Sixième - Cours de mathématiques

Mathieu KIEFFER

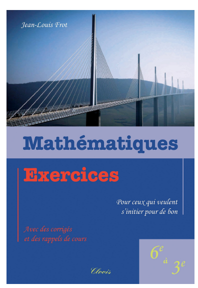
Table des matières

Introduction

Ce cours est celui dispensé sur le terrain à mes élèves de Sixième. Il reprend les thèmes évoqués par le programme officiel avec un certain souci de rigueur tout en s'octroyant quelques libertés. Les objets mathématiques utilisés y sont toujours présentés via une définition claire et précise. Les théorèmes et autres résultats mathématiques sont démontrés dans la mesure du possible avec plus ou moins de détails. Les rares propositions laissées sans démonstration le sont car il n'existe tout simplement pas de démonstration accessible à ce niveau ; une référence aux cours des années précédentes est alors requise. Aussi, certaines démonstrations ont volontairement été rédigées de manière succincte voire très incomplète. L'objectif est clair : que l'élève prenne son stylo afin de se frotter à cette réalité mathématique et d'en délier le vrai du faux par sa propre expérience, ses propres efforts. De la même façon, vous trouverez des exemples et des exercices non traités tout au long de ce cours. En effet, lire un corrigé ou une solution n'apporte quasiment rien à la compréhension d'une notion. Apprendre, c'est avant tout faire par soi-même.

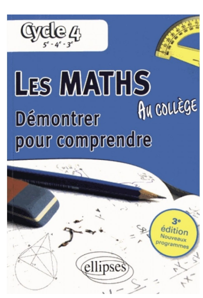
Ce cours comporte sans aucun doute des erreurs et est voué à évoluer à l'épreuve des séances. Il représente le strict minimum que tout élève de Sixième désireux d'étudier les mathématiques doit maîtriser en fin d'année scolaire. C'est pourquoi j'invite vivement cet élève à prolonger ses études à l'aide des remarquables ouvrages suivants :

1. « Mathématiques - Exercices » de Jean-Louis Frot aux éditions Clovis :



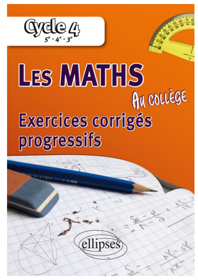
   Recueil d'environs 250 exercices donnés au collège Henri IV à Paris, il est de fait une référence. La moitié des exercices sont corrigés et aucun d'entre eux n'est trivial. Tous les exercices méritent réflexion et/ou présentent une difficulté technique à surmonter. Travailler dans cet ouvrage représente donc une excellente révision avant l'entrée en classe de Seconde.

2. « Les mathématiques au collège : démontrer pour comprendre - Cycle 4 » d'Alexandre Casamayou-Boucau aux éditions Ellipses :



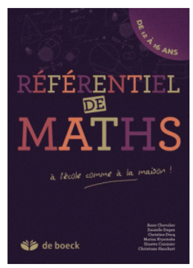
Ce livre est idéal pour asseoir les notions traitées au collège. Le cours présenté ne respecte fort heureusement plus les programmes vides actuellement en vigueur. Rigoureux et exigeant, il n'en demeure pas moins accessible. Un ouvrage à posséder absolument et à étudier des heures durant avant l'entrée en classe de Seconde.

3. « Les mathématiques au collège : exercices progressifs - Cycle 4 » d'Alexandre Casamayou-Boucau aux éditions Ellipses :



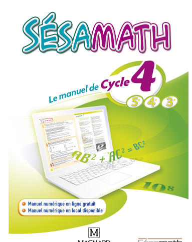
Il s'agit du petit frère du précédent. Centré sur les exercices, il permettra à tout élève de se remettre à flots avant d'entamer le cours de Seconde. Les exercices présents sont nombreux et variés et donnent la primeur à la répétition sans laquelle aucun progrès n'est envisageable.

4. « Référentiel de maths - A l'école comme à la maison - De 12 à 16 ans » d'Anne Chevalier aux éditions De Boeck :



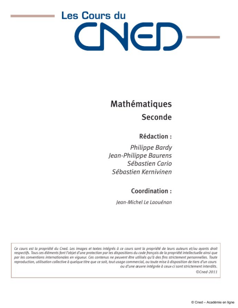
Un ouvrage d'une qualité rare brossant le programme du collège et un peu plus. Chaque définition, proposition ou théorème est amené avec soin et rigueur. Chaque résultat y est présenté à l'aide d'une démonstration clairement rédigée faisant intervenir uniquement des notions déjà rencontrées dans les pages antérieures.

5. « Manuel Sésamath Cycle 4 » du collectif Sésamath :



Œuvre d'un collectif de professeurs en exercice, c'est l'un des rares manuels de qualité dans le monde traditionnel de l'édition (Hachette, Nathan, Bordas, etc.). Testé et approuvé par des milliers d'élèves et de professeurs chaque année, ce dernier a clairement fait ses preuves. Deux atouts lui sont indéniables : la version numérique est gratuite (téléchargeable sur le site de Sésamath) et la quantité d'exercices.

6. « Cours du CNED » du collectif CNED :

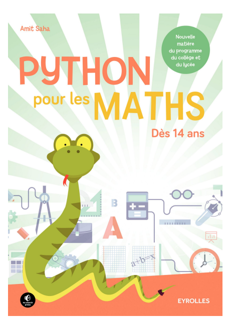


Rédigés par les professeurs du CNED, ce cours est structuré par le célèbre schéma : « activités - cours - exercices ». Chaque chapitre débute par une série d'activités introductrices relativement bien pensées. S'ensuit alors un cours précis et rigoureux puis quelques exercices ratissant large. Un joli complément (gratuit et téléchargeable sur « Académie en ligne ») au cours présent.

7. « Donc, d'après. Une construction axiomatique de la géométrie au collège » de Philippe Collard aux éditions Mathémagique.com :

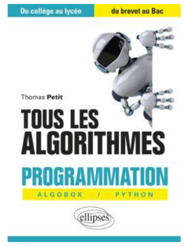
Nominé au prix Tangente en 2014, cet ouvrage est aujourd'hui une référence en terme de manuel de géométrie au collège. Partant de définitions précises, l'auteur prend le lecteur par la main, démontrant propriété après propriété avec une rare clarté pour l'amener sur les cimes, contempler les plus beaux des résultats de la géométrie euclidienne.

8. « Python pour les maths dès 14 ans » d'Amit Saha aux éditions Eyrolles :



Python s'est petit à petit imposé dans le monde de l'éducation, son ergonomie et sa polyvalence n'y sont pas étrangères. Des ouvrages de qualité fluctuantes ont été alors publiés... Celui-ci est pourvu d'une double ambition : résoudre des problèmes mathématiques grâce à la programmation. Progressif et détaillé, il saura former tout collégien patient et consciencieux qui le lira devant son ordinateur.

9. « Tous les algorithmes - Programmation Algobox / Python » de Thomas Petit aux éditions Ellipses :

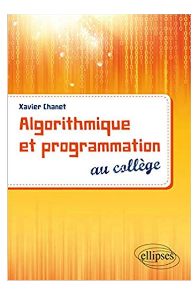


Simple recueil d'algorithmes rédigés en Algobox et/ou Python, cet ouvrage pourrait paraître fade puisqu'il ne propose ni cours, ni exercices permettant d'apprendre à écrire un algorithme ou un programme. Cependant, il a le mérite de rassembler les algorithmes qu'il faut avoir vu au moins une fois dans sa vie de collégien et qu'il serait bon de connaître par cœur ! C'est en ce sens qu'il est tout de même un ouvrage de référence.

10. « Apprendre à programmer avec Scratch - Jeux et applications mathématiques » de Julien Jacquet aux éditions Ellipses :

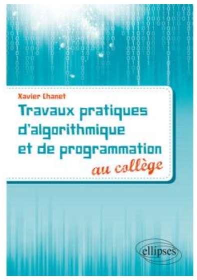
Ce livre a pour objectif d'initier de manière ludique le lecteur à la programmation informatique. Aucune connaissance préalable n'est nécessaire. Les chapitres s'enchaînent de manière progressive et permettent d'apprendre les notions de base de la programmation informatique et de créer des algorithmes simples utilisant des notions de mathématiques.

11. « Algorithmique et programmation au collège » de Xavier Chanet aux éditions Ellipses :



Ce livre s'adresse en premier lieu aux élèves des classes de collège. Il constitue un véritable outil d'accompagnement permettant à chacun, quel que soit son niveau, de maîtriser toutes les connaissances et compétences attendues.

12. « Travaux pratiques d'algorithmique et de programmation au collège » de Xavier Chanet aux éditions Ellipses :



> Ce livre s'adresse en premier lieu aux élèves des classes de collège. On y trouve en premier lieu quinze travaux pratiques entièrement corrigés et dont chacun a pour objectif la résolution d'un problème, l'édition d'une application ou la création d'un jeu.

Plus généralement, je vous invite à visiter mon site internet (www.mathieu-kieffer.com) rassemblant de nombreuses ressources (exercices, chaînes YouTube, films, applications, magazines, sites, livres) permettant d'apprendre les mathématiques et de se passionner pour elles. Enfin, puisque rien ne peut se substituer à la relation professeur-élève, j'invite chacun de mes élèves à me demander de l'aide, à en savoir davantage, en un mot, à être éclairé, il n'en sera que plus heureux...

« Il n'y a de progrès, pour nul écolier au monde, ni en ce qu'il entend, ni en ce qu'il voit, mais seulement en ce qu'il fait. »

Émile-Auguste Chartier dit « Alain »

Chapitre 1

Nombres entiers naturels

L'awalé est un jeu très ancien pratiqué en Afrique

1.1 Présentation

Définition 1. On appelle nombre entier naturel tout nombre auquel on peut aboutir en comptant sur ses doigts.

Exemple. 23 est un nombre entier naturel. $51,8$ et $\frac{3}{4}$ ne sont pas des nombres entiers naturels.

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Les nombres entiers naturels s'écrivent à l'aide des dix chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, appelés chiffres indo-arabes.
2. Deux nombres entiers naturels qui se suivent sont dits consécutifs. Exemple : 132 et 133 sont consécutifs.

Exercice. Déterminer le plus petit (le plus grand) nombre entier naturel de trois chiffres dont l'écriture contient des chiffres tous différents.

Remarque. Les nombres entiers naturels peuvent s'écrire en toutes lettres. Voici quelques règles d'orthographe :

1. Mille est invariable.
2. Vingt et cent prennent un « s » lorsqu'ils sont multipliés et qu'ils terminent l'écriture d'un nombre.
3. Un utilise le trait d'union pour les nombres inférieurs à cent.

Exemple. /

Vocabulaire : le rang de chaque chiffre dans l'écriture d'un nombre entier naturel porte un nom :

Milliards			Millions			Milliers	Centaines	Dizaines	Unités

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. On regroupe généralement les chiffres par trois. Exemple : 8 371 498.
2. On peut décomposer un nombre entier naturel selon le rang de chacun de ses chiffres.
   Exemple : $47\,369 = 40\,000 + 7\,000 + 300 + 60 + 9$.

Définition 2. L'ensemble de tous les nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$. On a donc : $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; 5; \ldots\}$

Exemple. 35 est un nombre entier naturel, on écrit : $35 \in \mathbb{N}$, qui signifie : « 35 appartient à l'ensemble des nombres entiers naturels ». $\frac{2}{5}$ n'est pas un nombre entier naturel, on écrit : $\frac{2}{5} \notin \mathbb{N}$, qui signifie : « $\frac{2}{5}$ n'appartient pas à l'ensemble des nombres entiers naturels ».

Exercice. Voici plusieurs petits exercices :

1. Pourquoi n'existe-t-il pas de plus grand nombre entier naturel ?
2. Écrire l'ensemble des nombres entiers naturels plus grands que 14 et plus petits que 24.
3. Combien existe-t-il de nombres entiers naturels consécutifs de 1 à 53 ? de 23 à 45 ? de 0 à 97 ?

1.2 Diviseurs et multiples

Définition 3. Soient m et n deux nombres entiers naturels. On dit que m est un multiple de n s'il existe un entier naturel k tel que $m = n \times k$.

Exemple. 56 est un multiple de 8 car $56 = 8 \times 7$.

Remarque. Les phrases suivantes sont équivalentes (i.e. synonymes) :

1. m est un multiple de n.
2. m est dans la table de n.
3. n est un diviseur de m.
4. n divise m.

Proposition 4. *Tout nombre entier naturel est multiple de* 1 *et lui-même.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $n = n \times 1$. Donc n est un multiple de 1 et de n. □

Proposition 5. 0 *est un multiple de tout nombre entier naturel.*

Démonstration. $0 = 0 \times n$ donc 0 est un multiple de n. □

Remarque. 0 ne divise aucun entier naturel non nul. En effet, si n est un entier naturel non nul, alors il ne peut être égal à $0 \times k$ car $0 \times k = 0$.

Vocabulaire : Si un entier naturel est un multiple de 2, alors il est appelé un entier naturel pair. Sinon, il est appelé un entier naturel impair.

Exercice. Voici quelques petits exercices :

1. Écrire l'ensemble des entiers naturels pairs plus grands que 15 et plus petits que 24.
2. Écrire l'ensemble des entiers naturels impairs plus grands que 22 et plus petits que 33.
3. Démontrer que 91 est un multiple de 13.
4. Démontrer que 17 divise 357.
5. Démontrer que 1 024 est divisible par 16.

Théorème 6. *(Critères de divisibilité) On peut savoir, a priori, si un nombre entier naturel est un multiple de certains entiers naturels simples :*

1. *Un nombre entier naturel est divisible par* 2 *si, et seulement si, son chiffre des unités est* 0, 2, 4, 6 *ou* 8.
2. *Un nombre entier naturel est divisible par* 5 *si , et seulement si, son chiffre des unités est* 0 *ou* 5.
3. *Un nombre entier naturel est divisible par* 3 *si, et seulement si, la somme de ses chiffres est un multiple de* 3.
4. *Un nombre entier naturel est divisible par* 9 *si, et seulement si, la somme de ses chiffres est un multiple de* 9.

Démonstration. Ce théorème est admis en Sixième et sera démontré dans quelques années. □

Exemple. /

Exercice. Écrire l'ensemble des diviseurs de 60 et 100.

Chapitre 2

Nombres décimaux - Présentation

Le boulier est l'ancêtre de la calculatrice

2.1 Écritures d'un nombre décimal

Définition 7. On appelle nombre décimal tout nombre ayant un nombre fini de chiffres à droite de sa virgule. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$. La partie située à gauche de la virgule est appelée la partie entière. Le résultat de la soustraction entre le nombre et sa partie entière est appelé la partie décimale du nombre.

Exemple. $312,68$ est un nombre décimal, 312 est sa partie entière, $0,68$ est sa partie décimale.

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Tout nombre entier est décimal, sa partie décimale étant simplement nulle. On a donc : $\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$.
2. On évite d'écrire des « 0 » inutiles. Exemple : $12,70 = 12,7$.

Vocabulaire : le rang de chaque chiffre dans l'écriture décimale d'un nombre porte un nom :

Milliers	Centaines	Dizaines	Unités	Dixièmes	Centièmes	Millièmes

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. On regroupe généralement les chiffres par trois de part et d'autre de la virgule. Exemple : $8\,371\,498$.
2. On peut décomposer un nombre décimal selon le rang de chacun de ses chiffres.
   Exemple : $47\,369,825 = 40\,000 + 7\,000 + 300 + 60 + 9 + 0,8 + 0,02 + 0,005$.

Proposition 8. *Tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ où a est un entier naturel et où b s'écrit avec un* 1 *suivi d'un certain nombre de* 0.

Démonstration. Considérons le nombre décimal $e_1e_2, d_1d_2d_3$. Alors on a : $e_1e_2, d_1d_2d_3 = \frac{e_1e_2\,d_1d_2d_3}{1\,000}$.
On généralise aisément à tout nombre décimal. □

Exemple. /

2.2 Comparaison de deux nombres décimaux

Définition 9. Soient a et b deux nombres décimaux.

1. Si a est supérieur ou égal à b, alors on écrit $a \geqslant b$.
2. Si a est strictement supérieur à b, alors on écrit $a > b$.
3. Si a est inférieur ou égal à b, alors on écrit $a \leqslant b$.
4. Si a est strictement inférieur à b, alors on écrit $a < b$.

Exemple. $8 \leqslant \frac{80}{10}$, $9,01 < 9 + \frac{2}{100}$, $3 + 0,5 + 0,008 \geqslant 3,503$ et $2\,019 > \frac{201\,890}{100}$.

Définition 10. On a les définitions suivantes :

1. Comparer deux nombres décimaux, c'est dire quel est le plus grand (ou quel est le plus petit).
2. Ranger des nombres décimaux dans l'ordre croissant, c'est écrire ces nombres du plus petit au plus grand.
3. Ranger des nombres décimaux dans l'ordre décroissant, c'est écrire ces nombres du plus grand au plus petit.

Exemple. Voici un rangement dans l'ordre croissant :

$$2,6 < \frac{261}{100} < 2 + \frac{6}{10} + \frac{3}{100} < \frac{27}{10}$$

2.3 Demi-droite graduée

Définition 11. On appelle demi-droite graduée toute demi-droite dont l'origine représente le zéro, sur laquelle on a choisi un segment unité et que l'on a orientée.

Exemple. /

Remarque. Sur cette demi-droite graduée, on peut associer à chaque nombre un unique point de la demi-droite et, réciproquement, à chaque point de la demi-droite, on peut associer un unique nombre. Il est donc possible de se repérer sur une demi-droite graduée.

2.4 Encadrement

Définition 12. Soit a un nombre décimal. On appelle encadrement de a la donnée de deux nombres décimaux b et c tels que $b < a < c$. On peut préciser le type d'encadrement en mentionnant son amplitude $c - b$:

1. Si $c - b = 1$, alors on parle d'encadrement d'amplitude une unité.
2. Si $c - b = 0,1$, alors on parle d'encadrement d'amplitude un dixième.
3. Si $c - b = 0,01$, alors on parle d'encadrement d'amplitude un centième.

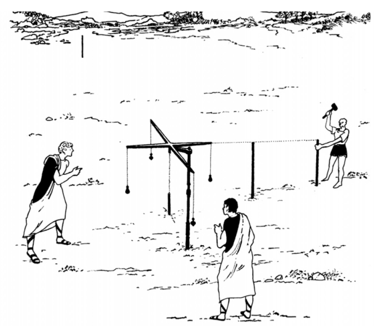
Exemple. $17 < 17,4 < 18$ est un encadrement d'amplitude une unité de $17,4$. Aussi, $17,36 < 17,4 < 17,46$ est un encadrement d'amplitude un dixième de $17,4$.

Remarque. Un encadrement d'amplitude donnée n'est pas unique. Bien au contraire, il en existe une infinité.

Exemple. $17 < 17,4 < 18$ et $17,2 < 17,4 < 18,2$ sont tous les deux des encadrements d'amplitude une unité de $17,4$.

Chapitre 3

Éléments de géométrie plane



Il y a 3 000 ans, en Égypte, des arpenteurs mesurent un champ de blé

pour en retrouver les limites après la crue du Nil

Dans tout ce chapitre, nous ne discuterons pas du concept de point. Nous ne tenterons pas le définir et nous nous fierons à l'idée intuitive universellement partagée.

3.1 Droites

Définition 13. Soient A et B deux points du plan. On appelle droite passant par A et B l'ensemble des points alignés avec A et B. On la note : (AB).

Illustration : $M \in (AB)$ et $N \notin (AB)$.

Remarque. Par un seul point du plan, il passe une infinité de droites. Exemple : /

Affirmation. Par deux points distincts du plan, il passe une unique droite.

Remarque. Cette affirmation, appelée aussi axiome d'Euclide, est fausse sur une sphère ou sur une selle de cheval. Exemple : /

Définition 14. Trois points du plan sont dits alignés s'ils appartiennent à une même droite.

Exemple. /

Remarque. Cette définition créé un cercle vicieux avec la définition 13. Cela est absolument à proscrire en mathématiques. Cependant, en classe de Sixième, il est difficilté d'éviter un cercle vicieux en raison du manque de connaissances.

Exercice. Placer cinq points B, E, H, M et T du plan tels que :

1. H, T et B soient alignés.
2. B, M et T soient alignés.
3. E, T et M soient alignés.

Définition 15. Deux droites du plan sont dites sécantes si leur intersection est réduite à un point (i.e. si elles ont un unique point en commun).

Illustration : /

Définition 16. Deux droites d et d' du plan sont dites perpendiculaires si elles sont sécantes en formant quatre angles droits. On écrit alors $d \perp d'$.

Illustration : /

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. On ne code qu'un seul des quatre angles droits pour des raisons qui sont explicitées dans le cours de Cinquième.
2. On peut tracer deux droites perpendiculaires uniquement à l'aide de pliages.

Proposition 17. *Par un point du plan, on ne peut tracer qu'une seule droite perpendiculaire à une droite donnée.*

Démonstration. Admise. □

Illustration : /

Remarque. Pour tracer une telle droite, il existe deux grandes manières :

1. Avec l'équerre : /
2. Avec le compas : /

Définition 18. Deux droites d et d' du plan sont dites parallèles si elles ne sont pas sécantes. On écrit alors $d \mathbin{/\!/} d'$.

Illustration : /

Proposition 19. *(Postulat d'Euclide) Par un point du plan, on ne peut tracer qu'une seule droite parallèle à une droite donnée.*

Démonstration. Admise. □

Illustration : /

Remarque. Pour tracer une telle droite, il existe deux grandes manières :

1. Avec l'équerre : /
2. Avec le compas : /

3.2 Demi-droites

Définition 20. Soient A et B deux points distincts du plan. On appelle demi-droite d'origine A passant par B l'ensemble des points de la droite (AB) situés du « côté » de B. On la note $[AB)$.

Illustration : $M \in [AB)$ et $N \notin [AB)$.

Remarque. Les demi-droites $[AB)$ et $[BA)$ sont dites opposées.

Exercice. Soit (BC) une droite du plan.

1. Soit A un point du plan tel que $A \in [BC)$.
2. Soit E un point du plan tel que $E \in (BC)$ et $E \notin [BC)$.
3. Tracer la demi-droite $[AB)$ en rouge et la demi-droite $[BA)$ en vert.
4. Donner deux autres noms de la demi-droite $[EB)$.

3.3 Segments

Définition 21. Soient A et B deux points distincts du plan. On appelle segment d'extrémités A et B l'ensemble des points de la droite (AB) appartenant aux deux demi-droites $[AB)$ et $[BA)$. On le note $[AB]$.

Illustration : $M \in [AB]$ et $N \notin [AB]$.

Définition 22. On appelle longueur d'un segment $[AB]$ la plus courte distance séparant les points A et B. On la note AB.

Illustration : /

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. On peut comparer des longueurs de segments à l'aide du compas uniquement, sans même les mesurer.
2. Cela étant, il est habituel de mesurer un segment en centimètres, cent fois plus petit que le mètre, unité du système international, dont voici le tableau de conversion associé :

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Proposition 23. *Soit $[AB]$ un segment du plan. Il existe un unique point I du plan tel que :*

1. $I \in [AB]$.
2. $IA = IB$.

Le point I est appelé le milieu du segment $[AB]$.

Exemple. /

Remarque. Si l'une des deux conditions 1. et 2. précédentes n'est pas respectée, alors I n'est pas le milieu du segment $[AB]$. Exemples : /

Proposition 24. *Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors $AI = BI = \frac{AB}{2}$.*

Démonstration. On a $AB = AI + IB$. Or $AI = IB$ par définition. Donc $AB = AI + AI$, soit $AB = 2AI$ et donc $AI = \frac{AB}{2}$. $\square$

Exercice. Voici deux petits exercices :

1. Soit d une droite du plan. Soient A, B et I trois points appartenant à cette droite d et tels que B soit le milieu de $[AI]$.
2. Soit O le milieu du segment $[CP]$. On sait que $CO = 45\,\text{mm}$. Calculer CP.

Définition 25. Soit $[AB]$ un segment. On appelle médiatrice du segment $[AB]$ la droite perpendiculaire au segment $[AB]$ passant par son milieu.

Illustration : /

Remarque. Nous verrons une construction à l'aide du compas de la médiatrice d'un segment dans un chapitre ultérieur.

3.4 Cercles

Définition 26. Soient O un point et r un nombre réel. On appelle cercle de centre O et de rayon r, noté $\mathscr{C}(O;r)$, l'ensemble des points du plan situés à une distance r du point O. Plus formellement, $\mathscr{C}(O;r) = \{M \in \mathscr{P},\, OM = r\}$.

Illustration : /

Définition 27. Soit $\mathscr{C}(O;r)$ un cercle. Soient A et B deux points appartenant à $\mathscr{C}(O;r)$. Le segment $[AB]$ est appelé une corde du cercle. Si de plus, $O \in [AB]$, alors $[AB]$ est appelé un diamètre du cercle. On dit alors que les points A et B sont diamétralement opposés.

Illustration : /

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Un point N tel que $ON < r$ est dit intérieur au cercle $\mathscr{C}(O;r)$.
2. L'ensemble des points N du plan tels que $ON < r$ est appelé le disque de centre O et de rayon r. On le note $\mathscr{D}(O;r)$.
3. Un point N tel que $ON > r$ est dit extérieur au cercle $\mathscr{C}(O;r)$.

Chapitre 4

Nombres décimaux - Addition, soustraction et multiplication

La multiplication dans les poids à peser l'or

4.1 Addition et soustraction

Définition 28. On appelle :

1. Somme, le résultat d'une addition.
2. Différence, le résultat d'une soustraction.
3. Termes, les nombres que l'on additionne ou que l'on soustrait.

Exemple. /

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Il existe trois grandes façons de calculer une somme ou une différence :
   (a) En posant l'opération. Exemple : /
   (b) En utilisant la calculatrice. Exemple : /
   (c) En effectuant le calcul mentalement à l'aide d'astuces de calculs. Exemple : /
2. On peut vérifier une addition à l'aide d'une soustraction. Exemple : /
3. On peut vérifier une soustraction à l'aide d'une addition. Exemple : /

4.2 Multiplication

Définition 29. On appelle :

1. Produit, le résultat d'une multiplication.
2. Facteurs, les nombres que l'on multiplie.

Exemple. /

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Là encore, il existe trois grandes façons d'effectuer une multiplication :
   (a) En posant l'opération. Exemple : /
   (b) En utilisant la calculatrice. Exemple : /
   (c) En effectuant le calcul mentalement à l'aide d'astuces de calculs. Exemple : /
2. On peut vouloir se contenter d'un ordre de grandeur d'un produit sans effectuer la multiplication. Pour cela, on remplace les facteurs présents par des facteurs proches mais plus simples. Exemple : /
3. Il est intéressant, afin de vérifier une multiplication, de se concentrer sur le chiffre des unités qu'il est facile de déterminer. Exemple : /
   Attention, cette vérification ne garantit pas l'exactitude du calcul. Elle permet simplement d'éviter certaines erreurs.
4. La preuve par neuf est un second moyen de vérification.
   Exemple : l'une des deux égalités suivantes est juste, laquelle ? $12,7 \times 34 = 431,8$ ou $12,7 \times 34 = 331,8$?
   Pour la première égalité : d'une part, $1+2+7 = 10$ et $1+0 = 1$, d'autre part, $3+4 = 7$. Ainsi, $1 \times 7 = 7$. Et $4+3+1+8 = 16$ et $1+6 = 7$. Donc rien n'indique une erreur.
   Pour la seconde égalité : d'une part, $1+2+7 = 10$ et $1+0 = 1$, d'autre part, $3+4 = 7$. Ainsi, $1 \times 7 = 7$. Et $3+3+1+8 = 15$ et $1+5 = 6 \neq 7$. Donc cette égalité est nécessairement fausse.
   Attention, cette vérification ne garantit pas l'exactitude du calcul. Elle permet simplement de détecter certaines erreurs.

4.3 Organisation d'un calcul

Proposition 30. *Voici quelques propriétés de l'addition, de la soustraction et de la multiplication de nombres décimaux :*

1. *L'addition est commutative, associative et admet un élément neutre : 0. Formellement, si a, b et c désignent trois nombres décimaux, alors :*
   (a) $a + b = b + a$
   (b) $(a + b) + c = a + (b + c)$
   (c) $a + 0 = a$
2. *La multiplication est commutative, associative et admet un élément neutre : 1. Formellement, si a, b et c désignent trois nombres décimaux, alors :*
   (a) $a \times b = b \times a$
   (b) $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
   (c) $a \times 1 = a$

Démonstration. Admise. □

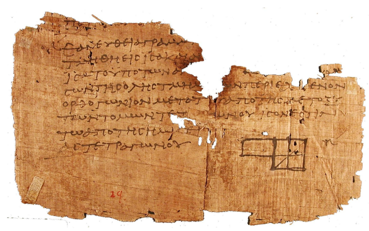
Exemple. /

Remarque. Il est intéressant de connaître quelques astuces de calcul afin de rendre certains calculs possibles mentalement :

1. Multiplications par 10, 100 ou 1 000. Exemples : /
2. Multiplications par $0,1$, $0,01$ ou $0,001$. Exemples : /
3. Multiplications par 8, 9, 11 ou 12. Exemples : /
4. Multiplications par $0,5$, $0,25$ ou $0,2$. Exemples : /

Chapitre 5

Positions relatives de droites dans le plan



Les *Éléments* d'Euclide sont un traité mathématique. Il est le plus ancien exemple connu
et son influence sur le développement de la logique et de la science occidentale est fondamentale

5.1 Positions relatives de deux droites

Proposition 31. *Deux droites dans le plan peuvent être :*

1. *Sécantes (i.e. elles ont un unique point d'intersection) ;*
2. *Parallèles (éventuellement confondues).*

Démonstration. Découle de la définition de deux droites sécantes et de la définition de deux droites parallèles. □

Illustration : /

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. Deux droites parallèles non confondues sont dites strictement parallèles.
2. Voici un diagramme de Venn [1] synthétisant les différentes familles de couples de droites existantes : /

5.2 Positions relatives de trois droites

Proposition 32. *Trois droites du plan peuvent être :*

1. *Sécantes en un seul point, on dit alors qu'elles sont concourantes.*
2. *Sécantes deux à deux.*
3. *Parallèles deux à deux.*
4. *Sécantes dont deux parallèles.*

1. John Venn est un mathématicien et logicien britannique né en 1834 et mort en 1923.

Démonstration. Admise. □

Illustration : /

Théorème 33. *Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles. Plus formellement :*

$$\begin{cases} d \perp d'' \\ d' \perp d'' \end{cases} \Rightarrow d \mathbin{/\mkern-5mu/} d'$$

Démonstration. Soient d et d' deux droites perpendiculaires à d''.
Si d et d' sont confondues, alors elles sont parallèles par définition.
Sinon, d et d' sont soit strictement parallèles, soit sécantes.
Si elles étaient sécantes en un point, il y aurait deux droites perpendiculaires à d'' passant par ce point, ce qui est impossible d'après la proposition 13. Donc d et d' ne peuvent pas avoir de point commun. Autrement dit, d et d' sont strictement parallèles. □

Théorème 34. *Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles. Plus formellement :*

$$\begin{cases} d \mathbin{/\mkern-5mu/} d'' \\ d' \mathbin{/\mkern-5mu/} d'' \end{cases} \Rightarrow d \mathbin{/\mkern-5mu/} d'$$

Démonstration. Soient d et d' deux droites parallèles à d''.
Si d et d' sont confondues, alors elles sont parallèles par définition.
Sinon, d et d' sont soit strictement parallèles, soit sécantes.
Si d et d' étaient sécantes en un point O, alors on pourrait mener deux parallèles à d'' passant par O, ce qui est en contradiction avec le postulat d'Euclide. Ainsi, les droites d et d' n'ont pas de point commun : elles sont donc strictement parallèles. □

Théorème 35. *Si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Plus formellement :*

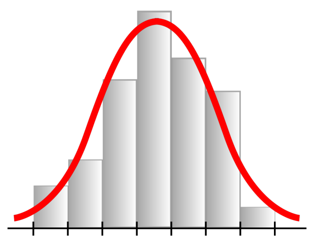
$$\begin{cases} d \mathbin{/\mkern-5mu/} d' \\ d'' \perp d \end{cases} \Rightarrow d'' \perp d'$$

Démonstration. Soient d et d' deux droites parallèles. Soit d'' une droite perpendiculaire à d.
Si d et d' sont confondues, alors c'est évident.
Sinon, d'' coupe d' en un point O. La droite perpendiculaire à d'' passant par O est parallèle à d d'après le théorème 33. Alors, d'après le postulat d'Euclide, cette droite est nécessairement d'. Par conséquent, $d'' \perp d'$. □

Remarque. On dit parfois que d'' est une perpendiculaire commune à d et d'.

Chapitre 6

Statistiques descriptives



La statistique est l'étude d'un phénomène par la collecte de données, leur traitement, leur analyse, l'interprétation des résultats et leur présentation afin de rendre les données compréhensibles par tous

6.1 Tableaux et graphiques

Remarque. Un tableau de nombres à deux lignes peut se représenter graphiquement par des points dans un repère. En général, les nombres de la première ligne sont appelés les abscisses des points et les nombres de la seconde ligne sont appelés les ordonnées des points.

Exemple. Voici un tableau résumant la taille d'une plante en fonction du numéro de la semaine écoulée :

Semaine	1	2	3	4	5
Taille d'une plante (en cm)	$2,5$	5	10	15	18

Plaçons les points associés dans un repère du plan : /

6.2 Diagrammes en bâtons (ou en barres)

Remarque. Dans un diagramme en bâtons, les bâtons ont des hauteurs proportionnelles aux nombres qu'ils représentent.

Exemple. Voici un tableau résumant le nombre d'internautes en France en fonction de l'année :

Année	1996	1997	1998	1999
Nombre d'internautes en France (en %)	$3,4$	$3,8$	$7,8$	$9,9$
Hauteur des bâtons (en mm)	$8,5$	$9,5$	$19,5$	$25,5$

Traçons désormais les bâtons associés dans un repère du plan : /

6.3 Diagrammes circulaires et semi-circulaires

Remarque. Pour résumer un partage, on peut réaliser un diagramme circulaire avec un disque (ou semi-circulaire avec un demi-disque). Dans ce cas, les angles sont proportionnels aux nombres qu'ils représentent.

Exemple. Sur ses trente jours de vacances, Charlotte en a passé huit à la campagne, douze à la mer et dix à la montagne.

Lieu de séjour	Campagne	Mer	Montagne	Total
Nombre de jours	8	12	10	30
Angle (en degrés)	96	144	120	360

On peut désormais construire le diagramme circulaire associé.

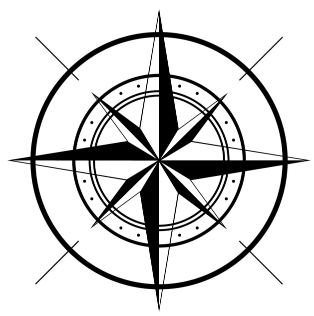
6.4 Histogramme

Remarque. Dans un histogramme, les aires des rectangles sont proportionnelles aux nombres qu'ils représentent. Si ces rectangles ont la même largeur, leurs hauteurs sont proportionnelles à ces nombres.

Exemple. Dans une classe, dix élèves ont une taille compris entre $1,40\,\mathrm{m}$ et $1,50\,\mathrm{m}$, douze élèves ont une taille comprise entre $1,50\,\mathrm{m}$ et $1,60\,\mathrm{m}$ et six élèves ont une taille comprise entre $1,60\,\mathrm{m}$ et $1,70\,\mathrm{m}$. On obtient alors l'histogramme suivant : /

Chapitre 7

Angles



Une rose des vents

7.1 Définition d'un angle

Définition 36. Soient $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites de même origine O. Ces deux demi-droites déterminent l'angle, noté $\widehat{xOy}$ ou $\widehat{yOx}$, dont les dont les demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ sont appelées les côtés de l'angle et dont le point O est appelé le sommet de l'angle.

Illustration : /

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. La lettre du milieu est toujours le sommet de l'angle.
2. Si deux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont égaux, alors on écrit $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ et on les code avec le même symbole sur une figure.

Fait. Habituellement, les angles sont mesurés en degrés[a] *à l'aide d'un instrument de géométrie appelé le rapporteur. Ce dernier est gradué en degrés et s'obtient en partageant un demi-cercle en* 180 *partie égales. Le centre du demi-cercle est appelé le centre du rapporteur.*

a. Un degré représente le 1/360 d'un tour complet. Lorsque cet angle est en rapport avec un méridien de référence, il indique un emplacement le long d'un grand cercle d'une sphère, comme la Terre. Le rapport entre 365, 25 (nombre de jours moyen de la rotation de la Terre autour du Soleil) et 360° (tour complet) permet d'établir l'approximation suivante : « La Terre tourne d'environ un degré autour du Soleil chaque jour ».

Exemple. Voici comment mesure un angle donné à l'aide d'un rapporteur : /

Définition 37. Voici les différentes familles d'angles :

1. Les angles saillants, dont la mesure est comprise entre 0° et 180°, parmi lesquels :
   (a) Les angles aigus, dont la mesure est comprise entre 0° et 90°.
   (b) Les angles obtus, dont la mesure est comprise entre 90° et 180°.
2. Les angles rentrants, dont la mesure est comprise entre 180° et 360°.

Exemple. /

Remarque. Aussi, il existe trois angles particuliers :

1. L'angle droit, qui mesure 90°.
2. L'angle plat, qui mesure 180°.
3. L'angle nul, qui mesure 0°.

Définition 38. Deux angles sont dits adjacents s'ils ont le même sommet, un côté commun et s'ils sont situés de part et d'autre de ce côté commun.

Exemple. /

7.2 Constructions d'un angle

Remarque. Voici quelques constructions à connaître :

1. Construire un angle de mesure donnée avec le rapporteur : /
2. Reproduire un angle donné avec le compas : /

Exercice. Voici quatre petits exercices :

1. Construire le triangle ARS tel que $AR = 6\,\text{cm}$, $\widehat{RAS} = 95°$ et $\widehat{ARS} = 30°$.
2. Construire un triangle GHK tel que $GH = 3,5\,\text{cm}$, $GK = 6,7\,\text{cm}$ et $\widehat{HGK} = 62°$.
3. Construire un triangle LMP rectangle en M tel que $LM = 4\,\text{cm}$ et $MP = 5\,\text{cm}$.
4. Construire quatre triangles isocèles non superposables sachant que chaque triangle a un angle qui mesure 40° et un côté qui mesure 6 cm.

7.3 Bissectrice d'un angle

Définition 39. Soit $\widehat{xOy}$ un angle. On appelle bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{xOy}$ la droite qui partage cet angle en deux angles adjacents égaux.

Illustration : /

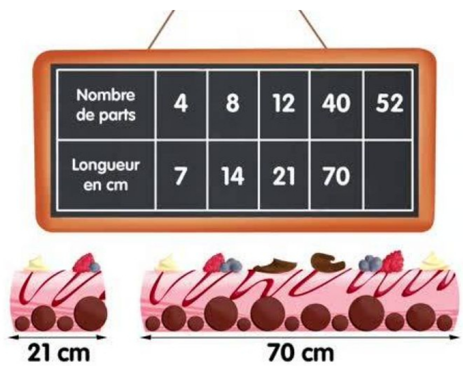
Remarque. La bissectrice intérieure d'un angle peut se construire à l'aide du rapporteur mais aussi à l'aide du compas. Exemples : /

Exercice. Voici deux petits exercices :

1. Soit ABC un triangle quelconque. Construire un point P appartenant au segment $[BC]$ tel que $\widehat{BAP} = \widehat{PAC}$.
2. Soit SOL un triangle tel que $OL = 8\,\text{cm}$, $\widehat{SOL} = 50°$ et $\widehat{OLS} = 70°$.
   (a) Construire les bissectrices intérieures des angles $\widehat{SOL}$ et $\widehat{OLS}$. Ces droites se coupent en I.
   (b) Tracer la droite (SI) et mesurer les angles $\widehat{OSI}$ et $\widehat{ISL}$. Que constate-t-on ?

Chapitre 8

Proportionnalité



Une situation de proportionnalité

8.1 Tableaux de proportionnalité

Définition 40. Il y a proportionnalité dans un tableau de nombres, lorsque les nombres de la seconde ligne s'obtiennent en multipliant par un même nombre, appelé coefficient de proportionnalité, ceux de la première ligne.

Exemple. Voici deux situations :

1.

2	4, 2	6
5	10, 5	15

est un tableau de proportionnalité car $\frac{5}{2} = \frac{10{,}5}{4{,}2} = \frac{15}{6} = 2{,}5$.

2.

3	4	5
9	12	14

n'est pas un tableau de proportionnalité car $\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = 3$ mais $\frac{14}{5} \neq 3$.

Remarque. Lorsque le tableau est un tableau de proportionnalité, on dit que la seconde ligne est proportionnelle à la première.

Exercice. Compléter les deux tableaux de proportionnalité suivants :

1.

8	9	4	6	5	11
			42		

2.

5	4	9	7	8	12
		18,9			

8.2 Propriétés des tableaux de proportionnalité

Proposition 41. *Dans un tableau de proportionnalité, on peut :*

1. *Multiplier ou diviser une colonne par a.*
2. *Additionner ou soustraire deux colonnes.*

Démonstration. Admise. □

Exemple. /

Exercice. Compléter les tableaux de proportionnalité suivants :

1.

11,7		19,5			
3	2	5	8	11	13

2.

	13	11		9	20
10,5		16,5	3	13,5	

Proposition 42. *Si*

a	b
c	d

est un tableau de proportionnalité, alors $d = \frac{b \times c}{a}$.

Démonstration. Admise. □

Exemple. Pour ensemencer 300 mètres carrés, il faut 180 grammes de graines. Combien faut-il de graines pour ensemencer 450 mètres carrés ?

300	450
180	x

, on a : $x = \frac{180 \times 450}{300} = 270$. Il faudra 270 grammes de graines.

Exercice. Sur le marché, $2,8$ kilogrammes de haricots verts coûtent $8,68$ euros. Combien coûtent $1,2$ kilogrammes de haricots verts ?

8.3 Pourcentages

Remarque. Calculer $p\,\%$ d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par p et le diviser par 100.

Exemple. $12\,\%$ de 370 : $370 \times 0,12 = 44,4$.

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. Calculer le résultat d'une augmentation de $15\,\%$ sur 420 revient à calculer $115\,\%$ de 420 : $420 \times 1,15 = 483$.
2. Calculer le résultat d'une diminution de $8\,\%$ sur 640 revient à calculer $92\,\%$ de 640 : $640 \times 0,92 = 588,8$.

Exercice. Le prix d'une voiture subit une hausse de $20\,\%$ suivie d'une baisse de $20\,\%$. Comment a évolué son prix ?

8.4 Échelles

Définition 43. L'échelle du dessin d'un objet est le nombre par lequel il faut multiplier les dimensions de l'objet pour obtenir les dimensions du dessin.

Exemple. Sur une carte I.G.N. au 1/25 000, une longueur de 600 mètres est représentée par :
$600 \times \frac{1}{25\,000} = 0{,}024$ mètre, soit $2{,}4$ centimètres.

Exercice. Sur une carte I.G.N. au 1/5 000, un champ rectangulaire de deux hectares est représenté par un rectangle de 32 millimètres de long. Calculer la largeur du champ sur la carte.

Chapitre 9

Symétrie axiale

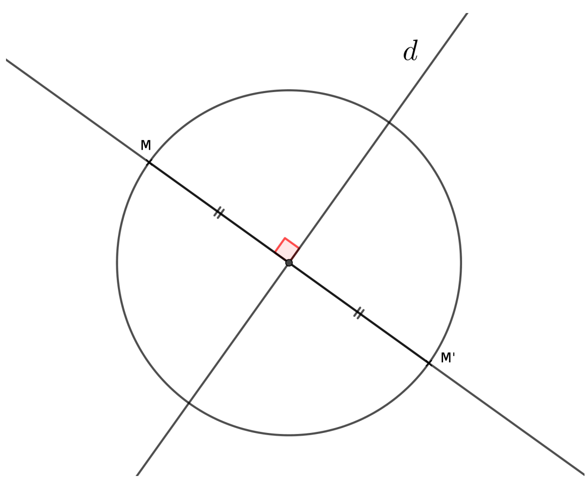
La symétrie axiale dans les Vosges

9.1 Symétrique d'un point par rapport à une droite

Définition 44. Soient M un point et d une droite du plan. On appelle symétrie axiale d'axe d l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que :

1. Si $M \in d$, alors $M' = M$.
2. Si $M \notin d$, alors d est la médiatrice de $[MM']$.

Notation : Cette transformation du plan se note en général : $s_d : M \longmapsto M'$.
Illustration :



Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Pour tout point M du plan, on a : $s_d(s_d(M)) = M$. Autrement dit, la composée de la symétrie axiale d'axe d avec elle-même est l'application identité. On dit que la symétrie axiale d'axe d est involutive.
2. Ainsi M' est le symétrique de M par rapport à d et M est le symétrique de M' par rapport à d. On dit donc que M et M' sont symétriques par rapport à d.

Définition 45. Voici deux définitions :

1. Deux figures sont dites symétriques par rapport à une droite si leurs points sont deux à deux symétriques par rapport à cette droite.
2. On dit qu'une droite est un axe de symétrie d'une figure si le symétrique de cette figure par rapport à cette droite est elle-même.

Exemple. Deux figures symétriques / Axe de symétrie d'une figure.

Remarque. Une figure donnée admet un axe de symétrie Δ si, lorsque l'on plie cette figure suivant la droite Δ, les deux parties de la figure se recouvrent.

Proposition 46. *Voici quelques propriétés essentielles de la symétrie axiale :*

1. *Si trois points sont alignés, alors leurs symétriques respectifs par rapport à une droite sont alignés.*
2. *Le symétrique d'un segment par rapport à une droite est un segment de même longueur.*
3. *Le symétrique d'un angle par rapport à une droite est un angle de même mesure.*
4. *Si deux figures sont symétriques par rapport à une droite alors elles sont égales (i.e. sont superposables, c'est-à-dire qu'elles ont les mêmes longueurs et les mêmes angles).*
5. *Si une droite est parallèle à l'axe de symétrie, alors sa symétrique est une droite parallèle à l'axe et les deux droites sont équidistantes de l'axe.*
6. *Si une droite n'est pas parallèle à l'axe de symétrie, sa symétrique est une droite qui coupe l'axe au même point que la droite donnée et les deux droites symétriques forment un même angle avec l'axe.*

Démonstration. 1. Admise.
2. L'image d'un segment est un segment d'après 1. Le reste est admis.
3. Admise.
4. Découle de 2. et 3.
5. Découle de 1. et 3.
6. Découle de 1. et 3. □

Remarque. Soit $[AB]$ un segment. Soit d sa médiatrice. Soit O un point appartenant à d. Le symétrique du segment $[OA]$ par rapport à d est le segment $[OB]$. La symétrie axiale conservant les longueurs, on a : $OA = OB$. Ainsi, nous en déduisons une nouvelle construction, à l'aide du compas, de la médiatrice du segment $[AB]$: /

9.2 Figures symétriques

Proposition 47. *La médiatrice d'un segment est un axe de symétrie de ce segment.*

Démonstration. Découle directement de la définition de la symétrie axiale. □

Proposition 48. *La bissectrice intérieure d'un angle est un axe de symétrie de cet angle.*

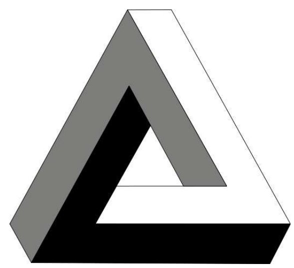
Démonstration. Découle directement de la définition de la bissectrice intérieure d'un angle. □

Exercice. Voici deux petits exercices :

1. Déterminer les éventuels axes de symétrie de chacune des lettres de l'alphabet écrites en capitales d'imprimerie.
2. Déterminer les éventuels axes de symétrie de chacune des lettres de l'alphabet braille.

Chapitre 10

Triangles



Le triangle de Penrose est un objet impossible conçu par le mathématicien Roger Penrose dans les années 1950.

10.1 Généralités

Définition 49. On appelle triangle tout polygone à trois côtés.

Illustration : /

Définition 50. Soit ABC un triangle, on appelle :

1. Hauteur issue de A, ou relative à $[BC]$, la droite perpendiculaire à (BC) passant par A.
2. Médiane issue de A, ou relative à $[BC]$, la droite passant par A et par le milieu du côté $[BC]$.

Illustration : /

Remarque. On peut effectuer quelques remarques :

1. Tracer les trois hauteurs d'un triangle ABC quelconque. Que remarque-t-on ?
2. Tracer les trois médianes d'un triangle ABC quelconque. Que remarque-t-on ?
3. Tracer les trois médiatrices d'un triangle ABC quelconque. Que remarque-t-on ?
4. Tracer les trois bissectrices d'un triangle ABC quelconque. Que remarque-t-on ?

10.2 Triangle isocèle

Définition 51. On appelle triangle isocèle tout triangle ayant deux côtés égaux. Le côté non égal aux deux autres est appelé la base du triangle et le sommet commun aux deux cotés égaux est appelé le sommet principal.

Illustration : /

Théorème 52. *Si un triangle est isocèle, alors ses angles adjacents à la base sont égaux.*

Démonstration. Admise cette année, traitée en classe de Cinquième. □

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. Dans un triangle isocèle, la bissectrice de l'angle au sommet est aussi médiane, hauteur et médiatrice.
2. La réciproque du théorème 49 est vraie aussi.

Théorème 53. *Si un triangle a deux angles égaux, alors il est isocèle.*

Démonstration. Admise cette année, traitée en classe de Cinquième. □

Remarque. On peut résumer les deux théorèmes précédents en une seule phrase : « Un triangle est isocèle si, et seulement si, il possède deux angles égaux. » ou encore « Pour qu'un triangle soit isocèle, il faut et il suffit qu'il possède deux angles égaux. ». On dit que « posséder deux angles égaux » est une propriété *caractéristique* des triangles isocèles.

10.3 Triangle équilatéral

Définition 54. On appelle triangle équilatéral tout triangle ayant ses trois côtés égaux.

Illustration : /

Théorème 55. *Si un triangle est équilatéral, alors ses trois angles sont égaux.*

Démonstration. Un triangle équilatéral est isocèle en chacun de ses sommets. Il suffit alors d'appliquer le théorème 49. □

Remarque. La réciproque du théorème 52 est vraie aussi.

Théorème 56. *Si un triangle a ses trois angles égaux, alors il est équilatéral.*

Démonstration. Il suffit alors d'appliquer le théorème 50. □

Remarque. Là encore, l'égalité des trois angles est une propriété caractéristique des triangles équilatéraux.

10.4 Triangle rectangle

Définition 57. On appelle triangle rectangle tout triangle ayant un angle droit. Le côté opposé à l'angle droit est appelé l'hypoténuse.

Illustration : /

Remarque. On peut toujours considérer un triangle rectangle comme la « moitié » d'un triangle isocèle.

Exemple. Construisons les triangles ABC et DEF tels que :

1. ABC est rectangle en A, $BC = 6\,\text{cm}$ et $\widehat{ABC} = 34°$.
2. DEF est rectangle en D, $EF = 6\,\text{cm}$ et $DF = 4\,\text{cm}$.

Chapitre 11

Division euclidienne

Le nom de division euclidienne est un hommage rendu à Euclide qui en explique
le principe par soustractions successives dans ses *Éléments*

11.1 Définition

Théorème 58. *(Théorème de la division euclidienne) Soient a et b deux nombres entiers naturels. Alors il existe un unique couple d'entiers naturels $(q;r)$ tel que :*

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r < b \end{cases}$$

Démonstration. Admise. □

Exemple. /

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. La division euclidienne traduit un partage.
2. a est appelé le dividende, b est appelé le diviseur, q est appelé le quotient et r est appelé le reste dans la division euclidienne de a par b.

Exercice. Voici quelques petits exercices :

1. Poser les divisions euclidiennes suivantes : $357 \div 8$, $871 \div 72$, $2\,296 \div 29$ et $3\,555 \div 17$.
2. Les vingt-quatre élèves d'une classe se sont partagés 624 bonbons. Combien chacun a-t-il reçu de bonbons ?
3. Dans une division euclidienne, le diviseur est huit, le reste est la moitié du diviseur et le quotient est le triple du reste. Déterminer le dividende.
4. Écrire toutes les divisions euclidiennes pour lesquelles le quotient est sept et le diviseur est huit.
5. Dans un division euclidienne par sept, le reste est le double du quotient. Déterminer cette division.

11.2 Diviseurs et multiples

Définition 59. Soient a et b deux nombres entiers naturels. On dit que a est un multiple de b si le reste de la division euclidienne de a par b est nul (i.e. égal à zéro).

Exemple. 56 est un multiple de 8 car $56 = 8 \times 7 + 0$.

Remarque. Les phrases suivantes sont équivalentes (i.e. synonymes) :

1. a est un multiple de b.
2. a est dans la table de b.
3. b est un diviseur de a.
4. b divise a.

Proposition 60. *Tout nombre entier naturel est multiple de* 1 *et lui-même.*

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{N}$. On a : $a = a \times 1$. Donc a est un multiple de 1 et de a. □

Proposition 61. 0 *est un multiple de tout nombre entier naturel.*

Démonstration. $0 = 0 \times a$ donc 0 est un multiple de a. □

Remarque. 0 ne divise aucun entier naturel non nul. En effet, si a est un entier naturel non nul, alors il ne peut être égal à $0 \times k$ car $0 \times k = 0$.

Vocabulaire : Si un entier naturel est un multiple de 2, alors il est appelé un entier naturel pair. Sinon, il est appelé un entier naturel impair.

Exercice. Voici quelques petits exercices :

1. Écrire l'ensemble des entiers naturels pairs plus grands que 15 et plus petits que 24.
2. Écrire l'ensemble des entiers naturels impairs plus grands que 22 et plus petits que 33.
3. Démontrer que 91 est un multiple de 13.
4. Démontrer que 17 divise 357.
5. Démontrer que 1 024 est divisible par 16.

Théorème 62. *(Critères de divisibilité) On peut savoir, a priori, si un nombre entier naturel est un multiple de certains entiers naturels simples :*

1. *Un nombre entier naturel est divisible par* 2 *si, et seulement si, son chiffre des unités est* 0, 2, 4, 6 *ou* 8.
2. *Un nombre entier naturel est divisible par* 5 *si , et seulement si, son chiffre des unités est* 0 *ou* 5.
3. *Un nombre entier naturel est divisible par* 3 *si, et seulement si, la somme de ses chiffres est un multiple de* 3.
4. *Un nombre entier naturel est divisible par* 9 *si, et seulement si, la somme de ses chiffres est un multiple de* 9.

Démonstration. Ce théorème est admis en Sixième et sera démontré dans quelques années. □

Exemple. /

Exercice. Voici quelques petits exercices :

1. En n'utilisant que les chiffres 4, 5, 6 et 7, écrire le nombre de trois chiffres différents :
   (a) Multiple de deux et le plus petit possible.

(b) Multiple de trois et le plus grand possible.

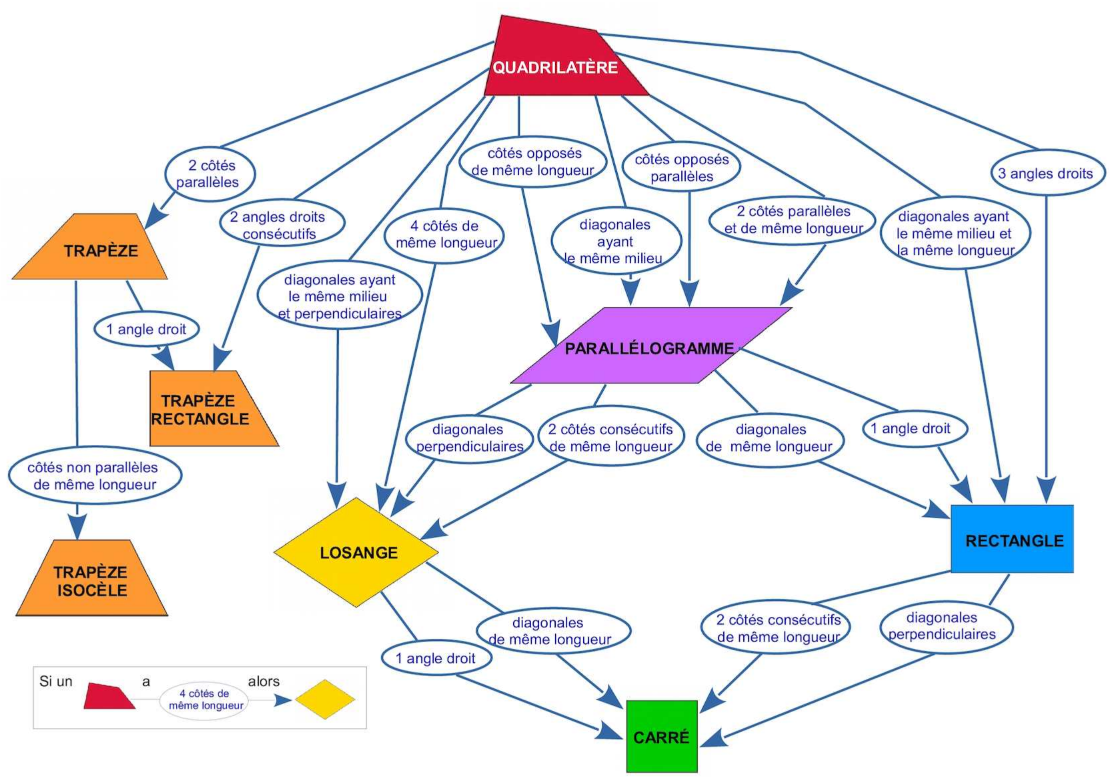
(c) Multiple de deux et de trois et le plus grand possible.

(d) Multiple de cinq et le plus petit possible.

2. Le nombre 2?5? est un multiple de cinq et de trois. Déterminer les chiffres manquants en donnant toutes les solutions possibles.

Chapitre 12

Quadrilatères



La synthèse des quadrilatères rencontrés au collège

12.1 Généralités

Définition 63. On appelle quadrilatère tout polygone à quatre côtés.

Illustration : /

Remarque. On pourra s'interroger sur l'étymologie des mots « triangle », « quadrilatère » et « polygone ».

Définition 64. On appelle diagonale d'un quadrilatère tout segment d'extrémités deux sommets non consécutifs.

Illustration : /

Définition 65. On dit qu'un quadrilatère est :

1. Convexe, si ses deux diagonales sont à « l'intérieur » de celui-ci.
2. Concave, s'il n'est pas convexe et, particulier, croisé, si ses deux diagonales sont à « l'extérieur » de celui-ci.

Illustration : /

Remarque. Nous ne considérerons que les quadrilatères convexes dans ce chapitre.

12.2 Les différentes familles

12.2.1 Rectangle

Définition 66. On appelle rectangle tout quadrilatère admettant quatre angles droits.

Illustration : /

Remarque. Trois angles droits suffisent. Pourquoi ?

Proposition 67. *Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales sont égales.*

Démonstration. Démontrée en classe de Cinquième. □

Remarque. La réciproque est vrai elle aussi :

Proposition 68. *Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales sont sécantes en leur milieu.*

Démonstration. Démontrée en classe de Cinquième. □

Remarque. Les diagonales d'un rectangle étant égales et sécantes en leur milieu, ce dernier est le centre d'un cercle passant par les quatre sommets du rectangle : le cercle circonscrit au rectangle.

Proposition 69. *Toute droite passant par les milieux de deux côtés opposés d'un rectangle est un axe de symétrie de celui-ci.*

Démonstration. Admise. □

12.2.2 Losange

Définition 70. On appelle losange tout quadrilatère dont les quatre côtés sont égaux (i.e. de même longueur)

Illustration : /

Remarque. Cette définition fournit une construction d'un losange à la règle et au compas.

Proposition 71. *Si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales sont sécantes en leur milieu, perpendiculaires et bissectrices des angles intérieurs du losange.*

Démonstration. Démontrée en classe de Cinquième. □

Proposition 72. *Toute diagonale d'un losange en est un axe de symétrie.*

Démonstration. Découle de la proposition précédente. □

12.2.3 Carré

Définition 73. On appelle carré tout polygone ayant ses quatre côtés égaux et ses quatre angles droits.

Illustration : /

Remarque. Un carré est donc un rectangle et un losange.

Proposition 74. *Si un quadrilatère est un carré, alors ses diagonales sont égales, perpendiculaires et sont les bissectrices des angles du carré.*

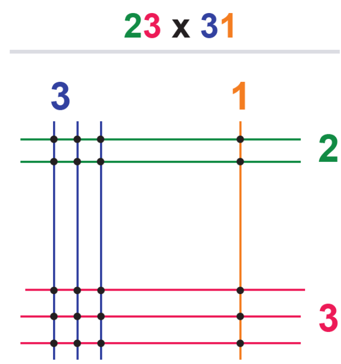
Démonstration. C'est évident puisqu'un carré est un rectangle et un losange. □

Remarque. On peut synthétiser les différents familles de quadrilatères particuliers à l'aide d'un diagramme de Venn [1] : /

1. John Venn est un mathématicien britannique né en 1 834 et mort en 1 923.

Chapitre 13

Division décimale



La multiplication chinoise

13.1 Présentation

Remarque. Dans une division décimale, le quotient, le reste, le dividende et le diviseur ont le même sens que dans une division euclidienne, mais ils peuvent être des nombres non entiers.

Exemple. $17 \div 2 = 8,5$.

1. 17 est le dividende.
2. 2 est le diviseur.
3. $8,5$ est le quotient.
4. 0 est le reste, on dit que la division « tombe juste ».

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. Il existe un algorithme permettant de poser une division décimale.
   Exemple : Divisons 21 par 4.
2. Une division décimale peut ne pas « tomber juste ».
   Exemple : Divisons 23 par 3.
3. Lorsque le reste de la division décimale de a par b est nul, le quotient est noté $\frac{a}{b}$.
4. Lorsqu'une division décimale de a par b ne tombe pas juste, alors on dit que le quotient $\frac{a}{b}$ n'est pas décimal.
   Exemple : $\frac{23}{3}$ n'est pas décimal.

Exercice. Poser les divisions décimales suivantes :

1. $82,8 \div 24$
2. $279 \div 17$
3. $111 \div 36$
4. $148,4 \div 53$
5. $754 \div 14$

Proposition 75. *Étant donnée la division décimale de a par b. On ne change pas le quotient si l'on multiplie ou l'on divise a et b par un même nombre non nul.*

Démonstration. Admise. □

Exemple. $82,8 \div 24 = 41,4 \div 12 = 414 \div 120 = 207 \div 60$.

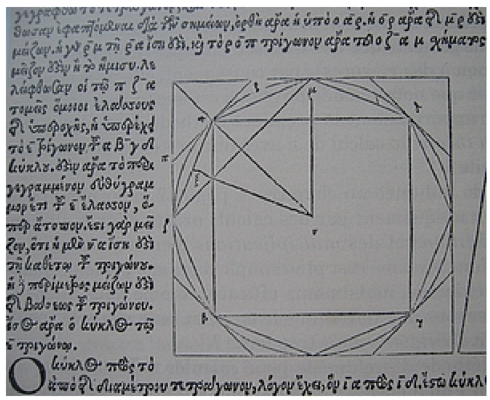
Remarque. Il est donc toujours possible de transformer une division décimale en une division euclidienne.

Exercice. Voici quelques exercices :

1. Effectuer la division $0,54 \div 0,06$ sans la poser.
2. Poser la division $75 \div 3,5$.
3. Poser la division $3,638 \div 0,32$
4. Poser la division $429 \div 2,6$
5. Poser la division $6,95 \div 0,043$
6. Trois élèves ont effectué la division de 2 387 par 68.
   Pour l'élève A, le quotient entier est 34 et le reste 55.
   Pour l'élève B, le quotient entier est 35 et le reste 7.
   Pour l'élève C, le quotient entier est 36 et le reste 9.
   L'un des trois élèves a trouvé la réponse correcte. Lequel ?
   Indication : on pourra utiliser la preuve par neuf et étudier le dernier chiffre.

Chapitre 14

Périmètre



La méthode d'Archimède pour mesurer le cercle

14.1 Polygones

Définition 76. On appelle périmètre d'une figure plane la longueur développée du contour de cette figure.

Illustration : /

Remarque. Un périmètre est exprimé dans l'unité de longueur du système international, le mètre (m). On pourra selon la figure étudiée utiliser le tableau de conversion suivant :

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Proposition 77. *Le périmètre d'un polygone est égal à la somme des longueurs de ses côtés.*

Démonstration. Découle directement de la définition du périmètre. □

Exemple. /

Exercice. Voici quelques petits exercices :

1. Construire un quadrilatère $PAIX$ tel que $PA = PX = 5,3\,\text{cm}$, $AI = IX = 6,4\,\text{cm}$ et calculer son périmètre.
2. Construire deux rectangles $SNCF$ et $RATP$ tels que $SN = RP = 5\,\text{cm}$, $SF = 3\,\text{cm}$ et $RA = 2 \times SF$. Calculer leurs périmètres respectifs.

3. Le périmètre d'un rectangle est 252 mm. Sa longueur est le double de sa largeur. Calculer sa largeur et sa longueur.

14.2 Cercle

Remarque. Pi, appelé parfois constante d'Archimède, est un nombre représenté par la lettre grecque minuscule du même nom : π. C'est le rapport constant de la circonférence (ou périmètre) d'un cercle à son diamètre dans un plan. L'usage de la lettre grecque π, première lettre de περίμετρος (« périmètre » en grec ancien), n'est apparu qu'au $XVIII^{ème}$ siècle. Les mathématiciens de l'Antiquité ont fait des recherches sur ce nombre. On sait depuis longtemps que π n'est pas un nombre décimal, c'est-à-dire que sa partie décimale ne se finit jamais. Cependant, on connaît d'excellentes valeurs approchées de π. En pratique, nous remplacerons π par $3,14$ ou $\frac{22}{7}$. On écrit alors : $\pi \simeq 3,14$ ou $\pi \simeq \frac{22}{7}$, qui se lit : « Pi est environ égal à ... ».

Proposition 78. *Le périmètre (ou circonférence) $\mathscr{P}$ d'un cercle de rayon r s'exprime selon la formule $\mathscr{P} = 2 \times \pi \times r$, où π*

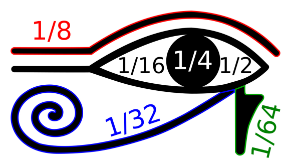
Démonstration. Admise. □

Exemple. /

Exercice. Le périmètre d'un cercle est 282, 6 mm. Calculer le rayon de ce cercle.

Chapitre 15

Nombres rationnels - Présentation



Les fractions de l'œil houdjat ou œil d'Horus

15.1 Présentation

Définition 79. Soient a et b deux nombres avec b non nul. On appelle quotient de a par b le nombre q par lequel il faut multiplier b pour obtenir a. Plus formellement, on a : $b \times q = a$. Ce nombre q est noté $\frac{a}{b}$ qui se lit : « a sur b ». Lorsque a et b sont des entiers naturels, on dit que le quotient $\frac{a}{b}$ est une fraction ou encore un nombre rationnel. a est alors appelé le numérateur de la fraction et b est appelé le dénominateur de la fraction. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Exemple. Voici quelques exemples :

1. $\frac{2}{3}$ est le quotient de 2 par 3. On a : $3 \times \frac{2}{3} = 2$.
   $\frac{2}{3}$ est une fraction. Son numérateur est 2 et son dénominateur est 3.
   Cependant, $\frac{2}{3}$ n'est pas un nombre décimal car son développement décimal est infini : $\frac{2}{3} = 0,666\ldots$.
2. $\frac{9}{18}$ est le quotient de 9 par 18. On a : $18 \times \frac{9}{18} = 9$.
   $\frac{9}{18}$ est une fraction. Son numérateur est 9 et son dénominateur est 18.
   De plus, $\frac{9}{18} = 0,5$ est un nombre décimal.

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. $\frac{a}{b} = a \div b$.
2. $\frac{4,57}{13,6}$ n'est pas une fraction. On dit qu'il s'agit d'une écriture fractionnaire.
3. $\frac{67}{100}$ est une fraction. Il s'agit même d'une fraction décimale.
4. Tout nombre entier naturel est un nombre rationnel. Exemple : $42 = \frac{42}{1}$.
5. Comme il est impossible de diviser par zéro, le dénominateur d'une fraction est différent de zéro.

Proposition 80. *Voici deux propositions importantes :*

1. *Si le numérateur est strictement supérieur au dénominateur d'une fraction, alors cette fraction est strictement supérieure à 1. Plus formellement, si $a > b$, alors $\frac{a}{b} > 1$.*
2. *Si le numérateur est égal au dénominateur d'une fraction, alors cette fraction est égale à 1. Plus formellement, si $a = b$, alors $\frac{a}{b} = 1$.*
3. *Si le numérateur est strictement inférieur au dénominateur d'une fraction, alors cette fraction est strictement inférieure à 1. Plus formellement, si $a < b$, alors $\frac{a}{b} < 1$.*

Démonstration. $\frac{a}{b} = a \div b$ donc le résultat est évident. □

15.2 Simplification

Proposition 81. *Voici deux propositions importantes :*

1. *On obtient une fraction égale à une fraction donné en multipliant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par un même nombre entier naturel non nul. Plus formellement, si $\frac{a}{b}$ est une fraction et si k est un nombre non nul, alors $\frac{a\times k}{b\times k} = \frac{a}{b}$.*
2. *On obtient une fraction égale à une fraction donné en divisant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par un même nombre entier naturel non nul. Plus formellement, si $\frac{a}{b}$ est une fraction et si k est un nombre non nul, alors $\frac{a\div k}{b\div k} = \frac{a}{b}$.*

Exemple. $\frac{7}{2} = \frac{7\times 3}{2\times 3} = \frac{21}{6}$ et $\frac{35}{10} = \frac{35\div 5}{10\div 5} = \frac{7}{2}$.

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. On appelle « simplifier une fraction » le fait de la réécrire avec un numérateur et un dénominateur plus petits en utilisant la proposition précédente.
   Exemple : /
2. La proposition précédente permet aussi de « compliquer une fraction » et donc de transformer certaines écritures fractionnaires en fractions.
   Exemple : /

Exercice. Simplifier les fractions suivantes :

$$\frac{20}{14};\frac{45}{35};\frac{35}{28};\frac{72}{56};\frac{30}{1\,100};\frac{500}{130};\frac{18}{27};\frac{24}{54};\frac{1\,700}{23\,000}$$

15.3 Opérations

Proposition 82. *Voici comment additionner et soustraire deux fractions :*

1. *Pour additionner deux fractions ayant le même dénominateur, il suffit de conserver ce dénominateur et d'additionner leurs numérateurs. Plus formellement, $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.*
2. *Pour soustraire deux fractions ayant le même dénominateur, il suffit de conserver ce dénominateur et de soustraire leurs numérateurs. Plus formellement, $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$.*

Démonstration. Démontrée en classe de Cinquième à l'aide de la distributivité. □

Exemple. /

Proposition 83. *Soit $\frac{a}{b}$ une fraction. Soit k un nombre. Alors $k \times \frac{a}{b} = \frac{k\times a}{b} = \frac{k}{b} \times a$.*

Démonstration. Cela découle directement de l'égalité $\frac{a}{b} = a \div b$. $\square$

Exemple. Calculons les expressions numériques suivantes :

1. $7 \times \frac{2}{13}$
2. $3 \times \frac{8}{27}$
3. $86 \times \frac{7}{14}$

Exercice. Au début des vacances, Pauline avait 92 euros. Le premier jour, elle a dépensé $\frac{3}{16}$ de cette somme. Le deuxième jour, elle a dépensé $\frac{5}{16}$ de la somme. Le troisième jour, elle a dépensé $\frac{4}{23}$ de la somme.

1. Combien a-t-elle dépensé chaque jour ?
2. Quelle fraction de la somme de départ lui reste-t-il ?

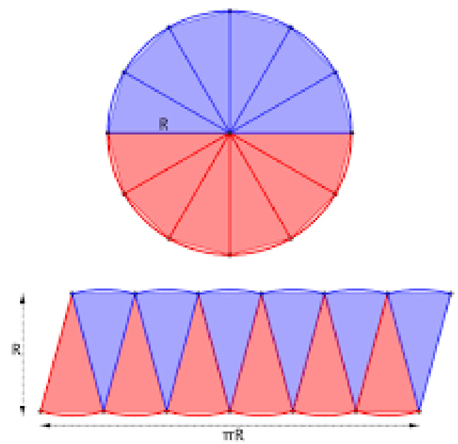
Remarque. Calculer $p\,\%$ d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par $\frac{p}{100}$.

Exemple. Calculons $15\,\%$ de 720 :
$\frac{15}{100} \times 720 = (720 \div 100) \times 15 = 7,2 \times 15 = 108$.

Exercice. Un magasin propose $30\,\%$ de réduction à partir de 60 euros d'achats. Avant de payer, Éloïse réfléchit et décide d'acheter davantage de marchandises. Pourquoi ? Quelle est la fourchette de prix à éviter ?

Chapitre 16

Aire



L'aire d'un disque

16.1 Aire d'une surface plane

Définition 84. Une unité étant choisie, on appelle aire d'une figure le nombre d'unités qui mesurent la surface de cette figure.

Exemple. /

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. L'aire est la réponse à la question : « Combien y a-t-il à l'intérieur de la figure ? ».
   Le périmètre, lui, est la réponse à la question : « Combien mesure le tour de la figure ? ».
2. Il n'y a pas de lien direct entre le périmètre et l'aire d'une figure. Exemples : /
3. L'unité internationale d'aire est le mètre carré, noté m^2, il s'agit de la surface occupée par un carré de côté un mètre. On utilise aussi ses multiples et ses sous-multiples et, plus généralement, le tableau de conversion suivant :

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2

4. Pourquoi y a-t-il une colonne vide entre deux unités ?
5. Pour mesurer des terrains, des champs, on utilise les unités agraires : l'are, noté a, et l'hectare, noté ha.
   On a : $1\,a = 100\,m^2$ et $1\,ha = 100\,a = 1\,hm^2$.

16.2 Aires usuelles

Proposition 85. *L'aire d'un rectangle de longueur L et de largeur l s'exprime suivant la formule $\mathscr{A} = L \times l$.*

Démonstration. Admise. □

Proposition 86. *L'aire d'un carré de côté c s'exprime suivant la formule $\mathscr{A} = c \times c := c^2$.*

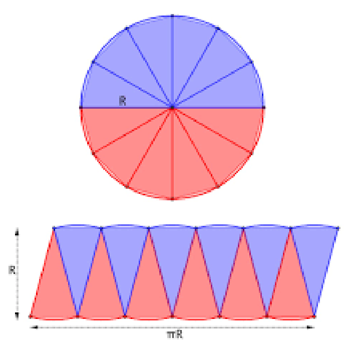
Démonstration. Un carré est un rectangle tel que $L = l$. Donc cette formule découle de la précédente. □

Proposition 87. *L'aire d'un triangle rectangle dont les longueurs des cathètes sont b et c s'exprime suivant la formule $\mathscr{A} = \frac{b \times c}{2}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'un triangle rectangle est un rectangle découpé suivant l'une de ses diagonales. □

Proposition 88. *L'aire d'un disque de côté r s'exprime suivant la formule $\mathscr{A} = \pi \times r \times r = \pi r^2$.*

Démonstration. Un découpage judicieux du disque allié à une connaissance du périmètre du cercle fournissent le résultat :



□

Exercice. Voici quelques petits exercices :

1. Un gâteau rectangulaire de 28 centimètres de long et 21 centimètres de large est coupé en parts carrées de même aire.
   (a) Quelle est la longueur des côtés des carrés ?
   (b) Quelle est l'aire de chaque part ?
   (c) Quel est le nombre de parts ?
2. Le périmètre d'un rectangle est de 18 centimètres. Sa longueur et sa largeur sont des nombres entiers de centimètres. Calculer l'aire de ce rectangle dans tous les cas possibles.
3. Une diagonale de losange mesure le double de l'autre. L'aire de ce losange est de 49 centimètres carrés. Calculer les longueurs des diagonales de ce losange.
4. Soit $\mathscr{D}$ un disque de centre O et de rayon 12 centimètres. Soient A et B deux points appartenant au cercle associé à ce disque tels que $\widehat{AOB} = 30°$. Calculer l'aire du secteur angulaire AOB.
5. On inscrit un carré dont la diagonale mesure 4 centimètres dans un disque. Quelle est l'aire de la surface intérieure au disque mais extérieure au carré ?

Chapitre 17

Parallélépipède rectangle

Le Rubik's cube est un casse-tête inventé par Ernő Rubik en 1974,

et qui s'est rapidement répandu sur toute la planète au cours des années 1980.

17.1 Présentation

Définition 89. Un parallélépipède rectangle (ou pavé droit) est un solide qui possède six faces rectangulaires, huit sommets et douze arêtes. Les faces opposés sont égales (i.e. identiques, superposables, isométriques).

Illustration : /

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Un parallélépipède peut ne pas être rectangle, ou droit. Exemple : /
2. Lorsque les six faces sont des carrés identiques, le parallélépipède est appelé un cube.
3. Voici un développement (ou patron) d'un parallélépipède rectangle : /

Exercice. Voici un petit exercice de recherche :

1. Déterminer tous les patrons du cube.
2. En utilisant tous les patrons du cube et en les juxtaposant sans trou, ni recouvrement, former un assemblage ayant le plus petit périmètre possible.
   Quel périmètre obtient-on ?

17.2 Aire et volume

Proposition 90. *L'aire d'un parallélépipède rectangle est égale à la somme des aires de ses six faces.*

Démonstration. C'est évident. □

Exemple. /

Définition 91. Une unité étant choisie, on appelle volume d'un solide le nombre d'unités qui mesurent « l'intérieur » de ce solide.

Remarque. On peut effectuer plusieurs remarques :

1. Le volume mesure la quantité de liquide ou se sable que l'on peut verser à l'intérieur d'un solide.
2. L'unité internationale de volume est le mètre cube, noté m^3, il s'agit volume occupé par un cube d'arête un mètre. On utilise aussi ses multiples et ses sous-multiples et, plus généralement, le tableau de conversion suivant :

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^2

3. Pourquoi y a-t-il deux colonnes vides entre deux unités ?
4. L'unité usuelle de capacité est le litre, noté L, égal à un décimètre cube. On utilise aussi l'hectolitre, noté hL, égal à cent litres, le décilitre, noté dL, égal à un dixième de litre, le centilitre, noté cL, égal à un centième de litre et le millilitre, noté mL, égal à un millième de litre.

Proposition 92. *Le volume d'un parallélépipède rectangle s'exprime suivant la formule $\mathscr{V} = L \times l \times h$, où L est la longueur, l la largeur et h la hauteur du parallélépipède rectangle.*

Démonstration. Admise. □

Exemple. /

Proposition 93. *Le volume d'un cube s'exprime suivant la formule $\mathscr{V} = a \times a \times a := a^3$, où a est la longueur de l'arête du cube.*

Démonstration. Admise. □

Exemple. /

Exercice. Voici deux petits exercices :

1. On verse le contenu d'un cube de 14 cm d'arête dans un parallélépipède rectangle dont la base est un rectangle de 8 cm sur 7 cm et qui a une hauteur de 40 cm. Le liquide débordera-t-il ? Si oui, quelle aurait dû être la hauteur minimum du parallélépipède rectangle pour éviter cela ?
2. Quinze chameaux boivent 84 L d'eau chacun dans une citerne cubique de $1,5$ m d'arête. De combien de centimètres a baissé le niveau de l'eau ?

Index