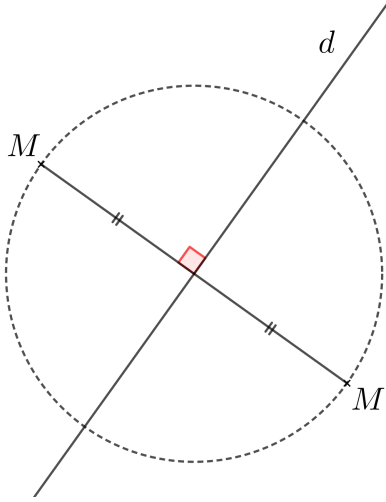
9.1.1 La symétrie axiale

Définition 58. Soient M un point et d une droite du plan. On appelle symétrie axiale d'axe d l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que :

1. Si $M \in d$, alors $M' = M$.
2. Si $M \notin d$, alors d est la médiatrice de $[MM']$.

Notation : Cette transformation du plan se note en général : $s_d : M \mapsto M'$.

Illustration :



Remarque. Pour tout point M du plan, on a : $s_d(s_d(M)) = M$. Autrement dit, la composée de la symétrie axiale d'axe d avec elle-même est l'application identité. On dit que la symétrie axiale d'axe d est involutive.

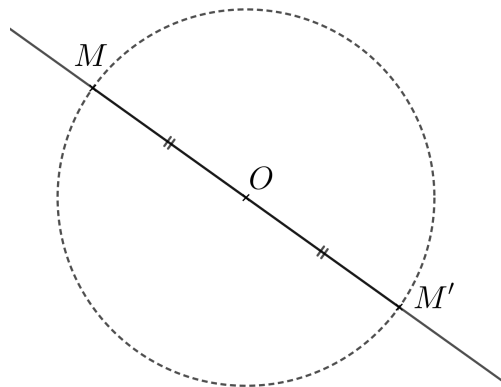
9.1.2 La symétrie centrale

Définition 59. Soient O et M deux points du plan. On appelle symétrie centrale de centre O l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que :

1. Si $M = O$, alors $M' = M$.
2. Si $M \neq O$, alors O est le milieu de $[MM']$.

Notation : Cette transformation du plan se note en général : $s_O : M \mapsto M'$.

Illustration :



Remarque. Pour tout point M du plan, on a : $s_O(s_O(M)) = M$. Autrement dit, la composée de la symétrie centrale de centre O avec elle-même est l'application identité. On dit que la symétrie centrale de centre O est involutive.

9.1.3 La rotation

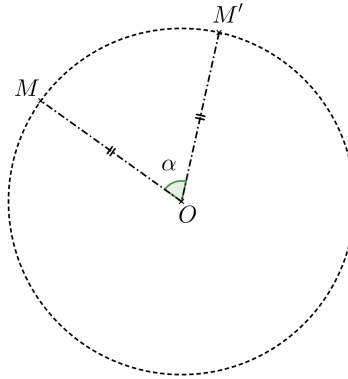
Définition 60. Soient O un point du plan et α un réel. On appelle rotation d'angle α l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que :

1. Si $M = O$, alors $M' = M$.
2. Si $M \neq O$, alors : $OM' = OM$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$.

avec la convention suivante : « Si α est positif, alors on tourne dans le sens antihoraire, et si α est négatif, alors on tourne dans le sens horaire. »

Notation : Cette transformation du plan se note en général : $r_{O;\alpha} : M \mapsto M'$.

Illustration :



Remarque. On peut d'ores et déjà effectuer quelques remarques (à démontrer) :

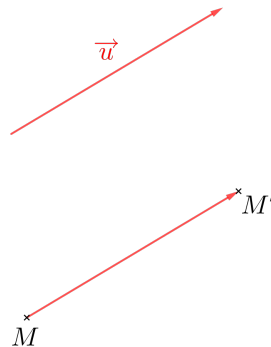
1. Si $M' = r_{O;\alpha}(M)$, alors $M = r_{O;-\alpha}(M')$.
2. S'il existe un entier relatif k tel que $\alpha = 180k$, alors $r_{O;\alpha}$ est la symétrie centrale de centre O .
3. Si $\alpha = 0$, alors tout point du plan est envoyé sur lui-même. $r_{O;\alpha}$ est alors l'application identité.

9.1.4 La translation

Définition 61. Soient $\vec{u}$ un vecteur du plan. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Notation : Cette transformation du plan se note en général : $t_{\vec{u}} : M \mapsto M'$.

Illustration :

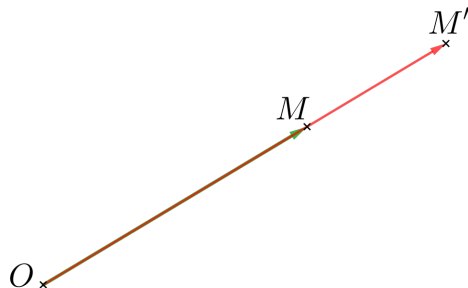


9.1.5 L'homothétie

Définition 62. Soient O un point du plan et k un réel non nul. On appelle homothétie de centre O et de rapport k l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Notation : Cette transformation du plan se note en général : $h_{O;k} : M \mapsto M'$.

Illustration :



Remarque. On peut d'ores et déjà effectuer plusieurs remarques (à démontrer) :

1. Un point, son image par une homothétie et le centre de celle-ci sont toujours alignés.
2. Si le rapport de l'homothétie est égal à 1, alors l'homothétie envoie tout point du plan sur lui-même. $h_{O;1}$ est alors l'application identité.
3. Si $M' = h_{O;k}(M)$, alors $M = h_{O;\frac{1}{k}}(M')$.
4. Si le rapport k pouvait être nul, alors tout point du plan serait envoyé en O . Cette situation n'est pas très intéressante.

9.2 Composée de deux applications

Définition 63. Soient f et g deux applications du plan dans lui-même. Soit M un point du plan. Soient $M' = f(M)$ et $M'' = g(M')$. L'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M'' est appelée la composée de f suivie de g et est notée : $g \circ f$.

Remarque. On peut effectuer remarques :

1. Pour tout point M du plan, on a : $(g \circ f)(M) = g(f(M)) = g(M') = M''$.
2. Attention, a priori il n'existe aucune raison pour que $g \circ f = f \circ g$. Des contre-exemples à la commutativité de la composition d'applications sont étudiés dans la suite.

9.2.1 Composée de deux symétries axiales

Proposition 64. Soient d et d' deux droites du plan.

1. Si $d \parallel d'$, alors $s_{d'} \circ s_d$ est une translation.
2. Sinon, $s_{d'} \circ s_d$ est une rotation.

Démonstration. Laissée en exercice.

□

Remarque. Si $d \perp d'$, alors $s_{d'} \circ s_d$ est une symétrie centrale.

Proposition. *Réciproquement :*

1. Toute translation peut s'écrire comme la composée de deux symétries axiales.
2. Toute rotation s'écrire comme la composée de deux symétries axiales.

Démonstration. Laissée en exercice. □

9.2.2 Composée de deux symétries centrales

Proposition 65. *Soient O et O' deux points distincts du plan. Alors $s_{O'} \circ s_O$ est une translation.*

Démonstration. Laissée en exercice. □

9.2.3 Composée de deux rotations

Proposition 66. *Soient O et O' deux points du plan. Soient α et α' deux réels.*

1. Si $O = O'$, alors $r_{O';\alpha'} \circ r_{O;\alpha}$ est la rotation $r_{O;\alpha+\alpha'}$.
2. Si $O \neq O'$:
 - (a) S'il n'existe pas d'entier relatif k tel que $\alpha + \alpha' = 360k$, alors $r_{O';\alpha'} \circ r_{O;\alpha}$ est une rotation.
 - (b) S'il existe un entier relatif k tel que $\alpha + \alpha' = 360k$, alors $r_{O';\alpha'} \circ r_{O;\alpha}$ est une translation.

Démonstration. Laissée en exercice. □

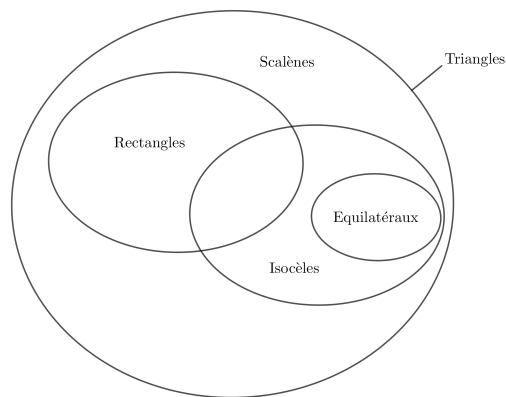
9.2.4 Composée de deux translations

Proposition 67. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.*

Démonstration. Laissée en exercice. □

9.3 Les triangles

Diagramme de Venn :

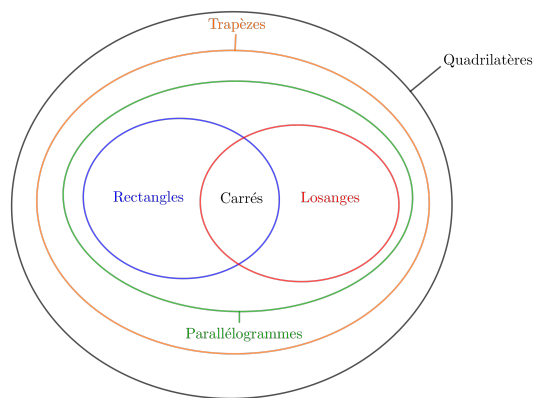


Remarque. Dans une configuration comportant des triangles, nous devons maîtriser les droites remarquables d'un triangle, le théorème de Pythagore, le théorème de Thalès ainsi que l'arsenal trigonométrique.

Exercice. Étude des transformations du plan laissant globalement invariant le triangle équilatéral. Table de Cayley et lien avec les permutations de $\{1; 2; 3\}$.

9.4 Les quadrilatères

Diagramme de Venn :



Remarque. Il est nécessaire de connaître les conditions nécessaires, suffisantes, et nécessaires et suffisantes afin qu'un quadrilatère a priori quelconque devienne un quadrilatère célèbre.

Exemple. Voici trois exemples :

- Pour qu'un quadrilatère soit un rectangle, il est nécessaire que ses diagonales aient la même longueur. Mais cela n'est pas suffisant.
- Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il suffit qu'il soit un losange. Mais cela n'est pas nécessaire.
- Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il est nécessaire et il suffit que ses diagonales soient sécantes en leur milieu.

Exercice. Étude des transformations du plan laissant globalement invariant le carré. Table de Cayley et lien avec les permutations de $\{1; 2; 3; 4\}$.

9.5 Le cercle

Remarque. Dans une configuration comportant un cercle, nous devons maîtriser :

1. Le calcul de sa circonférence : $\mathcal{P} = 2\pi r$, où r est le rayon du cercle.
2. L'égalité des angles inscrits : deux angles inscrits à un même cercle sont de même mesure.
3. La relation entre un angle inscrit et son angle au centre associé : dans un cercle, tout angle inscrit mesure la moitié de la mesure de l'angle au centre qui lui est associé.

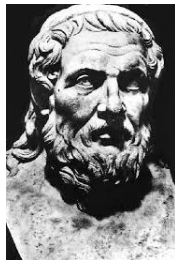
Exercice. Étude des transformations du plan laissant globalement invariant le cercle.

Chapitre 10

Fonctions de référence (2)

Le mot grec « parabôle » signifiait d'abord action de *jeter à côté* de « para », à *côté* et de « ballein », *jeter*. La parabole fût étudiée et peut-être nommée par Apollonius de Perge. « Parabôle » signifiait par extension *mettre en parallèle, ressembler, comparer*. Cette courbe est définie à l'époque comme l'intersection d'un cône avec un plan parallèle à une génératrice. Apollonius la nomme « parabôle » car il la considère en relation avec le cône.

Hyperbole est formé du suffixe *hyper* et du verbe grec « ballein », *lancer*. En grec, « hyperbôle » signifiait *lancer au-dessus, surpasser*. Il est introduit dans son sens mathématique par Apollonius de Perge au *III^{ème}* siècle avant Jésus Christ. Le terme *hyperbole* est réintroduit au milieu du *XVII^{ème}* siècle par Huygens, époque où l'intérêt pour les coniques réapparaît en Occident. Le sens d'exagération utilisé en rhétorique existe dès le *XIII^{ème}* siècle en français.



Apollonius de Perge

(Aksu vers 262 avt J.-C. - Alexandrie vers 190 avt J.-C.)

10.1 Fonction polynôme de degré deux

10.1.1 Différentes formes

Définition 68. On appelle fonction polynôme de degré deux toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On parle aussi de fonction trinôme du second degré.

Vocabulaire : l'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ est appelée la forme développée réduite de la fonction trinôme f . Les réels a, b etc sont appelés des coefficients. La quantité ax^2 est appelée le monôme de degré deux, la quantité bx est appelée le monôme de degré un et la quantité c est appelée le monôme de degré zéro ou encore le coefficient constant.

Remarque. Cette forme développée réduite permet aisément de calculer l'image de zéro : $f(0) = c$.

Proposition 69. Soit f une fonction polynôme de degré deux définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Cette expression de $f(x)$ est appelée la forme canonique de la fonction trinôme f .

Démonstration. Il suffit de factoriser $f(x) = ax^2 + bx + c$. □

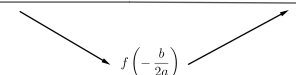
Vocabulaire : le nombre $b^2 - 4ac$ joue un rôle prépondérant dans l'étude de f comme nous le verrons en classe de Première. Il est appelé le discriminant de la fonction trinôme f .

Exemple. Déterminer la forme canonique de la fonction trinôme f définie par $f(x) = 4x^2 + 24x - 16$.

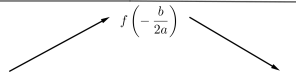
Remarque. Le grand intérêt de la forme canonique est de pouvoir dresser le tableau de variations de la fonction trinôme.

Proposition 70. Soit f une fonction polynôme de degré deux définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

1. Si $a > 0$, alors :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f			

2. Si $a < 0$, alors :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f			

Démonstration. 1. On suppose $a > 0$. Démontrons que f est strictement décroissante sur $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$ puis strictement croissante sur $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$.

2. Laissée en exercice. □

Exemple. Dresser le tableau de variations de la fonction trinôme f définie par $f(x) = 3x^2 + 9x - 30$.

Proposition 71. Soit f une fonction polynôme de degré deux définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

1. Si $b^2 - 4ac > 0$, alors il existe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
2. Si $b^2 - 4ac = 0$, alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x - x_0)^2$.
3. Si $b^2 - 4ac < 0$, alors on ne peut factoriser $f(x)$.

Démonstration. On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$.

Si $b^2 - 4ac > 0$, alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, f(x) &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right) - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \right] \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right) + \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \right] \\ &= a(x - x_1)(x - x_2)\end{aligned}$$

où $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Si $b^2 - 4ac = 0$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \right] = a(x - x_0)^2$ où $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Si $b^2 - 4ac < 0$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$. Or : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$. Donc $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$. $\square$

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Dans le cas où le discriminant $b^2 - 4ac$ est strictement positif, l'équation $f(x) = 0$ est donc équivalente à : $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Ainsi, cette équation admet deux solutions réelles distinctes : x_1 et x_2 .
2. Dans le cas où le discriminant $b^2 - 4ac$ est nul, l'équation $f(x) = 0$ est donc équivalente à : $a(x - x_0)^2 = 0$. Ainsi, cette équation admet une unique solution réelle : x_0 .
3. Dans le cas où le discriminant $b^2 - 4ac$ est strictement négatif, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle.
4. Dans le cas où le discriminant $b^2 - 4ac$ est strictement positif, on remarquera que :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

5. La forme factorisée, lorsqu'elle existe, nous permet aisément de dresser le tableau de signes de la fonction trinôme.

Proposition 72. Soit f une fonction polynôme de degré deux définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

1. Si $b^2 - 4ac > 0$, alors :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a

2. Si $b^2 - 4ac = 0$, alors :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

3. Si $b^2 - 4ac < 0$, alors :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	

Démonstration. 1. Supposons $b^2 - 4ac > 0$. Alors il existe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$. Pour fixer les idées, supposons $x_1 < x_2$.

Si $x < x_1$, alors $x - x_1 < 0$ et $x - x_2 < 0$. Donc $f(x)$ est du signe de a .

Si $x > x_1$ et $x < x_2$, alors $x - x_1 > 0$ et $x - x_2 < 0$. Donc $f(x)$ est du signe contraire de a .

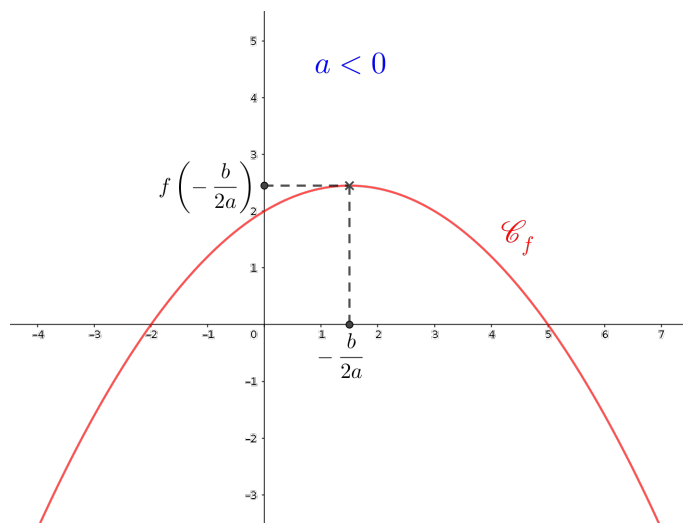
Si $x > x_1$ et $x > x_2$, alors $x - x_1 > 0$ et $x - x_2 > 0$. Donc $f(x)$ est du signe de a . D'où le résultat.

2. et 3. Laissées en exercice. □

10.1.2 Courbe représentative

Définition 73. Soit $(O; I, J)$ un repère orthogonal du plan. La courbe représentative d'une fonction trinôme est appelée une parabole.

Illustration :



Exercice. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction trinôme f définie par $f(x) = 3x^2 + 9x - 30$.

Proposition 74. Soit $(O; I, J)$ un repère orthogonal du plan. Soit f une fonction polynôme de degré deux définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Alors la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ est un axe de symétrie de la parabole représentant f .

Démonstration. Soit $h \in \mathbb{R}_+$. Il suffit de démontrer que $f(-\frac{b}{2a} + h) = f(-\frac{b}{2a} - h)$. □

Exercice. Soit f la fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.

1. Calculer l'image de 0 par f .
2. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. Déterminer les antécédents de 0 par f .
5. Dresser le tableau de signes de f .
6. Tracer une allure de la courbe représentative de f dans un repère du plan.

10.2 Fonction homographique

10.2.1 Étude générale

Définition 75. On appelle fonction homographique toute fonction h définie par $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

Exemple. La fonction inverse $i : x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction homographique particulière : $a = 0, b = 1, c = 1$ et $d = 0$.

Remarque. On peut d'ores et déjà effectuer plusieurs remarques :

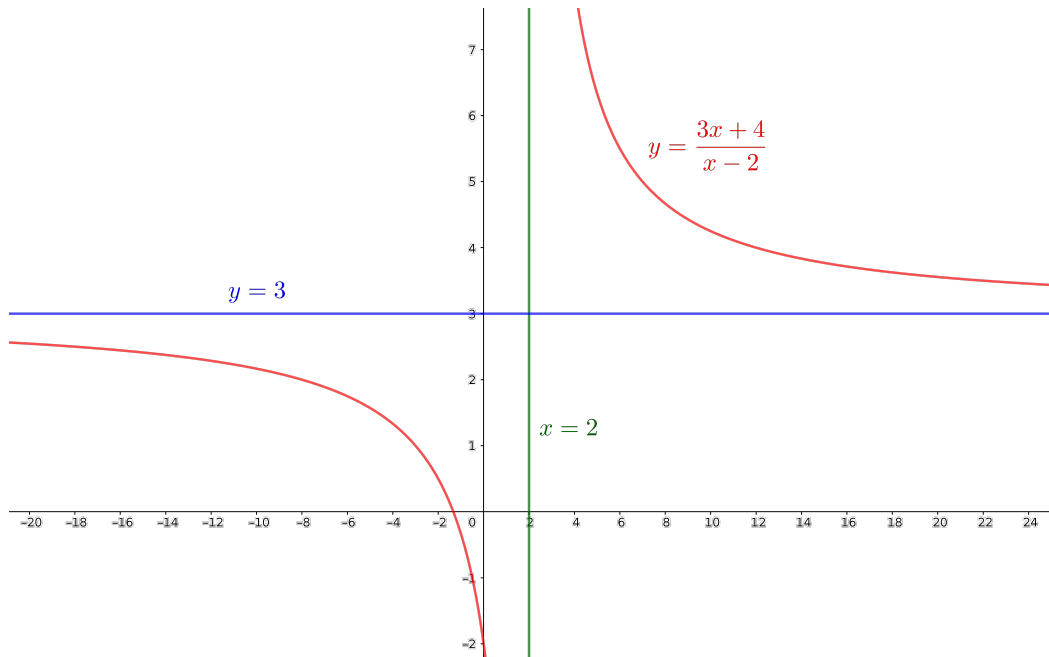
1. La fonction homographique h est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.
2. Si $c = 0$ et $d \neq 0$, alors la fonction h est affine sur $\mathbb{R}$.
3. Si $ad - bc = 0$, alors la fonction h est constante sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.
4. Lorsque $d \neq 0$, il est aisé de déterminer l'image de 0 par $h : h(0) = \frac{b}{d}$.
5. Il est aisé de déterminer les antécédents de 0, ce sont les solutions de l'équation $ax + b = 0$, c'est-à-dire : $-\frac{b}{a}$.
6. Pour dresser le tableau de variations de h , on pourra écrire $h(x)$ sous sa forme canonique : $h(x) = \frac{\alpha}{cx+d} + \beta$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, puis étudier les variations de $x \mapsto \frac{\alpha}{cx+d}$.
7. On peut voir une fonction homographique comme le quotient de deux fonctions affines ce qui permet de dresser le tableau de signes d'une fonction homographique.

Exercice. Dresser le tableau de signes de la fonction homographique h définie par $h(x) = \frac{3x-5}{-2x+1}$.

10.2.2 Courbe représentative

Définition 76. Soit $(O; I, J)$ un repère du plan. La courbe représentative d'une fonction homographique est appelée une hyperbole.

Illustration :



Remarque. La fonction inverse étant une fonction homographique, il n'est pas étonnant de retrouver le nom de sa courbe représentative pour l'ensemble des fonctions homographiques.

Exercice. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction homographique h définie par $h(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.

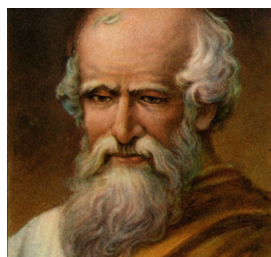
Remarque. Voici deux remarques :

1. Lorsque x s'approche de la valeur interdite $-\frac{d}{c}$, le dénominateur $cx + d$ tend vers 0, le numérateur lui tend vers b et par conséquent, l'image $h(x)$ tend elle vers $\pm\infty$. On dit alors que la droite d'équation $x = -\frac{d}{c}$ est une asymptote « verticale » à la courbe représentative de h .
2. Lorsque x devient de plus en plus grand ou de plus en plus petit, l'image $h(x)$ tend vers $\frac{a}{c}$. On dit que la droite d'équation $y = \frac{a}{c}$ est une asymptote « horizontale » la courbe représentative de h .

Chapitre 11

Géométrie pure dans l'espace

Du latin « spatium » signifiant *espace libre*, le mot *espace* est introduit en français médiéval avec un sens temporel. Vers le *XIV^{ème}* siècle il se met à désigner l'espacement sur une droite. Cette connotation est conservée lorsqu'on parle de l'espace entre deux objets. Au *XVI^{ème}* siècle le mot prend sa troisième dimension et désigne l'espace qui nous environne. Descartes l'utilise alors naturellement dans son sens scientifique. Vers 1600, sous l'impulsion de Kepler, l'étude rigoureuse de l'astronomie accentue l'idée de la notion d'espace. On utilise le mot pour désigner en géométrie l'espace de dimension 3. Maurice Fréchet introduit en 1906 la notion d'espace abstrait et l'on voit bientôt naître les espaces topologiques, vectoriels, normés.



Archimède

(Syracuse 287 avt J.-C. - Syracuse 212 avt J.-C.)



Maurice Fréchet

(Maligny 1878 - Paris 1973)

11.1 Positions relatives de droites et de plans dans l'espace

Pour les besoins de ce chapitre, nous partirons des axiomes suivants :

Axiomes. Voici les axiomes sur lesquels nous nous reposerons :

1. Par deux points distincts A et B de l'espace, il passe une unique droite notée (AB) .
2. Par trois points non alignés A , B et C de l'espace, il passe un unique plan noté (ABC) .
3. Si A et B sont deux points distincts d'un plan, alors ce plan contient la droite (AB) .
4. Tout plan $\mathcal{P}$ partage l'espace en deux demi-espaces $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ non vides tels que :
 - (a) $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{P}$ sont deux à deux disjoints ;
 - (b) L'espace est la réunion de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{P}$;
 - (c) Si A et B sont deux points de $\mathcal{E}_1$, alors $[AB]$ est inclus dans $\mathcal{E}_1$;
 - (d) Si A et B sont deux points de $\mathcal{E}_2$, alors $[AB]$ est inclus dans $\mathcal{E}_2$;
 - (e) Si A et B sont deux points appartenant respectivement à $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, alors $[AB]$ et $\mathcal{P}$ ont un unique point d'intersection.
5. Les grands théorèmes de géométrie plane sont vrais dans tout plan de l'espace.

Proposition 77. Soit d une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Les différentes position relatives sont :

1. d est incluse dans $\mathcal{P}$.
2. L'intersection de d et $\mathcal{P}$ est réduite à un point.
3. d et $\mathcal{P}$ sont disjoints.

Démonstration. Supposons 2. et 3. non réalisés. Alors d et $\mathcal{P}$ ont en commun deux points distincts A et B . D'après l'axiome 1, les droites d et (AB) sont confondues et, d'après l'axiome 3, d est incluse dans $\mathcal{P}$. $\square$

Définition 78. Une droite est dite parallèle à un plan lorsque celle-ci est incluse dans ce plan ou lorsque cette droite et ce plan sont disjoints. Un plan est dit sécant à une droite en un point I lorsque l'intersection de cette droite et de ce plan est réduite à I .

Proposition 79. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux plans de l'espace. Les différentes positions relatives sont :

1. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont confondus.
2. L'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est une droite.
3. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont disjoints.

Démonstration. Admise. $\square$

Définition 80. Deux plans sont dits parallèles s'ils sont confondus ou disjoints. Deux plans non parallèles sont dits sécants, leur intersection est alors une droite.

Proposition 81. Deux droites non coplanaires sont disjointes.

Démonstration. Soient d et d' deux droites non coplanaires. Démontrons que d et d' sont disjointes. Raisonnons par l'absurde et supposons que d et d' ont un point commun I . Si d et d' ont un autre point commun J , alors d et d' sont confondues d'après l'axiome 1 et a fortiori coplanaires. Si I est l'unique point commun à d et d' .

Soient J et K deux points, distincts de I , appartenant respectivement à d et d' . D'après l'axiome 1, I , J et K ne sont pas alignés. D'après l'axiome 2, I , J et K définissent un plan. D'après l'axiome 3, d et d' sont incluses dans (IJK) et sont donc coplanaires. $\square$

Définition 82. Deux droites sont dites parallèles lorsqu'elles sont confondues ou coplanaires disjointes. Deux droites sont dites sécantes lorsque leur intersection est réduite à un point.

Proposition 83. Voici quatre manières de déterminer un plan :

1. Il existe un unique plan contenant trois points non alignés.
2. Il existe un unique plan contenant une droite et un point extérieur à cette droite.
3. Il existe un unique plan contenant deux droites sécantes.
4. Il existe un unique plan contenant deux droites strictement parallèles.

Démonstration. 1. C'est l'axiome 2.

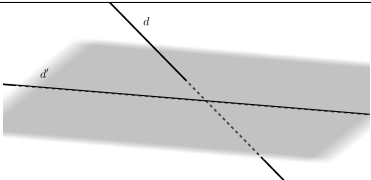
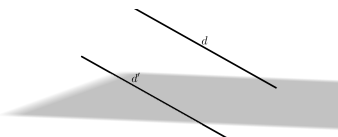
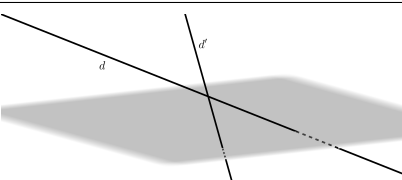
2. Deux points distincts de la droite et le point extérieur définissent un unique plan d'après l'axiome 2. Ce plan contient bien la droite d'après l'axiome 3.

3. On se ramène au cas précédent en choisissant sur l'une des droites un point extérieur à l'autre.

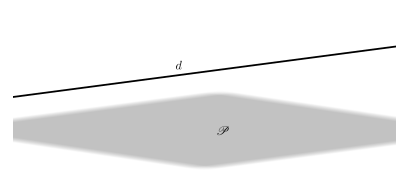
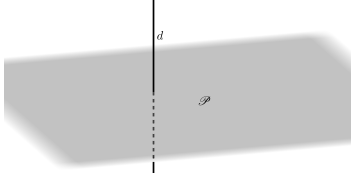
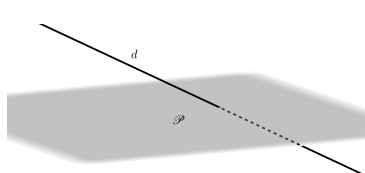
4. Résulte de la définition du parallélisme de deux droites et de 2. $\square$

Remarque. Voici un résumé des différentes positions relatives entre droites et plans dans l'espace :

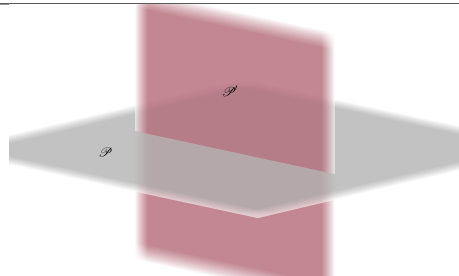
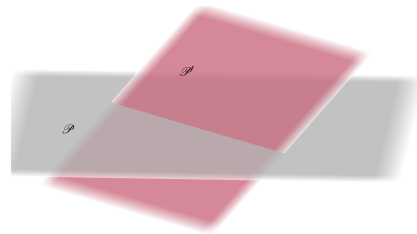
1. Soient d et d' deux droites de l'espace. On a :

d et d' non coplanaires	d et d' coplanaires	
	d et d' parallèles	d et d' sécantes
		

2. Soient d une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. On a :

d et $\mathcal{P}$ parallèles	d et $\mathcal{P}$ non parallèles	
	d et $\mathcal{P}$ orthogonaux	d et $\mathcal{P}$ non orthogonaux
		

3. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de l'espace. On a :

$\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}$ parallèles	$\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}$ non parallèles	
	$\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}$ perpendiculaires	$\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}$ non perpendiculaires
		

11.2 Étude du parallélisme

11.2.1 Parallélisme de deux droites

Proposition 84. *Par un point donné de l'espace, il passe une unique droite parallèle à une droite donnée.*

Démonstration. Soient A un point et d une droite de l'espace. Par définition, deux droites parallèles qui ont un point commun sont confondues, donc si $A \in d$, alors d est l'unique droite de l'espace passant par A et parallèle à d .

Si $A \notin d$, alors il existe un unique plan contenant A et d . Toute droite passant par A et parallèle à d sera contenue dans $\mathcal{P}$. Dans le plan $\mathcal{P}$, d'après l'axiome 5, on peut appliquer la propriété suivante : il existe une unique droite passant par A et parallèle à d . $\square$

Proposition 85. *Si deux droites sont parallèles, alors tout plan coupant l'une coupe l'autre.*

Démonstration. Admise. $\square$

Proposition 86. *Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles.*

Démonstration. Soient d_1 , d_2 et d_3 trois droites de l'espace telles que $d_1 \parallel d_3$ et $d_2 \parallel d_3$. Démontrons que $d_1 \parallel d_2$. Si deux des trois droites sont confondues, alors le résultat est évident.

Supposons à présent d_1 , d_2 et d_3 deux à deux distinctes. Soit A un point quelconque de d_2 . Soit $\mathcal{P}$ l'unique plan contenant A et d_1 .

D'après la proposition précédente, si $\mathcal{P}$ coupe d_2 alors $\mathcal{P}$ coupe d_3 et d_1 . Ainsi, on en déduit que d_1 et d_2 sont coplanaires. Enfin, si d_1 et d_2 étaient sécantes dans $\mathcal{P}$, alors on n'aurait pas unicité de la parallèle à une droite donnée passant par un point donné. $\square$

11.2.2 Parallélisme d'une droite et d'un plan

Proposition 87. *Soient d une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. d et $\mathcal{P}$ sont parallèles si, et seulement si, il existe dans $\mathcal{P}$ une droite parallèle à d .*

Démonstration. Si d est incluse dans $\mathcal{P}$, alors c'est évident.

Supposons à présent que d ne soit pas incluse dans $\mathcal{P}$.

$\Leftarrow$: supposons que $\mathcal{P}$ contient une droite Δ parallèle à d . Démontrons que d est parallèle à $\mathcal{P}$.

Le plan $\mathcal{P}'$ contenant d et Δ est sécant à $\mathcal{P}$ et l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est la droite Δ .

Ainsi, si d et $\mathcal{P}$ avaient un point commun, alors celui-ci appartiendrait à Δ . Mais alors d et Δ ne seraient pas parallèles !

$\Rightarrow$: supposons d parallèle à $\mathcal{P}$. Démontrons que $\mathcal{P}$ contient une droite Δ parallèle à d .

Soit A un point quelconque de $\mathcal{P}$. Soit $\mathcal{P}'$ le plan contenant d et A . Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants. Soit Δ leur droite d'intersection. On montre que d et Δ sont disjointes. $\square$

Proposition 88. *Soient d une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Si d est parallèle à $\mathcal{P}$, alors toute droite parallèle à d est parallèle à $\mathcal{P}$.*

Démonstration. Soit d' une droite parallèle à d . D'après la proposition précédente, le plan $\mathcal{P}$ contient une droite Δ parallèle à d . D'après une proposition précédente, Δ est parallèle à d' . Enfin, d'après la proposition précédente, d' est parallèle à $\mathcal{P}$. $\square$

Remarque. La réciproque est fausse. Deux droites parallèles à un plan ne sont pas nécessairement parallèles.

Proposition 89. *Une droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur droite d'intersection.*

Démonstration. Soit d une droite parallèle à deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sécants la droite Δ . Démontrons que d est parallèle à Δ . Soit $a \in \Delta$. La droite parallèle à d passant par A est incluse dans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Il s'agit donc de Δ . Ainsi, d est parallèle à Δ . $\square$

11.2.3 Parallélisme de deux plans

Proposition 90. *Deux plans sont parallèles si, et seulement si, l'un contient deux droites parallèles à l'autre et sécantes entre elles.*

Démonstration. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus, alors c'est évident. Supposons dorénavant $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ distincts.

$\Rightarrow$: si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles, alors on démontre que deux droites sécantes quelconques de $\mathcal{P}$ sont parallèles à $\mathcal{P}'$.

$\Leftarrow$: si $\mathcal{P}$ contient deux droites sécantes entre elles et parallèles à $\mathcal{P}'$, alors on raisonne par l'absurde. Supposons que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite d' puis l'on démontre que les deux droites sécantes sont parallèles à d' . $\square$

Proposition 91. *Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.*

Démonstration. Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ deux plans parallèles à un plan $\mathcal{P}''$. Soient d et Δ deux droites incluses dans $\mathcal{P}''$. Démontrons que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles. Raisonnons par l'absurde. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ étaient sécants, alors les droites d et Δ seraient parallèles à la droite d'intersection de ces deux plans. D'où la contradiction avec le fait qu'elles sont sécantes. $\square$

Proposition 92. *Par un point donné de l'espace, il passe un unique plan parallèle à un plan donné.*

Démonstration. Soient $\mathcal{P}$ un plan et A un point de l'espace. Soient d et Δ deux droites incluses dans $\mathcal{P}$. Soient d' et Δ' les droites respectivement parallèles à d et Δ et passant par A . d' et Δ' sont sécantes en A . Le plan $\mathcal{P}'$ déterminé par les droites d' et Δ' contient A et deux droites sécantes parallèles à $\mathcal{P}$. Donc $\mathcal{P}'$ est parallèle à $\mathcal{P}$. Il reste à démontrer que $\mathcal{P}'$ est unique. Soit $\mathcal{P}''$ un plan passant par A et parallèle à $\mathcal{P}$. $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ sont parallèles d'après la proposition précédente. Ayant A en commun, ils sont confondus. Ainsi $\mathcal{P}'$ est unique. $\square$

Proposition 93. *Si deux plans sont parallèles, alors :*

1. *Tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.*
2. *Toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre.*
3. *Toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre.*

Démonstration. Laissée en exercice. □

11.3 Solides usuels

Il existe trois grandes familles deux à deux disjointes de solides :

1. La famille des pyramides. Exemples : tétraèdre - tétraèdre régulier - pyramide à base carrée.
 - (a) *Perspective cavalière.*
 - (b) *Patron.*
 - (c) *Aire : $\mathcal{A} = \text{Somme des aires des faces.}$*
 - (d) *Volume : $\mathcal{V} = \frac{(\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur})}{3}$.*
2. La famille des cylindres. Exemples : quelconque - un prisme - à base circulaire - prisme droit - cylindre de révolution.
 - (a) *Perspective cavalière.*
 - (b) *Patron.*
 - (c) *Aire : $\mathcal{A} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h)$, où r est le rayon et h la hauteur du cylindre de révolution.*
 - (d) *Volume : $\mathcal{V} = \pi r^2 h$, où r est le rayon et h la hauteur du cylindre de révolution.*
3. Sphère - boule. Distinction sphère - boule.
 - (a) *Perspective cavalière.*
 - (b) *Patron inexistant.*
 - (c) *Aire de la sphère : $\mathcal{A} = 4\pi r^2$, où r est le rayon de la sphère.*
 - (d) *Volume de la boule : $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$, où r est le rayon de la sphère.*

Chapitre 12

Équations - Inéquations

Pour les Romains, « aequatio » signifiait *égalisation, répartition égale*. Le latin médiéval utilise le mot *équation* dans le sens d'égalité. Descartes, le premier en 1637 utilise ce mot dans son acception mathématique actuelle. Son sens ne change plus depuis, même si les termes de l'équation considérée se diversifient dans leur nature. Dans une équation différentielle, par exemple, ce sont des fonctions. Le verbe latin « resolvere », *dénouer, délier* est introduit en ancien français sous la forme *résoudre*. Il signifiait *se décomposer*, c'est-à-dire passer d'un état à un état plus simple, puis dès le *XV^{ème}* siècle *élucider*. Cependant ce n'est que deux siècles plus tard qu'on résout une inéquation, soit par retour au sens latin *dénouer* soit par l'analogie entre la décomposition en petits morceaux et la démarche intellectuelle qui consiste à disséquer un problème pour le résoudre.



Jean Le Rond d'Alembert
(Paris 1717 - Paris 1783)



Niels Henrik Abel
(Frindø 1802 - Froland 1829)



Augustin Louis Cauchy
(Paris 1789 - Sceaux 1857)

12.1 Équations

Définition 94. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions définies sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'égalité $f(x) = g(x)$ est appelée une équation d'inconnue x . Tout élément α de A vérifiant $f(\alpha) = g(\alpha)$ est appelé une solution de cette équation. Résoudre cette équation consiste à rechercher l'ensemble des éléments de A qui sont solutions.

Exemple. 1 est solution de l'équation $3x^2 - \frac{1}{x} = \sqrt{x+3}$. En revanche -5 n'est pas solution de l'équation $\frac{4-x}{\sqrt{x}} = x^3$.

Remarque. On peut d'ores et déjà effectuer plusieurs remarques :

1. Le nom utilisé pour l'inconnue est sans importance : les équations $f(x) = g(x)$ et $f(t) = g(t)$ ont les mêmes solutions.
2. Il est nécessaire de déterminer le domaine de résolution A avant de résoudre l'équation.
3. Il est possible que l'on ne recherche que les solutions entières d'une équation, on dit alors que l'on résout l'équation sur $\mathbb{Z}$.

4. Une équation peut posséder une solution, 1 789 solutions, ou encore une infinité de solutions.
Exemples : l'équation $(x - 1)(x - 2) \dots (x - 1788)(x - 1789) = 0$ admet exactement 1 789 solutions.
L'équation $x^2 + 4x + 2 = (x + 2)^2$ admet une infinité de solutions.
5. Une équation peut posséder autant d'inconnues que nécessaire.
Exemple : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ admet trois inconnus.

Vocabulaire :

1. Si f et g sont des polynômes, alors l'équation $f(x) = g(x)$ est dite polynomiale.
2. On appelle degré d'une équation polynomiale la plus grande puissance de l'inconnue affectée d'un coefficient non nul.

Exercice. Résoudre les équations suivantes :

$3(2 - 7x) = 4 - (2x + 1)$	$4 + \frac{2x+1}{2} = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$	$(3x - 1)(2 + 3x) = (3x - 5)^2$
$4x - \frac{5x+6}{6} = \frac{3x-2}{18} - \frac{x}{3}$	$(5 - 3x)(2x - 5) = 0$	$6(2x - 4)(4x - 7) = 0$
$(3 - 7x)(4x + 4)(6x + 10) = 0$	$16x^2 - 80x + 100 = 0$	$100x^2 - 36 = 0$
$(x - 4)^2 = 64$	$(7x + 1)^2 = (4x - 8)^2$	$9 - 4x^2 - (5 - x)(3 - 2x) = 0$
$\frac{2x-1}{4x+1} = 0$	$\frac{(x-1)(5+x)}{2x+9} = 0$	$\frac{x^2-2x+1}{x-7} = 0$
$\frac{x-1}{x+6} - 3 = 0$	$\frac{5}{2-5x} = \frac{4}{1-x}$	$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{5x}{x^2-4}$

Remarque. On peut effectuer deux remarques importantes :

1. On résout tant que possible une équation par équivalences. Si l'on doit briser une équivalence pour n'en faire qu'une implication, alors les nombres trouvés en fin de manipulation ne sont que des « candidats » pour devenir solutions de l'équation. Il reste donc à tester si ces candidats sont effectivement solutions de l'équation.
2. Lorsque les méthodes de résolutions algébriques échouent, il est encore possible d'effectuer une résolution géométrique de celle-ci. L'inconvénient est alors l'inexactitude des solutions trouvées.

Exercice. Résoudre géométriquement l'équation : $x - \frac{10}{x+1} = 0$.

Remarque. L'algorithme de dichotomie permet cependant d'obtenir une valeur approchée avec la précision souhaitée de toute solution de l'équation. Supposons que l'on désire résoudre l'équation $f(x) = 0$. On entre au préalable la fonction f dans l'ordinateur puis on implémente l'algorithme suivant :

```

Variables :
Réels :  $p, a, b, m$ 
Début :
Saisir  $p, a, b$ 
Tant que  $b - a > p$  faire
     $m \leftarrow \frac{a+b}{2}$ 
    Si  $f(m) \times f(b) > 0$  alors
         $b \leftarrow m$ 
    Sinon
         $a \leftarrow m$ 
Afficher  $\frac{a+b}{2}$ 

```

12.2 Inéquations

Définition 95. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions définies sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les inégalités $f(x) \leq g(x)$ et $f(x) < g(x)$ sont appelées des inéquations d'inconnue x . Tout élément α de A vérifiant $f(\alpha) \leq g(\alpha)$, respectivement $f(\alpha) < g(\alpha)$, est appelé une solution de cette inéquation. Résoudre cette inéquation consiste à rechercher l'ensemble des éléments de A qui sont solutions.

Exemple. $\sqrt{5}$ est solution de l'inéquation $3x^2 + 1 > 7$. En revanche $-\frac{2}{5}$ n'est pas solution de l'inéquation $-\frac{5}{x} + 1 > 14$.

Remarque. On peut d'ores et déjà effectuer plusieurs remarques :

1. Le nom utilisé pour l'inconnue est sans importance : les inéquations $f(x) \leq g(x)$ et $f(t) \leq g(t)$ ont les mêmes solutions.
2. Il est nécessaire de déterminer le domaine de résolution A avant de résoudre l'inéquation.
3. Il est possible que l'on ne recherche que les solutions entières d'une inéquation, on dit alors que l'on résout l'inéquation sur $\mathbb{Z}$.
4. Une inéquation peut ne posséder aucune solution, une solution, 1789 solutions, ou encore une infinité de solutions.
5. Une inéquation peut posséder autant d'inconnues que nécessaire.

Vocabulaire :

1. Si f et g sont des polynômes, alors l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ est dite polynomiale.
2. On appelle degré d'une inéquation polynomiale la plus grande puissance de l'inconnue affectée d'un coefficient non nul.

Exercice. Résoudre les inéquations suivantes :

$7 - 3x \geq 4$	$1, 6x - 3, 2 > 2, 3x - 1$	$2x - (3x + 4) \geq 8x - 7$
$6(3x - 5) < 9 - 3(1 - 2x)$	$\frac{3}{2}x + 5 \geq \frac{1}{3}x + 2$	$\sqrt{3}(x - 2\sqrt{3}) \geq \sqrt{12}$
$(x + 2)(4x - 1) \geq 0$	$\frac{1}{-3x+1} < 0$	$\frac{9-10x}{-9x-5} > 0$
$\frac{9-8x}{-8x-10} > 5$	$(5 - 7x)(8 - 6x)(5 - 3x) > 0$	$(2 + x)^2 - (8x - 1)(2 + x) \leq 0$
$(2 + x)^2 - (8x - 1)(2 + x) > 6$	$16 - x^2 - (4 - x)(8 - 3x) \geq 0$	$(3x + 2)^2 < (x + 1)^2$
$\frac{x-2}{x+7} - 3 \leq 0$	$\frac{3x-1}{x^2-1} \geq \frac{2}{x+1}$	$\frac{x^3}{x^2-2} \leq 1$

Remarque. On peut effectuer deux remarques importantes :

1. On résout tant que possible une inéquation par équivalences. Si l'on doit briser une équivalence pour n'en faire qu'une implication, alors les nombres trouvés en fin de manipulation ne sont que des « candidats » pour devenir solutions de l'inéquation. Il reste donc à tester si ces candidats sont effectivement solutions de l'inéquation.
2. Lorsque les méthodes de résolutions algébriques échouent, il est encore possible d'effectuer une résolution géométrique de celle-ci. L'inconvénient est alors l'inexactitude des solutions trouvées.

Exercice. Résoudre géométriquement l'inéquation : $3x^2 - 7x + 1 > 0$.

Chapitre 13

Trigonométrie

Le mot *trigone*, formé sur le grec « trigônon » apparaît au $XIV^{ème}$ siècle. Il est formé du préfixe gréco-latin « tri » et de la racine grecque « gonia » qui désigne un angle. Il concurrence le mot *triangle*. L'usage retient rapidement ce dernier et *trigone* disparaît dans ce sens. Il n'est conservé qu'en astrologie. C'est pourtant sur celui-ci que le mathématicien allemand Pitiscus crée en 1595 le mot latin « trigonometria ». Le second élément provient du grec « metron », *mesurer*. Le mot francisé *trigonométrie* est attesté en 1613 et l'adjectif *trigonométrique* en 1718.



Al-Kashi

(Kashan 1380 - Samarcande 1429)



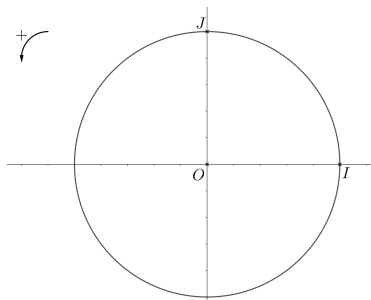
Batholomäus Pitiscus

(Grünberg 1561 - Heidelberg 1613)

13.1 Le cercle trigonométrique

Définition 96. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1, sur lequel on choisit une orientation : le sens direct (positif ou encore trigonométrique) est contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre ; le sens indirect (négatif ou encore antitrigonométrique) est le sens de rotation des aiguilles d'une montre.

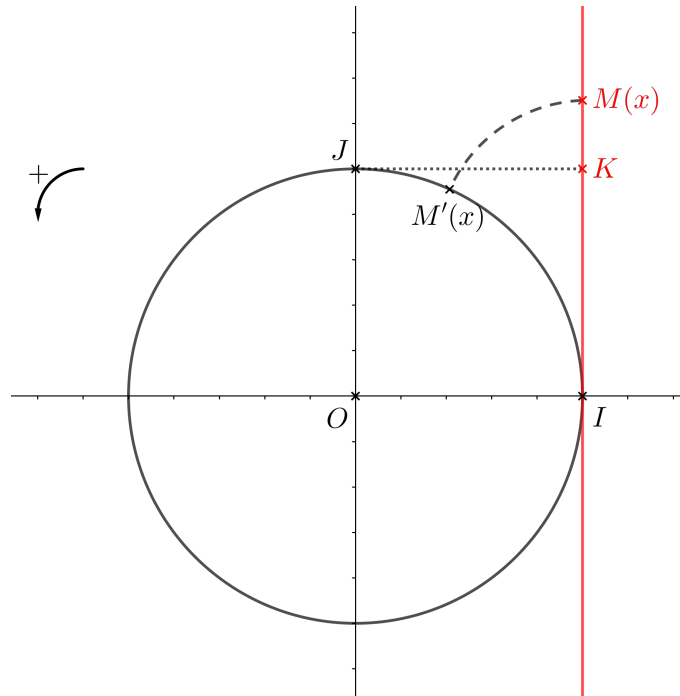
Illustration :



Remarque. On peut d'ores et déjà effectuer trois remarques :

1. La circonférence du cercle trigonométrique est 2π .
2. Pour repérer un point M' du cercle trigonométrique, on « enroule » autour du cercle un axe orienté, gradué, d'origine le point I . On peut alors associer au point M' , le réel x , abscisse d'un point M de l'axe qui vient se superposer au point M' . Le réel x est appelé l'abscisse curviligne du point M' . On note $M'(x)$.
3. Il ne faut pas confondre l'abscisse curviligne de M' avec l'abscisse de M' dans le repère orthonormé $(O; I, J)$.

Illustration :



Remarque. A tout point M de l'axe d'enroulement est associé un unique point M' du cercle trigonométrique. A tout point M' du cercle trigonométrique est associée une infinité de points de l'axe d'enroulement. En effet, il suffit d'ajouter un multiple de 2π pour aboutir au même point du cercle après enroulement. On peut faire ici l'analogie entre l'application « enroulement » et la fonction carrée : tout réel admet une unique image par la fonction carrée mais un réel donné peut admettre plusieurs antécédents par la fonction carrée.

L'application « enroulement » f est dite surjective : $\forall M' \in \mathcal{C}(O; 1), \exists M \in (IK), f(M) = M'$.

L'application « enroulement » f est dite non injective : $\exists M, N \in (IK), M \neq N$ et $f(M) = f(N)$.

Exemple. Plaçons les points du cercle trigonométrique d'abscisses curvilineuses : $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}$ à la règle et au compas.

Exercice. Donner une autre abscisse curviligne pour chacun des points précédents. Notation : $\frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Remarque. L'abscisse curviligne nous permet alors de mesurer un angle. En effet, dire que le point M' a pour abscisse curviligne $\frac{\pi}{3}$ signifie qu'une ficelle de longueur $\frac{\pi}{3}$ permet d'obtenir un angle $\widehat{IOM'}$ valant $\frac{\pi}{3}$. Cette nouvelle unité de mesure des angles est appelée le radian. On a les égalités suivantes :

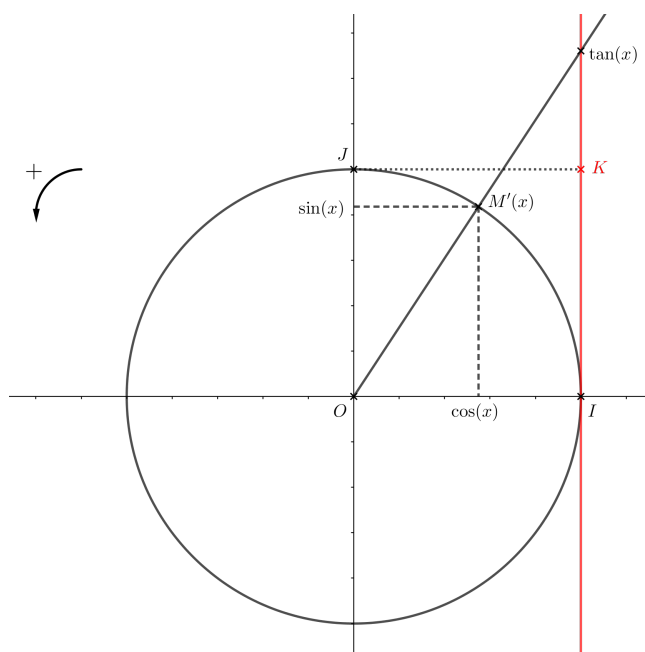
$$\pi \text{ rad} = 180^\circ, \quad \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ, \quad \frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ, \quad \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ$$

13.2 Cosinus, sinus et tangente

Définition 97. On considère le cercle trigonométrique dans un repère $(O; I, J)$. Pour tout nombre réel x , on appelle cosinus et sinus de x , notés respectivement $\cos(x)$ et $\sin(x)$, les coordonnées respectives du point M' du cercle associé à x . On écrit alors $M'(\cos(x); \sin(x))$. Pour tout nombre réel $x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, on appelle tangente de x le réel noté $\tan(x)$ et défini par $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Remarque. $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont aisément lisibles sur une figure d'après leur définition. Mais où $\tan(x)$ est-il lisible? Le théorème de Thalès nous permet de démontrer que ce dernier se lit sur la droite d'enroulement rencontrée dans la section précédente, que l'on appellera désormais : « la tangente au cercle trigonométrique au point I ».

Illustration :



Remarque. La tangente de x n'est pas définie lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ car, dans ce cas, le cosinus de x est nul (géométriquement les droites (OM') et (IK) sont parallèles).

Proposition 98. Pour tout nombre réel x , on a :

- $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
- $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Démonstration. Les deux premiers points sont évidents car, à tout réel x , est associé un unique point du cercle trigonométrique. Le troisième point découle directement du théorème de Pythagore. $\square$

Remarque. Les définitions de cosinus, sinus et tangente coïncident avec celles données au collège. Démonstration.

Exercice. Démontrer que, pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Proposition 99. *Voici un tableau des valeurs remarquables à connaître :*

ANGLE $\widehat{IOM'}$ EN DEGRÉS	0	30	45	60	90	180
ABSCISSE CURVILIGNE x DE M'	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non défini	0

Démonstration. Démonstration de la colonne $\widehat{IOM'} = 45^\circ$. Le reste est laissé en exercice. $\square$

Remarque. Ces quelques valeurs permettent d'en connaître bien d'autres. En effet, les symétries axiales par rapport aux axes du repère $(O; I, J)$ et la symétrie centrale par rapport à O nous donnent les relations suivantes :

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + \pi) = -\cos(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + \pi) = -\sin(x)$
$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi - x) = \cos(x)$
$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$

Exemple. Déterminer $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Chapitre 14

Droites du plan en géométrie analytique

L'adjectif latin « directus » est le participe passé d'un verbe signifant *diriger*. Il possède déjà le sens spatial et le sens moral de l'adjectif *droit* en français. Noté « dreit » au Moyen-Âge il devient bientôt « droit ». Déjà en latin il qualifiait l'angle de 90 degrés. Ce sens est repris en français. En géométrie, la notion de ligne droite découle du sens premier de l'adjectif. Dans la première moitié du $XVIII^{ème}$ siècle on substantive le mot et on parle d'une droite.



Colin Maclaurin

(Kimodan 1698 - Édimbourg 1746)



David Hilbert

(Königsberg 1862 - Göttingen 1943)

14.1 Équations de droites

Définition 100. Soit $(O; I, J)$ un repère du plan. Une équation de courbe est une égalité qui lie les coordonnées de tous les points de la courbe. Autrement dit : un point appartient à une courbe si, et seulement si, ses coordonnées vérifient l'équation de la courbe.

Exemple. $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2 + 5x - 2$, $y = \frac{4x-7}{x-1}$, $xy = 4$.

Remarque. Une même courbe possède une infinité d'équations. Exemple : $2y = 5x^2 \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}x^2$.

Proposition 101. Soit $(O; I, J)$ un repère du plan. Soit d une droite du plan.

1. Si d est parallèle à (OJ) , alors d admet une équation de la forme $x = c$, où $c \in \mathbb{R}$.
2. Sinon d admet une équation de la forme $y = ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

Démonstration. 1. Supposons d parallèle à (OJ) . La droite d coupe (OI) en un point C d'abscisse $c \in \mathbb{R}$. Soit $M(x; y)$ un point du plan. Si $x = c$, alors $M \in d$. Si $M \in d$, alors $x = c$. Donc d admet pour équation $x = c$.
2. Supposons d non parallèle à (OJ) . Soit $B(x_B; y_B)$ le point d'intersection de d et (OJ) . Alors $x_B = 0$. D'où : $B(0; y_B)$.

Soit A le point de d d'abscisse 1. Soit $M(x; y)$ un point du plan.

Si $M \in [AB] \setminus [AB]$, alors en notant C et D les points du plan d'ordonnée y_B tels que BMC soit rectangle en C et BAD soit rectangle en D , on a d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BD}{BC} = \frac{DA}{CM}$$

soit :

$$\frac{1}{x} = \frac{y_A - y_B}{y - y_B}$$

d'où :

$$y - y_B = x(y_A - y_B)$$

puis :

$$y = (y_A - y_B)x + y_B$$

En posant $a := y_A - y_B$ et $b := y_B$, on a bien : $y = ax + b$.

Réciproquement, si $y = ax + b$, on montre par l'absurde que $M \in d$.

Les cas où $M \in [AB]$ et $M \in [BA] \setminus [AB]$ se traitent de manière similaire et sont laissés en exercices. $\square$

Remarque. On peut effectuer trois remarques :

1. Il existe donc deux grandes familles de droites :
 - (a) Les droites dites « verticales » d'équation $x = c$, où $c \in \mathbb{R}$.
 - (b) Les droites dites « obliques » d'équation $y = ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Dans le cas des droites « obliques », si $a = 0$, alors la droite est dite « horizontale ».
3. Dans le cas des droites « obliques », si $b = 0$, alors la droite passe par l'origine du repère.

Vocabulaire : si une droite d admet une équation de la forme $y = ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$, alors on dit que a est son coefficient directeur et que b est son ordonnée à l'origine.

Proposition 102. Soit $(O; I, J)$ un repère du plan. Soit d une du plan d'équation $y = ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

où $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points distincts de la droite d .

Démonstration. $A(x_A; y_A) \in d$ donc $y_A = ax_A + b$. De même, $B(x_B; y_B) \in d$ donc $y_B = ax_B + b$. D'où :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{ax_B + b - (ax_A + b)}{x_B - x_A} = \frac{a(x_B - x_A)}{x_B - x_A} = a$$

$\square$

Exercice. Voici quelques exercices classiques :

1. Soient $A(5; 2)$ et $B(-1; -3)$ deux points du plan muni d'un repère. Déterminer une équation de la droite (AB) .
2. Soient $C(-3; -2)$ et $D(-3; 8)$ deux points du plan muni d'un repère. Déterminer une équation de la droite (CD) .
3. Soient $E(-5; 4)$ et $F(1; 4)$ deux points du plan muni d'un repère. Déterminer une équation de la droite (EF) .
4. Dans un repère du plan, tracer les droites suivantes : $d_1 : y = -2x + 1$, $d_2 : y = -\frac{3}{4}x - 2$, $d_3 : x = -4$ et $d_4 : y = 5$.

Proposition 103. Soit $(O; I, J)$ un repère du plan. Soient d et d' deux droites d'équation respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, où $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$. Alors d et d' sont parallèles si, et seulement si, $a = a'$.

Démonstration. $\Rightarrow$: supposons d et d' parallèles. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts de d . Alors le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ dirige (a la même direction que) la droite d . Soient $C(x_C; y_C)$ et $D(x_D; y_D)$ deux points distincts de d' . Alors le vecteur $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$ dirige (a la même direction que) la droite d' . Or d et d' sont parallèles, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Par conséquent, $(x_B - x_A)(y_D - y_C) - (x_D - x_C)(y_B - y_A) = 0$. D'où :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$$

c'est-à-dire : $a = a'$.

$\Leftarrow$: supposons $a = a'$. Soit $A(x_A; y_A)$ un point de d . Alors $B(x_A + 1; y_A + a) \in d$. Donc le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ dirige la droite d .

Soit $C(x_C; y_C)$ un point de d' . Alors $D(x_C + 1; y_C + a) \in d'$. Donc le vecteur $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ dirige la droite d' . Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc égaux et a fortiori colinéaires. Par conséquent, les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Autrement dit, les droites d et d' sont parallèles. $\square$

Remarque. Voici un tableau récapitulatif des positions relatives de deux droites dans le plan :

ÉQUATION DE d	$x = c$	$y = ax + b$		
ÉQUATION DE d'	$x = c'$	$x = c'$	$y = a'x + b'$	
POSITIONS RELATIVES DE d ET d'	Parallèles	Sécantes	$a = a'$	$a \neq a'$
			Parallèles	Sécantes
REPRÉSENTATION GRAPHIQUE				

14.2 Systèmes linéaires

Définition 104. On appelle système linéaire de deux équations à deux inconnues tout système de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ dx + ey = f & (2) \end{cases}$$

où $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$ et $(d; e) \neq (0; 0)$ et où x, y sont les inconnues. Résoudre un tel système consiste à déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ satisfaisant aux équations (1) et (2) simultanément. Un tel couple est alors appelé une solution du système.

Exemple. Le couple $(2; -3)$ est solution du système $\begin{cases} x + y = -1 & (1) \\ 4x - 3y = 17 & (2) \end{cases}$. En revanche, le couple $(-1; 5)$ n'est pas solution du système $\begin{cases} -x + 2y = 11 & (1) \\ 3x + y = 5 & (2) \end{cases}$.

Définition 105. Soit $(S) : \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ dx + ey = f & (2) \end{cases}$ un système linéaire de deux équations à deux inconnues. On appelle déterminant de (S) le nombre réel $\delta := ae - bd$.

Proposition 106. Soit $(S) : \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ dx + ey = f & (2) \end{cases}$ un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

1. Si son déterminant $\delta = ae - bd$ est non nul, alors le système (S) admet un unique couple solution.
2. Si son déterminant $\delta = ae - bd$ est nul, alors le système (S) admet soit une infinité de couples, soit aucun couple solution.

Démonstration. 1. Supposons que $\delta = ae - bd \neq 0$. Alors $ae \neq bd$.

Si $b = 0$ ou $d = 0$, alors $a \neq 0$ et $e \neq 0$. Ainsi (1) est équivalente à $ax = c$, c'est-à-dire à : $x = \frac{c}{a}$. Donc (1) est l'équation d'une droite d_1 parallèle à l'axe des ordonnées. Aussi, (2) est équivalente à : $y = -\frac{d}{e}x - \frac{f}{e}$ qui est l'équation d'une droite d_2 non parallèle à l'axe des ordonnées. Ainsi d_1 et d_2 sont sécantes en un unique point du plan. Par conséquent, (S) admet un unique couple solution.

Si $b \neq 0$ et $d \neq 0$, alors (1) est équivalente à $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Donc (1) est l'équation d'une droite d_1 non parallèle à l'axe des ordonnées. Quant à l'équation (2), tout dépend de e .

Si $e = 0$, alors (2) est équivalente à $dx = f$ et donc à $x = \frac{f}{d}$ car $d \neq 0$. Dans ce cas, (2) est l'équation d'une droite d_2 parallèle à l'axe des ordonnées. Par conséquent, d_2 est nécessairement sécante à d_1 . D'où l'existence et l'unicité du couple solution de (S) .

Si $e \neq 0$, alors (2) est équivalente à $y = -\frac{d}{e}x + \frac{f}{e}$ qui est l'équation d'une droite d_2 non parallèle à l'axe des ordonnées. Or $ae \neq bd$ donc $\frac{a}{b} \neq \frac{d}{e}$ et $-\frac{a}{b} \neq -\frac{d}{e}$. Par conséquent, les droites d_1 et d_2 ont un coefficient directeur différent et sont donc sécantes en un unique point. D'où le résultat.

2. Supposons que $\delta = ae - bd = 0$. Alors $ae = bd$.

Si $b = 0$, alors $a = 0$ ou $e = 0$. Si $a \neq 0$, alors $e = 0$ et l'on a :

(1) est équivalente à $x = \frac{c}{a}$ qui est l'équation d'une droite d_1 parallèle à l'axe des ordonnées.

Si $d = 0$, alors (2) est équivalente à $0 = f$. Si $f = 0$, alors (2) décrit tout le plan et le système (S) admet alors une infinité de couples solutions, ceux vérifiant (1). Si $f \neq 0$, alors (2) décrit l'ensemble vide et le système (S) admet alors aucune solution.

Si $d \neq 0$, alors (2) est équivalente à $x = \frac{f}{d}$ qui est l'équation d'une droite d_2 parallèle à l'axe des ordonnées. Si $\frac{c}{a} = \frac{f}{d}$, alors d_1 et d_2 sont confondues et le système (S) admet une infinité de couples solutions. Si $\frac{c}{a} \neq \frac{f}{d}$, alors d_1 et d_2 sont strictement parallèles et le système (S) n'admet aucun couple solution.

Si $a = 0$, alors (1) est équivalente à $0 = c$.

Si $c \neq 0$, alors (1) décrit l'ensemble vide et son intersection avec l'ensemble décrit par (2) est nécessairement l'ensemble vide. Autrement dit, $(\mathcal{S})$ n'admet aucun couple solution.

Si $c = 0$, alors (1) décrit tout le plan. Tout dépend alors de l'équation (2). Si (2) décrit une droite, alors le système $(\mathcal{S})$ admet une infinité de couples solutions. Sinon (2) décrit l'ensemble vide, alors $(\mathcal{S})$ n'admet aucun couple solution.

□

Exercice. Déterminer le nombre de solutions des systèmes :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x - 3y = -3 & (1) \\ x - y = 1 & (2) \end{cases} \text{ et } (\mathcal{S}') : \begin{cases} 0,4x - 0,6y = -1,2 & (1) \\ 2x - 3y = -3 & (2) \end{cases}$$

Remarque. Voici deux remarques :

1. Supposons d, e et f sont non nuls.

(a) Si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$, alors les équations (1) et (2) décrivent la même droite. Par conséquent le système $(\mathcal{S})$ admet une infinité de couple solutions.

(b) Si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e}$ et $\frac{a}{d} \neq \frac{c}{f}$, alors les équation (1) et (2) décrivent deux droites strictement parallèles. Par conséquent le système $(\mathcal{S})$ n'admet aucun couple solution.

2. Il existe trois grandes façons de résoudre un système lorsque celui-ci possède un unique couple solution :

(a) La méthode par substitution.

(b) La méthode par combinaison.

(c) La méthode se ramenant aux équations de droites.

Exemple. Résolvons le système $\begin{cases} -20x + 40y = 180 & (1) \\ 10x + 50y = 295 & (2) \end{cases}$ à l'aide des trois méthodes.

Exercice. L'année dernière, le foyer du lycée avait acheté 32 bandes dessinées et 7 D.V.D. pour un coût total de 347 euros. Cette année, 16 bandes dessinées et 5 D.V.D. ont coûté au foyer 202,60 euros. Le budget pour l'année prochaine ne pourra dépasser 250 euros. Le foyer pourra-t-il commander 9 documents de chaque sorte ?

Exercice. Voici trois exercices classiques d'algorithmique :

1. Écrire un algorithme renvoyant une équation de la droite passant par deux points dont on connaît les coordonnées.
2. Écrire un algorithme permettant de déterminer si trois points dont on connaît les coordonnées sont alignés ou non.
3. Écrire un algorithme permettant de déterminer si quatre points du plan dont on connaît les coordonnées forment un trapèze, un parallélogramme.

Chapitre 15

Probabilités sur un ensemble fini

Dès les Romains, on trouve un lien étymologique entre le mot « probabilitas » qui désigne la chance que quelque chose de louable se réalise et le verbe « probare » qui signifie *vérifier*. Le mot *probabilité* est emprunté au latin vers 1350. Il évince *probaleté* construit sur l'adjectif *probable*. La première utilisation du mot *probabilité* pour désigner quelque chose de mesurable se trouve dans la logique de Port Royal. La motivation de l'auteur, sans doute Antoine Arnaud, était d'aider les hommes à s'orienter en tenant compte de l'utilité de leurs actes. Il faut attendre le tout début du siècle suivant pour que ceci soit ressenti comme une théorie à part entière avec besoin de la nommer. On trouve le mot *probabilité* dans le titres d'ouvrages traitant du sujet à la fin du *XVIII^{ème}* siècle, en particulier sous la plume de Condorcet et Laplace. *Probabilité* évince petit à petit le mot *chance*. Cournot associe encore les deux mots en 1843 dans le titre de son « Exposition de la théorie des chances et des probabilités ».



Blaise Pascal
(Clermont-Ferrand 1623 -
Paris 1662)



Nicolas de Condorcet
(Ribemont 1743 -
Bourg-la-Reine 1794)



Pierre-Simon de Laplace
(Beaumont-en-Auge 1749 -
Paris 1827)

15.1 Généralités

Définition 107. On appelle expérience aléatoire une expérience renouvelable dont les résultats possibles sont connus sans que l'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

Remarque. L'objectif de ce chapitre est de mathématiser les expériences aléatoires.

Définition 108. On appelle univers d'une expérience aléatoire l'ensemble des issues possibles appelées également éventualités. On le note Ω .

Exemple. Voici quelques exemples d'expériences aléatoires :

1. Le(s) lancer(s) d'un ou plusieurs dés ;

2. Le(s) tirage(s) d'une ou plusieurs cartes dans un jeu classique de 32 ou 54 cartes ;
3. Le(s) prélèvement(s) d'un ou plusieurs jetons dans une urne.

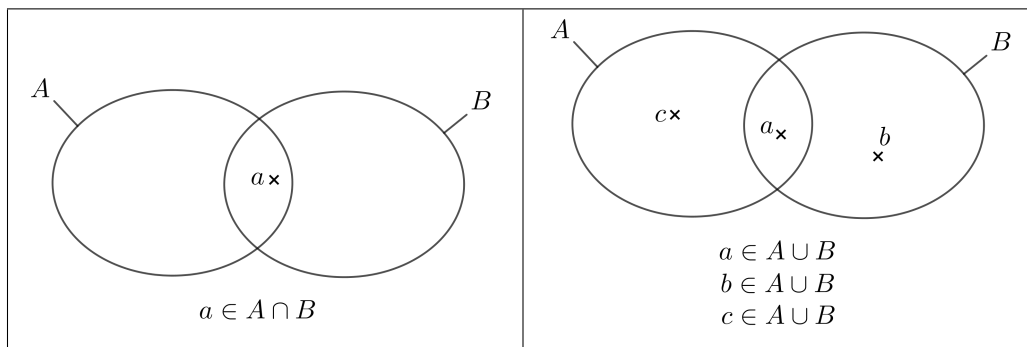
Définition 109. On appelle événement un sous-ensemble de l'univers. Il peut toujours se décrire à l'aide d'issues.

Exemple. Si l'expérience aléatoire est le lancer d'un dé classique équilibré, alors l'événement : « Obtenir un nombre pair » est la réunion des issues : « Obtenir 2 », « Obtenir 4 » et « Obtenir 6 ».

Définition 110. Soient A et B deux événements. On appelle union de A et de B l'ensemble des issues qui réalisent A ou B . On le note $A \cup B$ et se lit « A union B ». On appelle intersection de A et B l'ensemble des issues qui réalisent A et B . On le note $A \cap B$ et se lit « A inter B ».

Exemple. Si l'expérience aléatoire est le lancer d'un dé classique équilibré, si A désigne l'événement : « Obtenir un nombre pair » et B désigne l'événement : « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 5 », alors l'événement $A \cap B$ est : « Obtenir 6 ».

Illustration :



15.2 Calculs de probabilités

Définition 111. On appelle probabilité d'une issue d'une expérience aléatoire la « chance » qu'elle a de se réaliser. Cette « chance » est égale au quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas total. Si A est un événement constitué d'une ou plusieurs issues, alors la probabilité de A se note : $P(A)$.

Remarque. On a évidemment : $0 \leq P(A) \leq 1$.

Théorème 112. (*Loi faible des grands nombres*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On répète n fois de façon identique et indépendante une expérience aléatoire. Alors la fréquence d'une issue va se stabiliser autour de sa probabilité lorsque n augmente.

Remarque. Ce théorème peut être utile lorsqu'il semble impossible de calculer une probabilité avec des arguments évidents de symétrie. Dans ce cas, on reproduit un très grand nombre de fois l'expérience aléatoire et l'on mesure la fréquence d'apparition de l'issue considérée. On prend alors cette fréquence comme valeur approchée de sa probabilité, malheureusement inaccessible.

Exercice. Écrire un algorithme permettant de simuler le lancer d'un dé classique équilibré.

Définition 113. On appelle modèle équiréparti une modélisation de l'expérience aléatoire où chaque issue a la même probabilité valant :

$$\frac{1}{\text{Nombre d'issues possibles}}$$

On dit aussi qu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

Remarque. C'est le choix de l'univers qui va engendrer ou non une situation d'équiprobabilité.

Définition 114. On appelle loi de probabilité sur un univers la donnée de chaque issue à laquelle est associé un nombre de l'intervalle $[0; 1]$ appelé sa probabilité.

Exemple. Voici la loi de probabilité relative au lancer d'un dé légèrement pipé :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Remarque. La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1.

Définition 115. On appelle probabilité d'un événement la somme des probabilités des événements le constituant.

Exemple. Notation $P(A)$.

Vocabulaire :

1. Un événement dont la probabilité est nulle est dit impossible.
2. Un événement dont la probabilité est égale à 1 est dit certain.

Remarque. Dans un modèle équiréparti, pour déterminer la probabilité d'un événement, il suffit de compter les issues constituant cet événement puis de la diviser par le nombre d'issues total.

Proposition 116. Soit A un événement. On appelle événement contraire de A , noté $\bar{A}$, l'événement constitué des issues de l'univers n'appartenant pas à A . On a : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Démonstration. Par définition de l'événement contraire, on a : $A \cup \bar{A} = \Omega$. D'où : $P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega)$.

Soit : $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Ainsi : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. □

Exemple. Si l'expérience aléatoire est le lancer d'un dé classique équilibré, si A désigne l'événement : « Obtenir 1 », alors $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Proposition 117. Soient A et B deux événements. On a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration. Diagramme de Venn. □

Exemple. On tire une carte au hasard dans un jeu classique de 32 cartes. Soit A l'événement « Obtenir une carte de carreau » et B l'événement « Obtenir un roi ». Alors :

$$\begin{aligned}
 P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} \\
 &= \frac{11}{32}
 \end{aligned}$$

Remarque. Voici plusieurs remarques :

1. Si A et B sont disjoints, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$, alors $P(A \cap B) = 0$ et l'on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. On dit que A et B sont incompatibles.
2. Pour tout événement A , A et $\bar{A}$ sont incompatibles.

Chapitre 16

Statistiques

« lo stato » signifie l'État en italien. Ce mot a donné « statista », homme d'État. Sur ce mot le latin moderne a créé l'adjectif « statisticus » vers 1670 pour désigner ce qui est relatif à l'État. *Statistique*, adjectif comme nom, a été introduit vers 1770 en français, à la même époque que « statistik » en allemand. Jusqu'en 1800, les Anglais lui préfèrent « political arithmetic ». *Statistique* désigne alors l'étude des faits sociaux relatif à l'État. Les méthodes mathématiques chargées de classer et d'analyser les données numériques apparaissent au milieu du *XIX^{ème}* siècle. On les appelle *statistiques*. En latin, « intervallum » désignait l'espace ou la distance entre pieux. Par extension, il s'emploie dans le domaine temporel. Le mot est repris au *XIV^{ème}* siècle d'abord dans ce dernier sens ensuite dans le domaine spatial. Son utilisation en mathématiques date sans doute du début du *XIX^{ème}* siècle.



John von Neumann

(Budapest 1903 - Washington 1957)



Antoine Deparcieux

(Mas du Clotet 1703 - Paris 1768)

16.1 Statistique descriptive

16.1.1 Série statistique

Lorsque l'on étudie un certain caractère sur une population donnée, on relève une valeur du caractère par individu. L'ensemble des données obtenues (ou toutes les valeurs prises par le caractère) constitue les données brutes. Le caractère peut être qualitatif (couleur d'une voiture) ou quantitatif (taille d'un individu). Les données brutes comportent souvent des valeurs qui se répètent.

Définition 118. Lors d'un relevé de mesures effectué sur les individus d'une population, l'ensemble des données collectées constitue une série statistique. Une série statistique à caractère quantitatif est dite ordonnée après que les valeurs collectées ont été rangées dans l'ordre croissant (ou décroissant). L'étendue désigne l'écart entre la plus grande et la plus petite des valeurs prises par le caractère. Les différentes valeurs possibles pour un caractère s'appellent les modalités du caractère.

Vocabulaire : l'étendue est un paramètre dit de « dispersion » car il mesure l'homogénéité de la population étudiée.

Exemple. (Classe - Taille)

Remarque. Si le nombre de modalités est « grand », alors le recensement de toutes les modalités rendrait le tableau illisible. Dans ce cas on regroupe les modalités par classes.

Exemple. (Classe - Taille)

Définition 119. On considère une série statistique comportant p modalités (ou p classes) d'effectifs respectifs $n_1, \dots, n_p$ et d'effectif total N . La fréquence d'apparition de la modalité (ou de la classe) correspond à la proportion d'individus dont le caractère est égal à cette modalité (ou appartenant à cette classe). Ainsi :

$$\forall i \in \{1; \dots; p\}, f_i = \frac{n_i}{N}$$

Exemple. (Classe - Taille)

Remarque. On a toujours : $\sum_{i=1}^{i=p} f_i = f_1 + \dots + f_p = 1$.

16.1.2 Médiane, quartiles et moyenne

Dans cette partie et la suivante, on considère uniquement des séries statistiques à caractère quantitatif.

Définition 120. Dans une série statistique ordonnée, on appelle médiane toute valeur qui partage les valeurs prises par le caractère en deux groupes de même effectif.

Vocabulaire : la médiane est un paramètre dit de « position » car elle permet de positionner la population sur un axe gradué.

Exemple. (Classe - Taille)

Remarque. Si l'effectif total de la série est impaire, alors la médiane est unique et atteinte.

Définition 121. On appelle premier quartile d'une série statistique numérique, noté Q_1 , la plus petite valeur prise par le caractère telle qu'au moins 25 % des valeurs lui soient inférieures ou égales. On appelle troisième quartile d'une série statistique numérique, noté Q_3 , la plus petite valeur prise par le caractère telle qu'au moins 75 % des valeurs lui soient inférieures ou égales.

Vocabulaire : les quartiles sont des paramètres dits de « position » car ils permettent de positionner la population sur un axe gradué. L'écart interquartile $Q_3 - Q_1$ est quant à lui un paramètre de dispersion.

Exemple. (Classe - Taille)

Remarque. Les fréquences cumulées croissantes (F.C.C.) et les fréquences cumulées décroissantes facilitent considérablement la recherche de la médiane et des quartiles.

Exemple. (Classe - Taille)

Définition 122. La moyenne arithmétique d'une série statistique se note $\bar{x}$. On a :

$$\bar{x} = \frac{\text{somme totale des valeurs prises par le caractère}}{\text{nombre de valeurs}}$$

Si $x_1, \dots, x_p$ désignent les p modalités du caractère d'une série statistique et $n_1, \dots, n_p$ désignent les effectifs correspondants, alors :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=p} n_i} = \frac{n_1 x_1 + \dots + n_p x_p}{n_1 + \dots + n_p}$$

Exemple. (Classe - Taille)

Proposition 123. Si $x_1, \dots, x_p$ désignent les p modalités du caractère d'une série statistique et $f_1, \dots, f_p$ désignent les fréquences correspondants, alors :

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{i=p} f_i x_i = f_1 x_1 + \dots + f_p x_p$$

Démonstration. Découle directement de la définition précédente. □

Remarque. On peut effectuer trois remarques :

1. La moyenne arithmétique est un paramètre de position.
2. Si l'on ajoute un même réel à chaque modalité, alors la moyenne arithmétique augmente de ce réel.
3. Si l'on multiplie par un même réel chaque modalité, alors la moyenne arithmétique est multipliée par ce réel.

16.2 Statistique inférentielle

16.2.1 Échantillonnage

Définition 124. On appelle expérience aléatoire une expérience renouvelable dont les résultats possibles sont connus sans qu'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

Définition 125. On appelle échantillon de taille $n \in \mathbb{N}^*$ un ensemble constitué des résultats de n répétitions indépendantes de la même expérience.

Exemple. Voici deux exemples d'échantillons :

1. Celui obtenu après prélèvement au sein d'une production ;
2. Celui obtenu après sondage d'une population.

Définition 126. Deux échantillons de même taille issus de la même expérience aléatoire ne sont généralement pas identiques. On appelle fluctuation d'échantillonnage les variations des fréquences des valeurs relevées.

Vocabulaire :

1. n est l'effectif total de l'échantillon appelé taille de l'échantillon.
2. On note souvent f_O la fréquence observée d'une valeur d'un caractère au sein de l'échantillon.

3. On note souvent p la proportion réelle d'une valeur d'un caractère au sein de la population.

Remarque. La loi faible des grands nombres nous apprend que lorsque n tend vers $+\infty$, la fréquence observée f_O au sein de l'échantillon tend vers la proportion réelle p au sein de la population.

16.2.2 Intervalle de fluctuation

Problème. Soit une population pour laquelle on étudie la proportion d'un caractère. On émet une hypothèse sur la proportion p du caractère étudié dans la population. On considère donc p comme connu car il a une valeur conjecturée. Un échantillon de taille n de cette population est prélevé et on observe une fréquence f_O du caractère étudié. Peut-on, à partir de l'observation de f_O , valider la conjecture faite sur p ? La fréquence observée, f_O , est-elle proche ou éloignée de la probabilité ou proportion théorique, p ?

Définition 127. On appelle intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, relatif aux échantillons de taille n , l'intervalle centré autour de p qui contient la fréquence observée f_O dans un échantillon de taille n avec une probabilité égale à 0,95.

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. L'unique intervalle de fluctuation où l'on trouverait f_O avec une probabilité de 100 % est l'intervalle $[0; 1]$.
2. L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % peut être obtenu à l'aide de simulations.

Proposition 128. Soit p la proportion effective d'un caractère d'une population comprise entre 0,2 et 0,8 et f_O la fréquence du caractère dans un échantillon de taille n supérieure ou égale à 25. Alors $f_O \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ avec une probabilité égale à 0,95.

Démonstration. Admise. □

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. L'amplitude de l'intervalle de fluctuation $\frac{2}{\sqrt{n}}$ diminue lorsque n augmente. Ceci explique pourquoi on préfère les échantillons de grande taille, ils sont plus précis.
2. L'intervalle de fluctuation permet notamment de détecter d'éventuels trucages ou triches.

16.2.3 Intervalle de confiance

Problème. Soit une population pour laquelle on étudie la proportion d'un caractère. On ignore la proportion p du caractère étudié dans la population. Un échantillon de taille n de cette population est prélevé et on observe une fréquence f_O du caractère étudié. Peut-on, à partir de l'observation de f_O , émettre une conjecture sur p ? La fréquence observée, f_O , est-elle proche ou éloignée de la probabilité ou proportion théorique, p ?

Proposition 129. On considère un échantillon de taille $n \geq 25$ tel que $f_O \in [0, 2; 0, 8]$. Alors p appartient à l'intervalle $\left[f_O - \frac{1}{\sqrt{n}}; f_O + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ avec une probabilité égale à 0,95.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \left(f_O \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \right) &\Leftrightarrow \left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq f_O \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(f_O - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq f_O + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(p \in \left[f_O - \frac{1}{\sqrt{n}}; f_O + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \right) \end{aligned}$$

□

Définition 130. On appelle intervalle de confiance au seuil de 95 %, relatif aux échantillons de taille n , un intervalle centré autour de f_O où se situe la proportion p du caractère dans la population avec une probabilité égale à 0,95. L'intervalle $\left[f_O - \frac{1}{\sqrt{n}}; f_O + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est donc appelé intervalle de confiance au seuil de 95 %.

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. Là encore, plus la taille de l'échantillon est grande, plus l'amplitude de l'intervalle de confiance est petite et plus les résultats annoncés sont précis.
2. L'intervalle de confiance est l'intervalle utilisé par les instituts de sondage.

Bibliographie

- [1] WEIL, Alain (2013) - *Les maths expliquées - Cours de Seconde* - Ellipses.
- [2] WEIL, Alain (2015) - *Les maths expliquées - Seconde - Exercices corrigés* - Ellipses.
- [3] LAROCHE, Frédéric (2011) - *Activités maths - Seconde* - Ellipses.
- [4] SÉSAMATH (2005) - *Les manuels et cahiers du collectif Sésamath* - Sésamath.net.
- [5] WACKSMANN, Jean (2019) - « *Mathématiques - Seconde - Pour aller plus loin en démontrant et en s'entraînant* » - Ellipses.
- [6] DUBON, Eric et DEL REY, Francisco (2021) - *Mathématiques d'excellence - Cours pour lycéens très motivés - Niveau Seconde* - Ellipses.
- [7] SAHA, Amit (2016) - *Python pour les maths dès 14 ans* - Eyrolles.
- [8] PETIT, Thomas (2017) - *Tous les algorithmes - Programmation Algobox / Python* - Ellipses.
- [9] CHANET, Xavier (2018) - *Algorithmique et programmation en Python en Seconde* - Ellipses.
- [10] MAILLE, Vincent (2015) - *Apprendre la programmation par le jeu - A la découverte du langage Python 3* - Ellipses.

Index

écart interquartile, 112
échantillon, 113
échantillonnage, 113
équation, 93
équation de courbe, 101
équiprobabilité, 108
équivalence, 10
étendue, 111
événement, 108
événement contraire, 109
événements incompatibles, 109

affectation, 18
algèbre, 43
algorithme, 17
algorithme de dichotomie, 94
antécédent, 52, 57
application injective, 98
application surjective, 98
axe des abscisses, 48
axe des ordonnées, 48

booléen, 23
boucle conditionnelle, 27
boucle itérative, 27
boule, 92
but, 51

cercle, 79
cercle trigonométrique, 97
certain, 109
chaîne de caractères, 23
classes, 112
coefficient directeur, 65, 102
combinaison, 105
complémentaire, 38
composée, 76
composée de fonctions, 56
condition nécessaire, 14
condition suffisante, 14
conjonction, 10
constante, 65
contraposée, 14

contre-exemple, 14
coordonnées, 47, 61
cosinus, 99
courbe représentative, 52
cylindres, 92

décimaux, 40
déterminant, 104
degré, 43
diagramme de Venn, 37
diagramme sagittal, 51
direction, 58
discriminant, 82
disjoints, 39
disjonction, 10
disjonction de cas, 13
distributivité, 44
domaine de définition, 52

ensemble, 37
ensemble vide, 38
entiers naturels, 40
entiers relatifs, 40
expérience aléatoire, 107, 113
extremum d'une fonction, 54

fonction, 51
fonction affine, 65
fonction carrée, 67
fonction constante, 55
fonction croissante, 55
fonction d'une variable réelle, 52
fonction décroissante, 55
fonction homographique, 85
fonction inverse, 68
fonction monotone, 55
fonction numérique, 52
fonction polynôme de degré deux, 81
fonction racine carrée, 70
fonction strictement croissante, 55
fonction strictement décroissante, 55
fonction strictement monotone, 55
fonction trinôme du second degré, 81

- fonction valeur absolue, 69
- forme canonique, 82
- forme développée réduite, 44
- forme factorisée, 44
- forme mixte, 44
- fréquence, 112
- fréquence observée, 113
- fréquences cumulées croissantes, 112
- fréquences cumulées décroissantes, 112
- fraction rationnelle, 45

- géométrie, 73
- graphe, 52

- homothétie, 76
- hyperbole, 69, 85

- image, 52, 57
- implication, 11
- impossible, 109
- inégalité triangulaire, 59
- inéquations, 95
- indice de boucle, 27
- initialisation, 18
- instruction conditionnelle, 21
- intersection, 39, 108
- intervalle, 41
- intervalle de confiance, 115
- intervalle de fluctuation, 114
- involution, 74
- involutive, 68

- linéaire, 65
- liste, 30
- loi de probabilité, 109
- loi faible des grands nombres, 108, 114
- lois de De Morgan, 11

- médiane, 112
- majorant d'une fonction, 54
- maximum d'une fonction, 54
- minimum d'une fonction, 54
- minorant d'une fonction, 54
- modèle équiréparti, 108
- modalités, 111
- modus ponens, 9, 13
- modus tollens, 9
- monôme, 43, 81
- moyenne arithmétique, 113

- négation, 10
- normé, 48
- norme, 58

- opposé, 60
- ordonnée à l'origine, 65, 102
- origine, 48
- orthogonal, 48
- orthonormé, 48
- ou exclusif, 11

- paire, 38
- palindrome, 25
- parabole, 68, 84
- parallèle, 88
- parallèles, 88, 89
- paramètre de dispersion, 112
- paramètre de position, 112, 113
- partie, 38
- polynôme, 43
- prédicat, 12
- premier quartile, 112
- principe de non-contradiction, 9
- principe du tiers exclu, 9
- probabilité, 108, 109
- produit de fonctions, 56
- programme, 17
- proportion réelle, 114
- pyramides, 92

- quadrilatères, 78
- quantificateur existentiel, 12
- quantificateur universel, 12
- quotient de fonctions, 56

- réels, 40
- réunion, 39
- racines, 44
- raisonnement déductif direct, 13
- raisonnement par analyse-synthèse, 15
- raisonnement par contraposition, 14
- raisonnement par l'absurde, 15
- rationnels, 40
- relation de Chasles, 59
- repère, 47
- représentation graphique, 52
- rotation, 52, 75

- série statistique, 111
- sens, 58
- sens direct, 97
- sens indirect, 97
- singleton, 38
- sinus, 99
- solution, 93, 95, 103
- somme de fonctions, 56
- source, 51
- sous-ensemble, 38

sphère, 92
substitution, 105
suite, 52
symétrie axiale, 52, 73
symétrie centrale, 52, 74
système linéaire, 103

taille, 113
tangente, 99
théorème de Pythagore, 49
translation, 52, 57, 75
triangles, 78
troisième quartile, 112

union, 108
univers, 107

vecteur, 58
vecteurs colinéaires, 60